COROL'AIRE, dernière minute.

Nous bouclons ce numéro de Corol'aire à l'heure même où nombre de nos concitoyens sont victimes de l'attentat de Nice.

Le Comité de la Régionale s'associe à la douleur des familles et rend hommage aux victimes.

Ce numéro estival se voulait léger et plein d'enthousiasme. Ne souhaitant céder aucune once de terrain à la terreur, nous avons choisi de vous livrer ce numéro intact, à l'exception de cette première page.

Les heures à venir nous amèneront certainement à faire des choix de société, et l'éducation des jeunes qui nous sont confiés est le premier rempart à l'obscurantisme.

LIBERTÉ, ÉGALITÉ, FRATERNITÉ

est une devise, la nôtre, qui devra éclairer, interroger et arbitrer ces choix. Cette interrogation—bien entendu collective—pourra seule nous éviter de tomber dans les pièges que nous tendent les terroristes.

Sébastien Dassule-Debertonne

Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l' Enseignement
Public

Régionale de Poitou-Charentes

Corol'aire

Juillet 2016 n°105

Bonnes vacances

Sébastien Dassule-Debertonne

L'année a été rude et, enfin, vous pensez à vous prélasser.
Ce numéro de Corol'aire arrive juste à temps pour vous accompagner sur la plage, sur les chemins de randonnées ou dans tout lieu de prélassement de votre choix.
Vous y retrouverez toutes vos rubriques habituelles, à l'exception du compte-rendu du comité, rubrique qui fait les frais d'un déménagement (le mien !).
Cette année encore, vous verrez que le Rallye a remporté un franc succès. Le travail colossal de l'équipe organisatrice y est pour beaucoup et je tenais à les remercier à la Une pour tout leur dévouement.
Comme tout magazine destiné aux vacances, vous trouverez de quoi réfléchir, avec la rubrique Rubricollage.
Il y a aussi de quoi se projeter, avec la présentation de la Journée de la Régionale du 12 octobre prochain. Cette Journée sera fortement liée à la sortie de la nouvelle exposition à laquelle nous travaillons depuis trois ans avec l'IREM et l'Espace Mendès France sous la houlette de Dominique Gaud et Jean-Paul Guichard.
Lors de cette Journée, vous aurez l'occasion de visiter l'exposition (et de préparer une future visite avec vos élèves) et d'entendre non pas une mais deux conférences de Jean-Paul Delahaye.

Pourront-ils terminer le cube ?

Enfin, en bonus, vous trouverez plusieurs documents : votre bulletin d'inscription à la Journée de la Régionale (et le menu complet), l'affiche de l'exposition, la présentation d'une nouvelle brochure de l'IREM ainsi qu'un appel à contribution pour un colloque sur le cycle 3 (réforme oblige, mais chut, c'est les vacances !).
Beaucoup de choses à picorer donc pour ces vacances que je vous souhaite ensoleillées et reposantes.

Sommaire

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Chantal Gobin

En 2011, pour la première fois, il y avait une remise officielle des prix du Rallye. À ce moment-là, nous étions loin de penser que ça deviendrait un temps fort où élèves, professeurs, membres de l'équipe du Rallye, et autres participants se rencontreraient, échangeraient, bref, passeraient ensemble un moment privilégié.

L'amphi 400 bien rempli !

Alternativement, les Universités de Poitiers et de La Rochelle accueillent cette remise des prix.

Cette année, c'était le 1er juin, à La Rochelle, au Pôle Sciences et plus précisément dans l'amphi 400 du bâtiment d'Orbigny. Amphi 400 ? et oui, c'était nécessaire car 25 classes sur les 28 primées étaient représentées soit environ 300 élèves et une quarantaine d'adultes ! Tous venus pour la remise des prix de la 25ème édition du Rallye !

Gilles Bailly-Maitre, responsable du département de mathématiques du Pôle Sciences de l'Université de La Rochelle a ouvert la séance, suivi de Julien Michel, directeur de l'IREM de Poitiers. Tous les deux ont mis en avant le côté ludique des maths.

Chantal Gobin, au nom de toute l'équipe du Rallye, a remercié l'Université de La Rochelle pour son très bon accueil. Elle a aussi excusé Messieurs les IPR de mathématiques, retenus par Madame la Rectrice.

Jean Fromentin a ensuite présenté le conférencier, Didier Boursin, créateur de pliages et auteur de nombreux livres d'origami.

Dans un premier temps, Didier Boursin nous a montré, dans un diaporama, quelques unes de ses créations dans divers domaines (architecture, publicité, parfumerie...). C'était magique, il y avait beaucoup de poésie. Il n'oubliait pas, à chaque fois, de pointer du doigt l'utilisation des mathématiques dans chacune de ses réalisations.

Dans un deuxième temps, il s'est attaqué à une tâche plus périlleuse : faire réaliser un tétraèdre à partir d'une enveloppe 11 x 22 aux 350 spectateurs de l'amphi ! Un vrai défi et mission accomplie ! Une caméra reliée à un vidéoprojecteur a permis à tous de suivre très facilement les différentes étapes du pliage.

Didier Boursin se plie en quatre pour le rallye.

Pour finir, il nous a montré des solides plus ou moins complexes, des pliages qu'il tournait dans tous les sens, c'était éblouissant.

Au cours de son exposé, Didier Boursin a toujours insisté sur le côté simple de ses pliages. Nous le remercions vivement d'être venu ainsi animer cette remise des prix.

Ensuite est arrivée la remise des prix, moment très attendu des élèves, avec l'appel de chacune des classes lauréates. De nombreuses récompenses leur ont été distribuées. Nous remercions nos différents partenaires Casio, Texas Instrument, le Futuroscope, Kangourou, Tangente, COSEA, Vinci, Canopé, la MAIF, les Conseils départementaux, l'IREM, le Rectorat et l'Université de La Rochelle.

Jean Fromentin a montré le diaporama des morceaux choisis ce qui a permis à tous, de découvrir de très belles réalisations des classes, pas nécessairement lauréates.

Les photos de la Remise des prix, le diaporama des morceaux choisis, le bilan du Rallye, les éléments de solutions des épreuves ainsi que le tétraflexagone (offert à chaque élève des classes lauréates) et le plan de montage sont sur le site de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes :

http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?rubrique8

Le thème de 2017 a été dévoilé : « **Nombre, formes et jeux** ».

Il a aussi été annoncé que l'an prochain, les droits d'inscription seraient de 6 euros.

Puis, tout s'est terminé par un goûter offert par l'Université de La Rochelle et servi par les collègues du Pôle Sciences.

Chaque année, nous essayons d'accompagner la remise des prix d'une exposition.

Cette année, Cyril Gabard, plieur de papier, a exposé ses réalisations d'origami : insectes, animaux, solides géométriques. À côté de chaque pliage, il a indiqué le nom du créateur. Cette superbe exposition a obtenu un vrai succès auprès des élèves ; peut-être sera-t-elle à l'origine de la naissance de nouveaux plieurs de papier et de clubs d'origami ?

Toute l'équipe du Rallye remercie Cyril, pour son exposition et aussi sa disponibilité.

Les réalisations de C. Gabard admirées par les élèves.

À 17 h 30, la remise des prix était terminée, enfin pas pour tout le monde car il a fallu balayer le sable répandu sur les gradins : plusieurs classes avaient profité de leur venue à La Rochelle pour aller à la plage !

Toute l'équipe du Rallye était fatiguée mais contente.

Depuis, nous avons eu des retours très positifs et les membres du Comité de la Régionale nous ont félicités !

À VOS AGENDA :
Réservez dès maintenant votre journée du *mercredi 12 octobre 2016*

Notre enseignement des mathématiques est en pleine mutation.

Venez donner votre avis et partager vos points de vue à l'occasion de la septième journée de la Régionale APMEP Poitou-Charentes.

Vous pourrez échanger, entre autre, à propos du cycle 3, du cycle 4, ou de la seconde.

Vous aurez le privilège d'assister à une conférence intitulée :

« *Le hasard et l'ordinateur* ».

Vous découvrirez, de manière active, une exposition intitulée :

« *Maths & Puzzles* ».

Si vous voulez prolonger en soirée, vous pourrez assister à une deuxième conférence intitulée : « *Les paradoxes graphiques et logiques* ».

Les lieux et le programme détaillé de cette journée sont joints à ce Corol'aire.

Vous recevez avec ce numéro **un bulletin d'inscription interne à l'APMEP (indispensable pour l'organisation).**

Il vous faudra également **guetter le PAF dès la rentrée en septembre 2016 (indispensable pour un ordre de mission sans frais, si vous avez cours ce jour là).**

Exposition Maths & Puzzles

Dominique Gaud

La préparation de la nouvelle exposition **Maths & Puzzles** arrive à son terme.

Pour la première fois, une exposition s'adressera aussi bien aux élèves des classes maternelles qu'aux étudiants.

À l'aide de nombreuses manipulations les élèves :

- se familiariseront aux formes géométriques planes ou spatiales,
- comprendront d'où viennent certaines formules arithmétiques ou d'algèbre,
- travailleront sur les opérations arithmétiques,
- s'initieront aux calculs d'aires et de périmètres,

tout cela en jouant et en exerçant leur logique.

Cette nouvelle exposition présente de nombreuses nouveautés quant à sa conception :

- un magnifique catalogue édité par l'APMEP nationale vous permettra d'approfondir votre visite, voire de la préparer,
- un bar à casse-tête sera à la disposition de vos élèves : seul ou en groupe, les élèves pourront relever des défis mathématiques et ludiques,
- un atelier permettra aux élèves de reproduire les puzzles qu'ils souhaitent,
- sur le site de notre Régionale, vous trouverez des prolongements pédagogiques, voire des comptes rendus,
- un blog fait par des enseignants de maternelle et primaire sera aussi à votre disposition.

Trois ans de travail ont été nécessaires pour réaliser cette exposition avec une équipe de14 membres de notre Régionale, des membres de l'IREM , des membres de l'AGEEM, deux maitres formatrices de l'École primaire, deux membres de l'Université et bien sûr toute l'équipe de l'Espace Mendes-France de Poitiers.

Que tous ceux qui ont participé soient remerciés.

Vous aurez une visite–atelier de cette exposition lors de la Journée de la Régionale le 12 octobre prochain pour laquelle nous comptons sur votre présence, et bien sûr nous vous attendons nombreux avec vos élèves pour visiter, manipuler et jouer durant toute cette année scolaire 2016-2017.

Rappelons que l'exposition pourra être visitée à partir du 28 septembre et jusqu'au 30 juin 2017, puis elle pourra itinérer à votre demande dans les établissements scolaires ou des lieux publics.

Conférence : L'aile du papillon

Louis-Marie Bonneval

La Régionale organisait, le 6 avril dernier, une conférence à La Rochelle. Intitulée « L'aile du papillon », elle était donnée par Frédéric Testard. En voici un bref résumé

Papillon—Isabelle Sicre

« Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? », demandait en 1972 le météorologue Edward Lorenz, évoquant de façon imagée le **chaos déterministe**.

Frédéric Testard quant à lui est parti de la « transformation du boulanger », qui se modélise en dimension 1 par une récurrence :

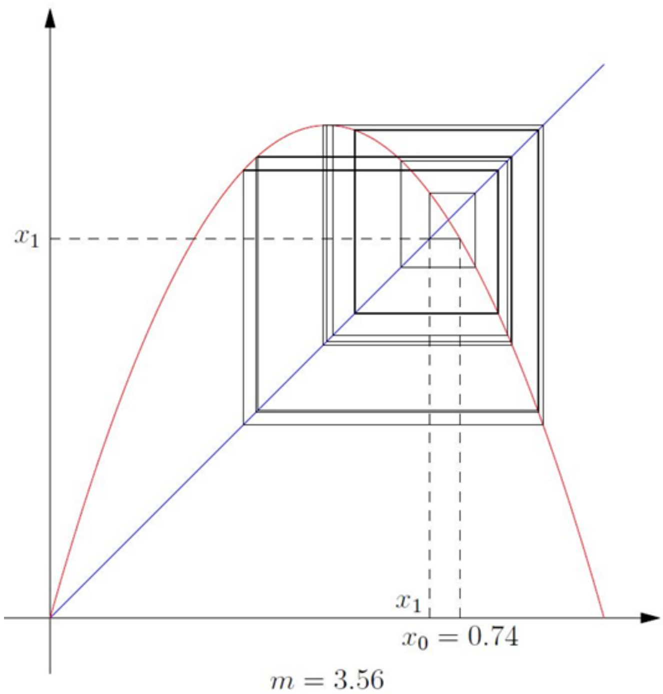
$x_{n+1}=1-2|x_n- ½|$, avec x_0 entre 0 et 1.

Le comportement de la suite dépend du premier terme : pour x_0 rationnel elle est périodique à partir d'un certain rang, pour x_0 irrationnel elle peut être chaotique. De plus, son étude à l'ordinateur est perturbée par la représentation binaire des nombres en machine : il y a là un obstacle à identifier et à contourner.

De là, le conférencier est passé aux étonnantes « suites logistiques », étudiées notamment par Mitchell Feigenbaum. Elles vérifient :

$x_{n+1}=mx_n(1-x_n)$, où m est un paramètre compris entre 0 et 4.

Pour certaines valeurs de m et de x_0, elles peuvent avoir un comportement chaotique. Le cas m = 4 est particulièrement troublant, puisque l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est dense dans [0 ; 1] !



Frédéric Testard[1] enseigne à l'université de La Rochelle, il est investi dans la formation des professeurs de lycée et collège. Son exposé très pédagogique et vivant a passionné l'auditoire, malheureusement un peu clairsemé.

Le diaporama est disponible sur le site de la Régionale.

[1] Pour la petite histoire, il est cousin de Jean-Pierre Sicre, qui fut président de notre Régionale de 1994 à 1996, et de sa sœur Isabelle, auteure du tableau reproduit ci-dessus.

Histoire d'angles

IREM de Poitiers, groupe collège

Épisode 2 : D'où viennent nos théorèmes de cinquième sur les angles ?

Les théorèmes clés concernant les angles du programme de 5[e] sont présents dans le livre 1 des *Éléments* d'Euclide. En voici les énoncés (traduction Vitrac).

1-15 « Si deux droites se coupent l'une l'autre, elles font des angles au sommet égaux entre eux ».

1-28 « Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé du même côté, ou les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits, les droites seront parallèles l'une à l'autre ».

1-29 « Une ligne droite tombant sur deux droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits».

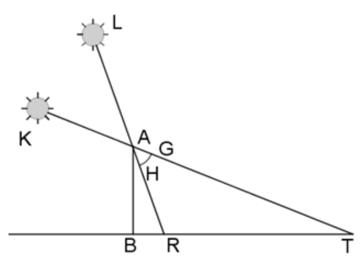
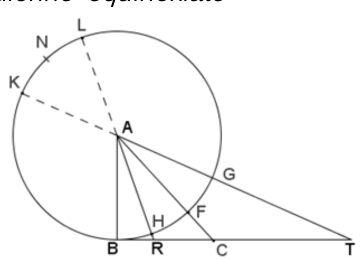
1-32 « Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits ».

1-34 « Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les coupe en deux parties égales ».

Ce qu'il est intéressant de savoir c'est que ces théorèmes ont été élaborés dans la Grèce antique bien avant 300 avant J.-C., époque où a été composé l'ouvrage d'Euclide, dans un contexte d'étude de problèmes de calendrier et de géographie en lien avec l'astronomie. Voici des fragments de cette étude.

Méridien, solstice, équinoxe, latitude, écliptique

L'existence du gnomon est fort ancienne, mais l'utilisation qu'en a faite Anaximandre (VI[e] siècle avant J.-C.) pour déterminer l'ombre méridienne équinoxiale montre que le théorème I 15, attribué à Thalès (VI[e] siècle avant J.-C.), et la géométrisation de la situation ont joué un rôle important dans la conception de la méthode d'Anaximandre.

Ombre méridienne (midi) et gnomon	*Ombre méridienne équinoxiale*
	
AB : le gnomon vertical. BR : ombre méridienne minimale : jour de l'été (solstice d'été), position L du soleil la plus élevée de l'année. BT : ombre méridienne maximale : jour de l'hiver (solstice d'hiver), position K du soleil la plus basse de l'année. BTR est donc une portion du méridien terrestre passant par B.	Cercle « méridien » : centre A sommet du gnomon, rayon AB hauteur du gnomon. La connaissance de R et T permet d'y placer les « positions » L et K du soleil. La position N du soleil à l'équinoxe est celle qui divise l'arc (inaccessible de fait) KL en deux parties égales. Pour obtenir le point N il suffit de bissecter en F l'arc (accessible) GH qui lui est égal (angles opposés par le sommet égaux). La droite AF nous donne N et donc l'ombre équinoxiale BC, qui permet de connaitre le jour de l'équinoxe.

En divisant en deux les angles opposés par le sommet formés par les deux rayons méridiens des solstices, KAGT et LAHR, Anaximandre a trouvé l'obliquité de l'écliptique. Œnopide lui assigne, vers 450-425 avant J.-C., la valeur de l'angle au centre du pentédécagone régulier, soit 24° pour l'angle GAF ou FAH. Les calculs d'angles dans les polygones réguliers utilisent I 32 (somme des angles du triangle), théorème attribué aux Pythagoriciens (VIe siècle avant J.-C.).

À l'équinoxe l'angle BAC est égal à celui définissant la latitude du lieu B (angles en situation d'alternes-internes, soit I 29), et la connaissance de BC permet de calculer la latitude du lieu en utilisant une table des cordes dont la construction utilise d'autres théorèmes de géométrie de la fin du cycle 4.

La mesure de la Terre

Les arguments que donne Aristote (384-322 avant J.-C.), dans son livre *Du ciel*, pour une forme ronde et de grande dimension de la Terre, ainsi que les estimations rapportées faites par les mathématiciens, montrent que le problème de la mesure de la Terre est fort ancien.

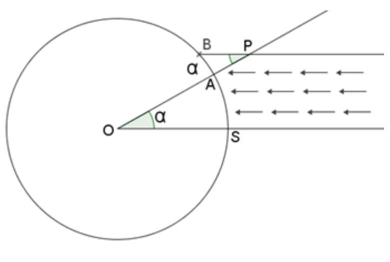
Cléomède (Ie siècle après J.-C.), dans son ouvrage *Le mouvement circulaire des corps célestes* décrit les méthodes utilisées par Ératosthène (276-195 avant J.-C.) et par Posidonius (135-51 avant J.-C.) pour calculer la circonférence de la Terre.

Cléomède décrivant la méthode d'Ératosthène indique qu'elle repose sur cinq considérations :

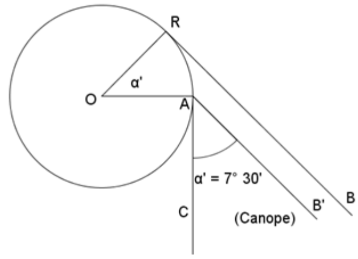
1. Syène et Alexandrie sont sur le même méridien ;
2. La distance des deux lieux est de 5000 stades ;
3. Les rayons issus des différents points du soleil atteignent les différents points de la Terre comme autant de parallèles.
4. Une droite coupant des parallèles donne des angles alternes internes égaux ;
5. Les arcs de cercles mesurant des angles égaux entre eux, sont semblables entre eux.

Nous y retrouvons le théorème I 29. Présentons brièvement les deux méthodes

<table>
<tr>
<td>
Principe de la mesure de la circonférence de la Terre par Ératosthène : mesure de l'angle des rayons du soleil avec la verticale à partir de l'ombre du soleil à Alexandrie à midi le jour où à Syène cette ombre est inexistante.



A : Alexandrie S : Syène
P : sommet du gnomon
APB : angle mesuré égal (angles alternes internes) à l'angle inaccessible AOS qui avec la connaissance de la longueur de l'arc AS (distance de Syène à Alexandrie) va permettre de calculer la circonférence de la Terre
</td>
<td>
Principe de la mesure de la circonférence de la Terre par Posidonius : mesure de l'angle de culmination de l'étoile Canope à Alexandrie alors qu'elle culmine sur l'horizon à Rhodes.



A : Alexandrie
R : Rhodes
B et B' : étoile Canope
RB : horizon à Rhodes (perpendiculaire au rayon terrestre OR)
AC : horizon à Alexandrie (perpendiculaire au rayon terrestre OA).
CAB' : angle mesuré égal (angles à côtés perpendiculaires) à l'angle inaccessible AOR qui avec la connaissance de la longueur de l'arc RA (distance de Rhodes à Alexandrie) va permettre de calculer la circonférence de la Terre
</td>
</tr>
</table>

Dans la méthode de Posidonius ce que nous avons appelé « théorème sur les angles à côtés perpendiculaires » est un anachronisme. Il ne figure pas dans les Éléments d'Euclide. À partir de quand lui a-t-on donné une existence ? La recherche reste à faire. Si l'on s'en tient aux théorèmes des Éléments d'Euclide et à la figure, on peut obtenir l'égalité des deux angles en comparant la somme des angles du triangle rectangle OAD (en appelant D l'intersection du prolongement de B'A avec OR) qui vaut deux droits d'après I 32 et la somme des trois angles de sommet A qui vaut aussi deux droits (alignement de D, A et B'). On pourrait aussi faire intervenir l'angle opposé par le sommet à l'angle COB'.

Szabó donne de bonnes raisons de penser que ces méthodes, et les théorèmes sur lesquels elles s'appuient, sont bien antérieurs à Euclide : ils dateraient d'avant la naissance d'Eudoxe (408-350 avant J.-C.).

Nous venons donc de voir que trois des théorèmes clés sur les angles en classe de cinquième ont été conçus dans la Grèce ancienne pré-euclidienne pour résoudre des problèmes liés à l'astronomie avant de prendre place dans le corpus théorique des Éléments d'Euclide. Et il y en a beaucoup d'autres en particulier ceux des livres III et IV. C'est ce que nous dit le célèbre commentateur des Éléments d'Euclide, Proclus (410-485 après J.-C.) : « L'auteur des Éléments semble donc avoir démontré sciemment un grand nombre de propositions à des fins astronomiques pour nous préparer à cette science ».

Références

EUCLIDE d'Alexandrie (1990). Les Éléments. Vol. 1 Livres I à IV. Traduction et commentaires de B. Vitrac, introduction de M. Caveing., PUF, Paris.

SZABÓ Árpád, MAULA Erkka (1986). Les débuts de l'astronomie, de la géographie et de la trigonométrie chez les Grecs. Vrin, Paris.

SZABÓ Árpád (2000). L'aube des mathématiques grecques. Vrin, Paris.

DECAMP Nicolas et De HOSSON Cécile (2011). Quelques éléments historiques et didactiques sur l'expérience d'Ératosthène, BUP n°937. Sur la Toile :

http://didel.script.univ-paris-diderot.fr/claroline/backends/download.php?url=L2RlY2FtcF9kZUhvc3Nvbl9CVVBvY3QyMDExLnBkZg%3D%3D&cidReset=true&cidReq=FORMCONT_001

Un autre point de vue

La mesure de la Terre par Eratosthène fait l'objet d'un magnifique roman historique écrit en 2003 par Denis Guedj : *Les cheveux de Bérénice*.

Ce voyage dans le royaume de Pharaon, le long du Nil, nous transporte aux côtés du directeur de la Grande Bibliothèque et précepteur de Pharaon. L'aventure scientifique et les intrigues politiques s'entremêlent au point que le lecteur a l'envie d'intervenir réellement pour aider les uns et empêcher les autres.

À lire et à faire détenir par le CDI.

GUEDJ, Denis. *Les Cheveux de Bérénice*. Seuil, 2003

Ru – Bri – COL⤹AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

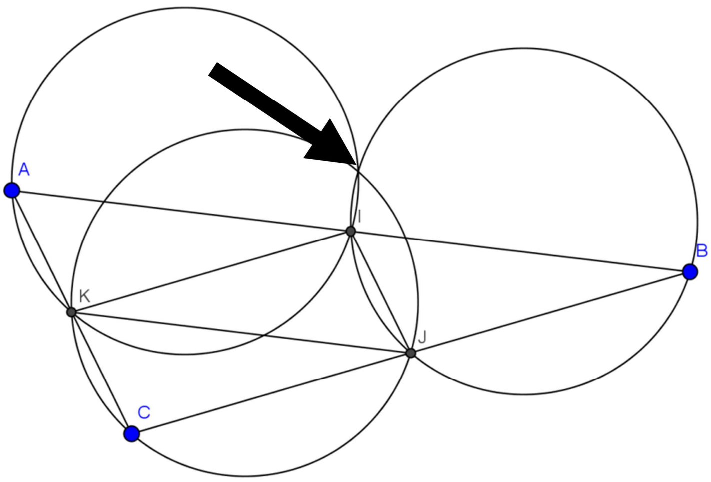
Des problèmes

105-1 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

Calculer la somme de la série : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\ldots$ dans laquelle les termes sont les inverses des entiers positifs dont les seuls facteurs premiers sont des 2 et des 3.

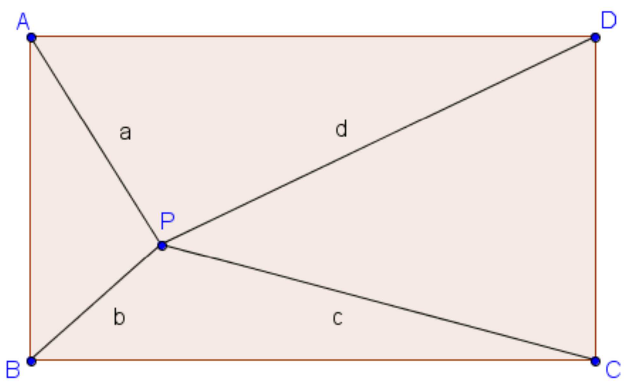
105-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

À partir d'un triangle quelconque ABC et des milieux I, J et K des côtés [AB], [BC] et [CA], on construit trois cercles circonscrits aux triangles AIK, BIJ et CJK. Il semblerait que ces trois cercles aient un point commun. Pourriez-vous l'assurer ?
Si on n'impose plus aux points I, J et K d'être les milieux d'un côté mais simplement d'appartenir à ce côté, les trois cercles correspondants continuent-ils à avoir un point commun ?



105-3 *de Walter Mesnier (Poitiers)* :

Enigme inspirée de celle du calendrier des énigmes 2016 du 13 Mai.
Il s'agissait de calculer la longueur PD = d dans un rectangle ABCD où P est un point intérieur au rectangle, et où PA = a, PB = b et PC = c sont donnés (égaux à 9, 4 et 6).
→ L'étonnante relation $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ permet de répondre. Mais on peut encore creuser. Je propose de modifier les longueurs données et de prolonger le questionnement :



1) On suppose a = 5, b = 1 et c = 5. Démontrer que d = 7 et que l'aire maximale du rectangle est 32.
2) On suppose a = 4, b = 1 et c = 7. Calculer d et l'aire maximale du rectangle.
3) On suppose que a, b et c sont des nombres entiers à un chiffre. Quels triplets peut-on choisir pour que d soit aussi un nombre entier. L'aire maximale du rectangle est-elle alors aussi un nombre entier ?

100-3 *de Frédéric de Ligt* :
Combien de pavés droits différents peut-on former avec 100^{100} cubes identiques ?

Correction de Claude Morin
J'ai relevé une coquille dans la solution à ce problème. Le résultat obtenu est valable pour 10^{100} et pas pour $100^{100} = 10^{200}$. Mais il suffit de changer 51 en 101 et 101×102 en 201×202. On peut d'ailleurs généraliser à 10^n cubes. Le nombre de pavés différents est égal à $\dfrac{\binom{n+2}{2}^2 + 3\left(1+\left[\frac{n}{2}\right]\right)^2}{6}$ ($+\frac{1}{3}$ si 3 divise n) avec $\binom{n+2}{2}$ coefficient binomial et $\left[\frac{n}{2}\right]$ partie entière de $\frac{n}{2}$.

101-2 *de Frédéric de Ligt* :
Métempsychose
« Un jour, passant près de quelqu'un qui maltraitait son chien, on raconte qu'il [Pythagore] fut pris de compassion et qu'il adressa à l'individu ces paroles : "Arrête et ne frappe plus, car c'est l'âme d'un homme qui était mon ami, et je l'ai reconnu en entendant le son de sa voix" » (Diogène Laërce, *Vie et doctrines des philosophes illustres*, VIII, 36).
Depuis le temps de Pythagore la science a fait bien des progrès. On dispose maintenant de statistiques.
Il est établi qu'un humain a deux fois plus de chances de se réincarner en animal plutôt qu'en humain et de même un animal a deux fois plus de chances de se réincarner en humain plutôt qu'en animal.
Si la quatrième réincarnation d'un humain est encore un humain, qu'elle est la probabilité qu'il soit resté humain après sa première réincarnation ?

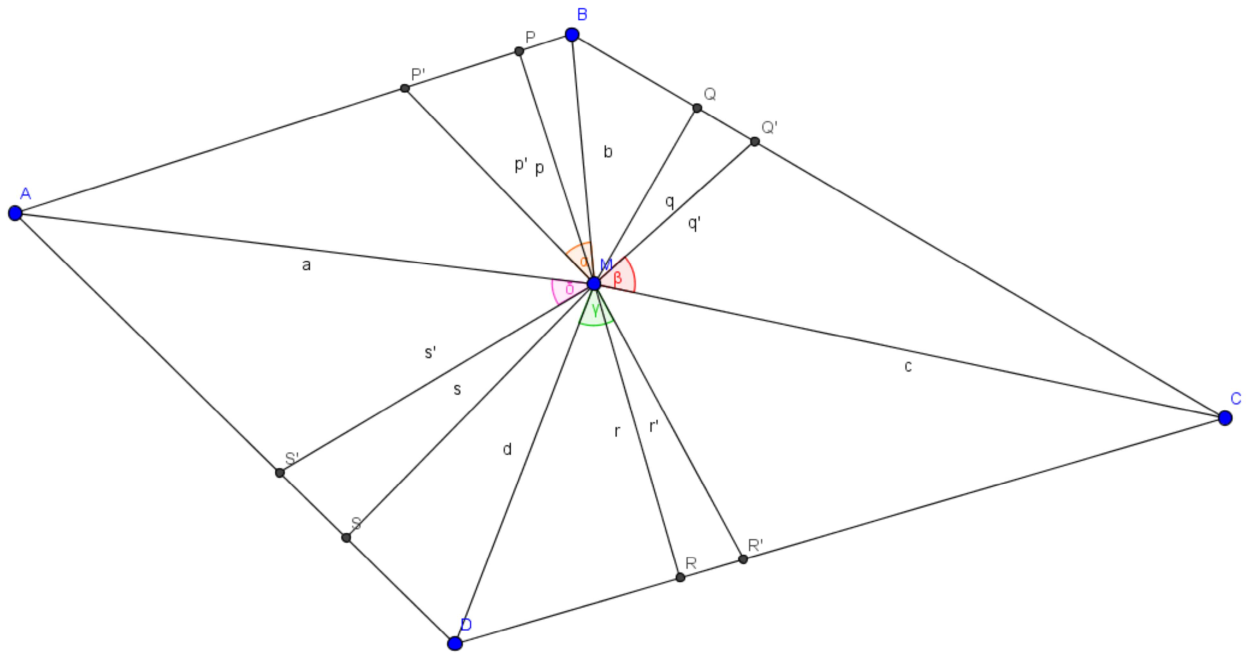
Solution de l'auteur
On peut réaliser un arbre de probabilité. On note H_i quand la ième réincarnation de notre homme est un homme et A_i quand cette ième réincarnation est un animal. Les différentes branches descendantes correspondent aux différentes réincarnations possibles. Ainsi seules 8 possibilités permettent d'aboutir à un homme après quatre réincarnations :
$H_1H_2H_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^4$;
$H_1H_2A_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^2(2/3)^2$;
$H_1A_2H_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^2(2/3)^2$;
$H_1A_2A_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^2(2/3)^2$;
$A_1H_2H_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^2(2/3)^2$;
$A_1H_2A_3H_4$ dont la probabilité vaut $(2/3)^4$;
$A_1A_2H_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^2(2/3)^2$;
$A_1A_2A_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^2(2/3)^2$.
La probabilité de $H_1 \cap H_4$ s'obtient en additionnant les quatre premières probabilités de la liste ci-dessus. On a $(1/3)^4 + 3(1/3)^2(2/3)^2 = 13/81$.
La probabilité de H_4 quant à elle s'obtient en additionnant les huit probabilités ci-dessus. On a $(1/3)^4 + 6(1/3)^2(2/3)^2 + (2/3)^4 = 41/81$.
Finalement $p(H_1/H_4) = p(H_1 \cap H_4)/p(H_4) = 13/41$

102-2 *de Frédéric de Ligt* :
Pour tout point M intérieur à un quadrilatère convexe ABCD, dont on note P, Q, R, S les projetés orthogonaux sur (AB), (BC), (CD), (DA) respectivement, montrer que l'on a l'inégalité :

$$MA + MB + MC + MD \geq \sqrt{2}(MP + MQ + MR + MS)$$

Solution de l'auteur
Il s'agit de l'extension au quadrilatère convexe du fameux théorème d'Erdös-Mordell. La preuve présentée ici s'inspire largement de celle trouvée par Mordell en 1960 (source : Coxeter, H.S.M. *Introduction to geometry. Second edition*, Wiley, 1989, p. 419). Cette extension n'est pas originale puisqu'il a été montré qu'une inégalité de ce type est valable pour tout polygone convexe à *n* côtés à condition de remplacer $\sqrt{2}$ par $\dfrac{1}{\cos(\dfrac{\pi}{n})}$ (inégalité de Fejes-Toth). Cependant toutes les preuves que j'ai pu consulter pour le cas *n* = 4 sont fort complexes. Il me semble que l'identité miraculeuse (qui m'a coûté bien de la peine) introduite à la fin de la démonstration raccourcit notablement celle-ci.

Notations
Pour alléger l'écriture on note *a* = MA ; *b* = MB ; *c* = MC ; *d* = MD ; *p* = MP ; *q* = MQ ; *r* = MR ; *s* = MS ; $\widehat{AMB} = 2\alpha$; $\widehat{BMC} = 2\beta$; $\widehat{CMD} = 2\gamma$; $\widehat{DMA} = 2\delta$. La bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ coupe (AB) en P' ; la bissectrice de $\widehat{BMC}$ coupe (BC) en Q' ; la bissectrice de $\widehat{CMD}$ coupe (CD) en R' ; la bissectrice de $\widehat{DMA}$ coupe (DA) en S'. On note *p'* = MP' ; *q'* = MQ' ; *r'* = MR' ; *s'* = MS'.
Comme le point M est intérieur au quadrilatère on a d'une part que *a*, *b*, *c* et *d* sont strictement positifs et d'autre part que α, β, γ et δ sont strictement inférieurs à l'angle droit.



L'aire du triangle AMB peut ainsi s'écrire $\dfrac{ab\sin 2\alpha}{2}$ ou bien, si l'on considère qu'il est formé de la réunion des triangles AMP' et P'MB, $\dfrac{p'(a+b)\sin\alpha}{2}$. Comme par ailleurs $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, on obtient l'égalité $2ab\cos\alpha = p'(a+b)$. L'inégalité arithmético-géométrique valable ici pour $a,b>0$: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ permet d'écrire $p'(a+b) = 2ab\cos\alpha = 2\sqrt{ab}\sqrt{ab}\cos\alpha \leq (a+b)\sqrt{ab}\cos\alpha$ et donc après simplification d'avoir $\sqrt{ab}\cos\alpha \geq p'$, mais il est clair que $p' \geq p$ et donc $\sqrt{ab}\cos\alpha \geq p$. On montre de même que $\sqrt{bc}\cos\beta \geq q$, $\sqrt{cd}\cos\gamma \geq r$ et $\sqrt{da}\cos\delta \geq s$. D'où l'inégalité :

$$a+b+c+d-\sqrt{2}(p+q+r+s)\geq a+b+c+d-\sqrt{2}(\sqrt{ab}\cos\alpha+\sqrt{bc}\cos\beta+\sqrt{cd}\cos\gamma+\sqrt{da}\cos\delta)$$

Mais le membre de droite peut se mettre sous la forme (un développement permet de s'en convaincre) :

$$[(\sqrt{2a}-\cos\alpha\sqrt{b}-\cos\delta\sqrt{d})^2+(\sqrt{2c}-\cos\beta\sqrt{b}-\cos\gamma\sqrt{d})^2+(\sin\alpha\sqrt{b}-\sin\delta\sqrt{d})^2+(\sin\beta\sqrt{b}-\sin\gamma\sqrt{d})^2]/2$$

Il faut noter que l'expression $(\cos\alpha\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta+\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)$ vaut toujours 0 car $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ et donc $\cos(\alpha+\delta)=-\cos(\beta+\gamma)$. Il est clair que cette dernière demi-somme de carrés est toujours positive ou nulle. Finalement on a bien l'inégalité $a+b+c+d\geq\sqrt{2}(p+q+r+s)$ avec égalité quand le quadrilatère est un carré et que le point M est en son centre.

103-1 *de Frédéric de Ligt* :

Passe-t-on si facilement de 15 à 16 ?

Il n'est pas aisé, sur l'intervalle [0 ; 1], de faire la distinction entre les représentations graphiques des fonctions f_{15} et f_{16} définies par $f_{15}(t)$ = 15^{-t} et $f_{16}(t)$ = 16^{-t}. Pourtant l'outil informatique semble indiquer que les suites $(f_{15}^{n}(0))_{n\geq1}$ et $(f_{16}^{n}(0))_{n\geq1}$ n'ont pas le même comportement. Qu'en est-il ?
(f_{15}^{n} et f_{16}^{n} désignent les nièmes itérées des fonctions f_{15} et f_{16} avec f_{15}^{1} = f_{15} et f_{16}^{1} = f_{16}).

Complément de Claude Morin

Pour compléter la solution (qui est très bien) de ce problème parue dans le précédent numéro, on peut introduire l'unique point fixe que je note L (car si la suite (u_n) converge c'est vers ce L). Quel que soit u_0 les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers L_1 et L_2 (car elles sont monotones, bornées, la fonction f^{2} étant croissante de]0 ; 1[dans]0 ; 1[. Il y a alors deux cas selon que L est un point fixe répulsif ou non.

Premier cas : $|f'(L)| > 1$ qui est équivalent à $\ln(L) < -1$ ou encore $a > e^e$. On montre alors avec la définition de la convergence d'une suite et l'égalité des accroissements finis appliquée à $f(u_n) - f(L)$ que si la suite (u_n) converge alors u_0 = L. Par suite, si u_0 est différent de L alors L_1 est différent de L_2.

Deuxième cas : $|f'(L)| \leq 1$ qui est équivalent à $a \leq e^e$. L_1 et L_2 sont solutions de $f^{2}(x) = x$ qui peut s'écrire $g(x) = 0$ avec $g(x) = \ln(\ln a) - x\ln(a) - \ln(-\ln(x))$. Le calcul de $g'(x)$ conduit à l'étude de $h(x) = x\ln(x)$ qui donne aisément $-1/h(x) \geq e$ d'où $g'(x) \geq e - \ln(a) \geq 0$. La fonction g est donc croissante (et même strictement). Puisque $g(L) = 0$ on déduit que g ne s'annule qu'en L et donc dans ce deuxième cas $L_1 = L_2 = L$. La suite (u_n) converge vers L pour tout u_0.

104-3 *de Frédéric de Ligt* :

Existe-t-il une suite d'entiers naturels non nuls contenant **tous** les entiers naturels non nuls, exactement une fois chacun, et telle que la moyenne arithmétique de ses k premiers termes pour k = 1, 2, ... donne toujours un résultat entier ?

Solution de Jean-Matthieu Bernat et Pascal Heimburger

Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite en question et (M_n) la suite des moyennes soit $M_n=\frac{u_1+u_2+...+u_n}{n}$. On va déterminer une relation entre u_{n+1}, M_n et M_{n+1}.

$$M_{n+1}=\frac{u_1+u_2+...+u_n+u_{n+1}}{n+1}=\frac{u_1+u_2+...+u_n}{n+1}+\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{n}{n+1}M_n+\frac{u_{n+1}}{n+1}$$

Ainsi $(n+1)M_{n+1}=nM_n+u_{n+1}$ soit $u_{n+1}=n(M_{n+1}-M_n)+M_{n+1}$.

On va alors s'arranger pour que $M_{n+1}=M_n$ ou $M_{n+1}=M_n+1$, ceci pour tout entier n non nul de sorte que la suite (M_n) est croissante et contient tous les entiers (mais pas de manière unique !). On construit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

$u_1 = 1$ et donc $M_1 = 1$;

si $M_n \notin \{u_k, 1 \le k \le n\}$ (1), $u_{n+1} = M_n$ et dans ce cas $M_{n+1} = M_n$;

si $M_n \in \{u_k, 1 \le k \le n\}$, $u_{n+1} = n+1+M_n$ ce qui donne $M_{n+1} = M_n + 1$.

Puisque $M_{n+1} = M_n$ ou $M_{n+1} = M_n + 1$, on est sûr de faire apparaître tous les entiers avec (1). Reste à prouver que chaque entier n'apparaît qu'une fois.

Petite récurrence :

Soit P_n : « Tous les u_i pour $1 \le i \le n$ sont distincts deux à deux »

P_3 est clairement vraie.

On suppose P_n vraie ($n \ge 3$) alors

soit $u_{n+1} = M_n$ et dans ce cas P_{n+1} est vraie ;

soit $u_{n+1} = n+1+M_n \ge 5$.

Supposons qu'il existe un indice $k < n+1$ tel que $u_{n+1} = u_k$, ($k > 2$), alors

soit $u_k = M_{k-1}$, ($k > 2$), et dans ce cas $M_{k-1} = n+1+M_{n+1}$ ce qui est absurde car $M_{n+1} \ge M_{k-1}$;

soit $u_k = k + M_{k-1}$ ce qui donne $k + M_{k-1} = n+1+M_n$, absurde car $M_n \ge M_{k-1}$ et $n+1 > k$.

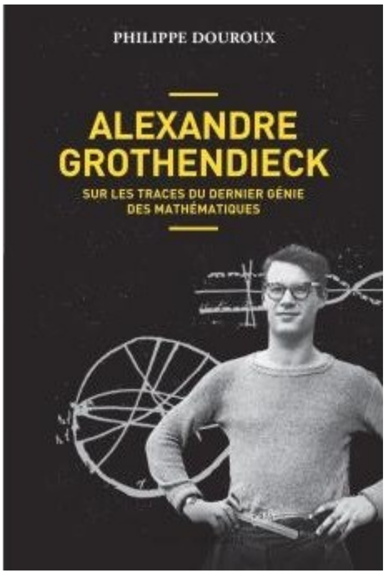
Ainsi P_{n+1} est vraie, ce qui achève la démonstration. Ci-dessous un calcul des u_n et M_n pour $1 \le n \le 100$.

n	u_n	M_n	n	u_n	M_n	n	u_n	M_n	n	u_n	M_n
1	1	1	26	42	17	51	82	32	76	47	47
2	3	2	27	17	17	52	84	33	77	124	48
3	2	2	28	45	18	53	33	33	78	126	49
4	6	3	29	18	18	54	87	34	79	49	49
5	8	4	30	48	19	55	34	34	80	129	50
6	4	4	31	50	20	56	90	35	81	131	51
7	11	5	32	20	20	57	92	36	82	51	51
8	5	5	33	53	21	58	36	36	83	134	52
9	14	6	34	55	22	59	95	37	84	52	52
10	16	7	35	22	22	60	97	38	85	137	53
11	7	7	36	58	23	61	38	38	86	139	54
12	19	8	37	23	23	62	100	39	87	54	54
13	21	9	38	61	24	63	39	39	88	142	55
14	9	9	39	63	25	64	103	40	89	144	56
15	24	10	40	25	25	65	105	41	90	56	56
16	10	10	41	66	26	66	41	41	91	147	57
17	27	11	42	26	26	67	108	42	92	57	57
18	29	12	43	69	27	68	110	43	93	150	58
19	12	12	44	71	28	69	43	43	94	152	59
20	32	13	45	28	28	70	113	44	95	59	59
21	13	13	46	74	29	71	44	44	96	155	60
22	35	14	47	76	30	72	116	45	97	60	60
223	37	15	48	30	30	73	118	46	98	158	61
24	15	15	49	79	31	74	46	46	99	160	62
25	40	16	50	31	31	75	121	47	100	62	62

Prolongement proposé : La suite est-elle unique ?

On nous écrit

Alexandre Grothendieck



« Ici, les livres on ne les lit pas, on les écrit ! » page 132.

« Tout enseignement est castrateur, tout discours vain, qui ne s'adresse à des êtres dont la curiosité ne soit en éveil. » page 223.

« Grothendieck indique la voie à suivre, les autres peuvent tracer la route à la pelle et à la pioche. » page 172.

Quelques citations extraites de l'ouvrage de Philippe Douroux : *ALEXANDRE GROTHENDIECK, sur les traces du dernier génie des mathématiques* paru chez Allary Editions en janvier 2016.

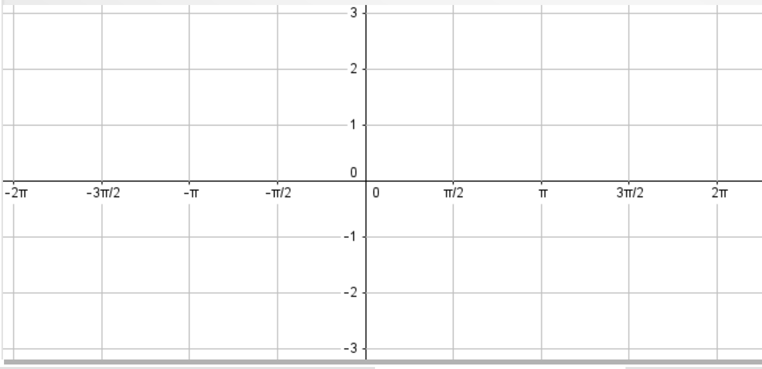
Pour l'histoire de son enfance de réfugié, de sa vie de mathématicien hors norme et de ses rapports souvent difficiles avec ses contemporains, pour les raisons de son retrait de la vie publique et de son isolement en Ariège, pour le chapitre sur les 42 types de preuves en mathématiques, un livre passionnant qui se lit d'une seule traite.

J.-M. Parnaudeau

Sérieux s'abstenir !

On cherche un exercice de géométrie, bon ...
On tombe sur une forme $f(x)=\sin(3x)/\sin(x)$. C'est intrigant ! Vite une HP 50g pour un graphique : une courbe pas mal. On essaie, par curiosité, $g(x)=\cos(3x)/\cos(x)$. Surprise en voyant les deux courbes réunies ! On essaie $h(x)=f(x)-g(x)$, ... le graphique, c'est bien ça !
Soyons sérieux, passons à l'étude des fonctions f, g et h pour retrouver ce que la HP nous a tracé. Oui, mais des formules de trigo et quelques points délicats à régler. Pourquoi pas ? Chercher et trouver - même des choses très simples - c'est un passe-temps pour un vieil amateur. Alors ...

S. Parpay



Pour les vacances, nous vous fournissons déjà le repère à compléter sur la plage.

APMEP, IREM Bâtiment de mathématiques
Téléport 2—BP30179
Bd Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope CHASSENEUIL CEDEX

Site : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. apmep.poitiers@free.fr
Tél. 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication
S. Dassule-Debertonne
Comité de rédaction
F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne, J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon, J. Michel
Imprimerie
IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie
86962 Chasseneuil CEDEX

Éditeur
APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Siège Social
IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie
86962 Chasseneuil CEDEX
Dépôt légal
Juillet 2016