

Histoire d'angles

IREM de Poitiers, groupe collège

Épisode 2 : D'où viennent nos théorèmes de cinquième sur les angles ?

Les théorèmes clés concernant les angles du programme de 5^e sont présents dans le livre 1 des *Éléments* d'Euclide. En voici les énoncés (traduction Vitrac).

1-15 « Si deux droites se coupent l'une l'autre, elles font des angles au sommet égaux entre eux ».

1-28 « Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé du même côté, ou les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits, les droites seront parallèles l'une à l'autre ».

1-29 « Une ligne droite tombant sur deux droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits ».

1-32 « Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits ».

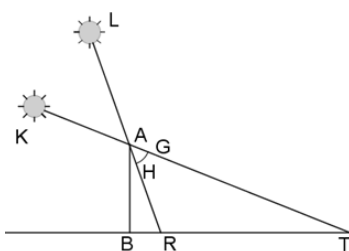
1-34 « Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les coupe en deux parties égales ».

Ce qu'il est intéressant de savoir c'est que ces théorèmes ont été élaborés dans la Grèce antique bien avant 300 avant J.-C., époque où a été composé l'ouvrage d'Euclide, dans un contexte d'étude de problèmes de calendrier et de géographie en lien avec l'astronomie. Voici des fragments de cette étude.

Méridien, solstice, équinoxe, latitude, écliptique

L'existence du gnomon est fort ancienne, mais l'utilisation qu'en a faite Anaximandre (VI^e siècle avant J.-C.) pour déterminer l'ombre méridienne équinoxiale montre que le théorème I 15, attribué à Thalès (VI^e siècle avant J.-C.), et la géométrisation de la situation ont joué un rôle important dans la conception de la méthode d'Anaximandre.

Ombre méridienne (midi) et gnomon



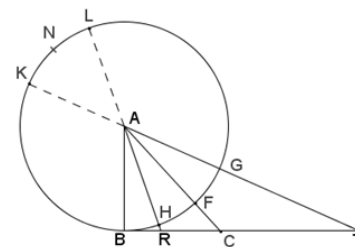
AB : le gnomon vertical.

BR : ombre méridienne minimale : jour de l'été (solstice d'été), position L du soleil la plus élevée de l'année.

BT : ombre méridienne maximale : jour de l'hiver (solstice d'hiver), position K du soleil la plus basse de l'année.

BTR est donc une portion du méridien terrestre passant par B.

Ombre méridienne équinoxiale



Cercle « méridien » : centre A sommet du gnomon, rayon AB hauteur du gnomon.

La connaissance de R et T permet d'y placer les « positions » L et K du soleil.

La position N du soleil à l'équinoxe est celle qui divise l'arc (inaccessible de fait) KL en deux parties égales. Pour obtenir le point N il suffit de bissecter en F l'arc (accessible) GH qui lui est égal (angles opposés par le sommet égaux). La droite AF nous donne N et donc l'ombre équinoxiale BC, qui permet de connaître le jour de l'équinoxe.

En divisant en deux les angles opposés par le sommet formés par les deux rayons méridiens des solstices, KAGT et LAHR, Anaximandre a trouvé l'obliquité de l'écliptique. Cœnopide lui assigne, vers 450-425 avant J.-C., la valeur de l'angle au centre du pentédécagone régulier, soit 24° pour l'angle GAF ou FAH. Les calculs d'angles dans les polygones réguliers utilisent I 32 (somme des angles du triangle), théorème attribué aux Pythagoriciens (VI^e siècle avant J.-C.).

À l'équinoxe l'angle BAC est égal à celui définissant la latitude du lieu B (angles en situation d'alternes-internes, soit I 29), et la connaissance de BC permet de calculer la latitude du lieu en utilisant une table des cordes dont la construction utilise d'autres théorèmes de géométrie de la fin du cycle 4.

La mesure de la Terre

Les arguments que donne Aristote (384-322 avant J.-C.), dans son livre *Du ciel*, pour une forme ronde et de grande dimension de la Terre, ainsi que les estimations rapportées faites par les mathématiciens, montrent que le problème de la mesure de la Terre est fort ancien.

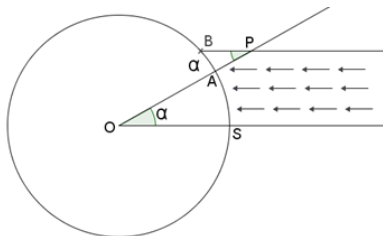
Cléomède (I^e siècle après J.-C.), dans son ouvrage *Le mouvement circulaire des corps célestes* décrit les méthodes utilisées par Ératosthène (276-195 avant J.-C.) et par Posidonius (135-51 avant J.-C.) pour calculer la circonférence de la Terre.

Cléomède décrivant la méthode d'Ératosthène indique qu'elle repose sur cinq considérations :

1. Syène et Alexandrie sont sur le même méridien ;
2. La distance des deux lieux est de 5000 stades ;
3. Les rayons issus des différents points du soleil atteignent les différents points de la Terre comme autant de parallèles.
4. Une droite coupant des parallèles donne des angles alternes internes égaux ;
5. Les arcs de cercles mesurant des angles égaux entre eux, sont semblables entre eux.

Nous y retrouvons le théorème I 29. Présentons brièvement les deux méthodes

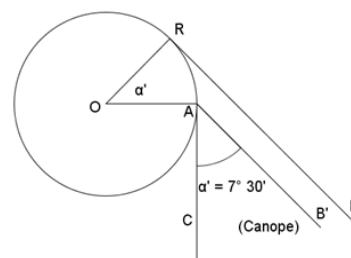
Principe de la mesure de la circonférence de la Terre par Ératosthène : mesure de l'angle des rayons du soleil avec la verticale à partir de l'ombre du soleil à Alexandrie à midi le jour où à Syène cette ombre est inexistante.



A : Alexandrie S : Syène
P : sommet du gnomon

APB : angle mesuré égal (angles alternes internes) à l'angle inaccessible AOS qui avec la connaissance de la longueur de l'arc AS (distance de Syène à Alexandrie) va permettre de calculer la circonférence de la Terre

Principe de la mesure de la circonférence de la Terre par Posidonius : mesure de l'angle de culmination de l'étoile Canope à Alexandrie alors qu'elle culmine sur l'horizon à Rhodes.



A : Alexandrie
R : Rhodes
B et B' : étoile Canope

RB : horizon à Rhodes (perpendiculaire au rayon terrestre OR)

AC : horizon à Alexandrie (perpendiculaire au rayon terrestre OA).

CAB' : angle mesuré égal (angles à côtés perpendiculaires) à l'angle inaccessible AOR qui avec la connaissance de la longueur de l'arc RA (distance de Rhodes à Alexandrie) va permettre de calculer la circonférence de la Terre

Dans la méthode de Posidonius ce que nous avons appelé « théorème sur les angles à côtés perpendiculaires » est un anachronisme. Il ne figure pas dans les *Éléments* d'Euclide. À partir de quand lui a-t-on donné une existence ? La recherche reste à faire. Si l'on s'en tient aux théorèmes des *Éléments* d'Euclide et à la figure, on peut obtenir l'égalité des deux angles en comparant la somme des angles du triangle rectangle OAD (en appelant D l'intersection du prolongement de B'A avec OR) qui vaut deux droits d'après I 32 et la somme des trois angles de sommet A qui vaut aussi deux droits (alignement de D, A et B'). On pourrait aussi faire intervenir l'angle opposé par le sommet à l'angle COB'.

Szabó donne de bonnes raisons de penser que ces méthodes, et les théorèmes sur lesquels elles s'appuient, sont bien antérieurs à Euclide : ils dateraient d'avant la naissance d'Eudoxe (408-350 avant J.-C.).

Nous venons donc de voir que trois des théorèmes clés sur les angles en classe de cinquième ont été conçus dans la Grèce ancienne pré-euclidienne pour résoudre des problèmes liés à l'astronomie avant de prendre place dans le corpus théorique des *Éléments* d'Euclide. Et il y en a beaucoup d'autres en particulier ceux des livres III et IV. C'est ce que nous dit le célèbre commentateur des *Éléments* d'Euclide, Proclus (410-485 après J.-C.) : « L'auteur des *Éléments* semble donc avoir démontré sciemment un grand nombre de propositions à des fins astronomiques pour nous préparer à cette science ».

Références

EUCLIDE d'Alexandrie (1990). *Les Éléments*. Vol. 1 Livres I à IV. Traduction et commentaires de B. Vitrac, introduction de M. Caveing., PUF, Paris.

SZABÓ Árpád, MAULA Erka (1986). *Les débuts de l'astronomie, de la géographie et de la trigonométrie chez les Grecs*. Vrin, Paris.

SZABÓ Árpád (2000). *L'aube des mathématiques grecques*. Vrin, Paris.

DECAMP Nicolas et De HOSSON Cécile (2011). *Quelques éléments historiques et didactiques sur l'expérience d'Ératosthène*, BUP n°937. Sur la Toile :

http://didel.script.univ-paris-diderot.fr/claroline/backends/download.php?url=L2RIY2FtcF9kZUhhc3NvbI9CVVBvY3QyMDExLnBkZg%3D%3D&cidReset=true&cidReq=FORMCONT_001



Un autre point de vue

La mesure de la Terre par Eratosthène fait l'objet d'un magnifique roman historique écrit en 2003 par Denis Guedj : *Les cheveux de Bérénice*.

Ce voyage dans le royaume de Pharaon, le long du Nil, nous transporte aux côtés du directeur de la Grande Bibliothèque et précepteur de Pharaon. L'aventure scientifique et les intrigues politiques s'entremêlent au point que le lecteur a l'envie d'intervenir réellement pour aider les uns et empêcher les autres.

À lire et à faire détenir par le CDI.

GUEDJ, Denis. *Les Cheveux de Bérénice*. Seuil, 2003