Ru – Bri – COLLAGE

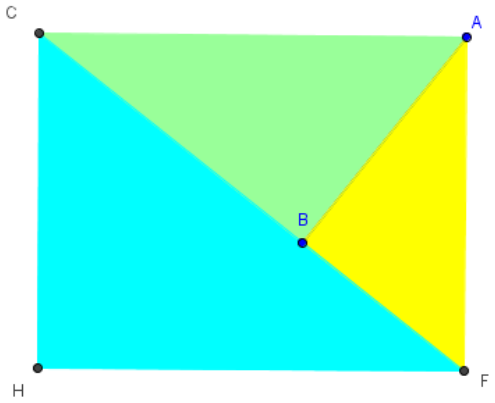
Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

104-1 *de Jean-Paul Guichard (Parthenay)* :
Puzzle à 3 pièces
Le rectangle est constitué de 3 triangles rectangles tels que AF = BC. Sauriez-vous le construire ?



104-2 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :
Exercice extrait des « Premiers éléments de géométrie » par Ch. Vaquant et A. Macé de Lépinay - Masson (1914)
On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] et dont les diagonales se coupent en O ; connaissant les côtés a et b des carrés respectivement équivalents aux triangles AOB et COD, calculer le côté c du carré équivalent au trapèze tout entier.

104-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Existe-t-il une suite d'entiers naturels non nuls contenant **tous** les entiers naturels non nuls, exactement une fois chacun, et telle que la moyenne arithmétique de ses k premiers termes pour k = 1, 2, … donne toujours un résultat entier ?

104-4 *de Walter Mesnier (Poitiers)* :
Dans une classe de 34 élèves quelle est la probabilité qu'il y ait un mois de l'année où aucun élève n'ait d'anniversaire ?
On suppose, pour simplifier, que tous les mois de l'année ont le même nombre de jours et que, pour les dates de naissance, tous les mois de l'année sont équiprobables.

Des solutions

100-1 *de Frédéric de Ligt* :
La série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge. Mais qu'en est-il de la série harmonique incomplète $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ où A est l'ensemble des entiers naturels qui ne contiennent pas la séquence 100 dans leur écriture décimale.

Solution de Jean-Christophe Laugier

Voici une démonstration qui évite de dénombrer A_n, ensemble des éléments de A dont l'écriture décimale comporte n+1 chiffres. Soit B l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture en base 1000 ne comporte pas le « chiffre » 100. Alors $A \subseteq B$; l'inclusion est d'ailleurs stricte, puisque, par exemple 31004 $\in$ B et 31004 $\notin$ A.

D'où $\sum_{n\in A}\frac{1}{n} \le \sum_{n\in B}\frac{1}{n}$ et $\sum_{n\in B}\frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{n\in B,(10^3)^i\le n<(10^3)^{i+1}}\frac{1}{n}\right) \le \sum_{i=0}^{+\infty}\left(10^3-2\right)\frac{(10^3-1)^i}{(10^3)^i} = 998\times 1000 = 998000$.

Par conséquent $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ est convergente.

On peut généraliser ce qui précède : soit *s* une séquence quelconque de chiffres ; la série $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$, A étant l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture décimale ne contient pas *s* est convergente.

De manière analogue, on peut donner une preuve du fameux théorème du « singe dactylographe » : un singe tape, indéfiniment, sur un clavier d'une machine à écrire et produit ainsi un « texte » infini. Alors, la probabilité qu'un texte fini donné, arbitrairement long, apparaisse au cours de cette errance dactylographique est égale à 1 !

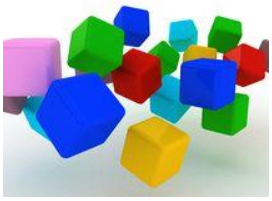
Plus formellement, soit un alphabet $\mathcal{A}$ constitué de *k* lettres ou symboles distincts ; soit $\mathcal{M} \in \mathcal{A}^*$ (ensemble des mots construits sur $\mathcal{A}$), de longueur *p* et soit $(X_n)_{n\ge 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathcal{A}$ et uniformément distribuées sur $\mathcal{A}$. Alors l'évènement E : « la suite (X_1, X_2, ...) contient au moins une occurrence de $\mathcal{M}$ » est presque sûr. Soit, en effet, E_i l'évènement : « (X_1, X_2, ...) contient une occurrence de $\mathcal{M}$ au rang *i*, c'est-à-dire $X_iX_{i+1}...X_{i+p-1} = \mathcal{M}$ ». Alors $E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ d'où $\overline{E} = \bigcap_{i=1}^{+\infty}\overline{E_i} \subseteq \bigcap_{u=0}^{+\infty}\overline{E_{1+up}}$ et

$$P(\overline{E}) \le P\left(\bigcap_{u=0}^{+\infty}\overline{E_{1+up}}\right) = \lim_{u\to+\infty} P(\overline{E_1}\cap\overline{E_{p+1}}\cap...\cap\overline{E_{up+1}}) = \lim_{u\to+\infty} P(\overline{E_1})\times P(\overline{E_{p+1}})\times...\times P(\overline{E_{up+1}}) = \lim_{u\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{k}\right)^p\right)^{u+1} = 0$$

On a donc bien P(E) = 1.

100-3 *de Frédéric de Ligt* :

Combien de pavés droits différents peut-on former avec 100^{100} cubes identiques ?



Solution de l'auteur

Un diviseur *d* quelconque de 100^{100} est de la forme 2^n5^m avec *n* et *m* des entiers naturels inférieurs ou égaux à 100. Ce diviseur *d* possède lui-même (*n* + 1)(*m* + 1) diviseurs. Il y a donc

$$\sum_{n,m=0}^{100}(n+1)(m+1) = \sum_{n=0}^{100}\sum_{m=0}^{100}(n+1)(m+1) = \left(\frac{101\times 102}{2}\right)^2$$ triplets (*a*, *b*, *c*) tels que *abc* = 100^{100}.

On ne peut y trouver de triplets de la forme (*a*, *a*, *a*) car 100 n'est pas divisible par 3.

Pour le décompte des pavés droits, les triplets de la forme (*a*, *a*, *b*), (*a*, *b*, *a*), (*b*, *a*, *a*) avec *a* différent de *b* ne doivent être comptés qu'une seule fois et cela correspond au nombre de boîtes différentes ayant 2 faces carrées. Il y en a autant que de nombres de la forme $(2^p5^q)^2$ avec *p* et *q* des entiers naturels inférieurs ou égaux à 50, c'est-à-dire 51^2.

Toujours dans ce décompte des pavés droits, les 6 triplets (*a*, *b*, *c*), (*b*, *a*, *c*), (*c*, *b*, *a*), (*a*, *c*, *b*), (*b*, *c*, *a*) et (*c*, *a*, *b*), avec *a*, *b* et *c* différents deux à deux, ne doivent être comptés qu'une seule fois et cela correspond au nombre de boîtes n'ayant aucune face carrée.

Il y en a $((101\times102/2)^2 - 3\times51^2)/6$. On a donc au total $((101\times102/2)^2 - 3\times51^2)/6 + 51^2$ = 4 423 434 boîtes différentes formées de 100^{100} cubes identiques.

101-3 *de Jacques Chayé* :

Jacques Chayé signale avec raison qu'une erreur, qui n'est pas de son fait, s'est glissée dans la retranscription de sa solution au problème 101-3, parue dans la Rubricollage du précédent Corol'aire : « A la deuxième ligne de la remarque, c'est une égalité entre produits de distances et non pas de mesures algébriques qui aurait dû être écrite : IA'×IC'=IB'×ID'*. C'est précisément l'intérêt des mesures algébriques qui permettent de formuler des conditions nécessaires et suffisantes. »*
Avec toutes les excuses de la rédaction pour cette étourderie.

102-1 *de Jacques Chayé* :

Un exercice du baccalauréat de 1894 (Clermont-Section Lettres-Mathématiques)

On donne, dans un triangle rectangle, la somme L de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante, et la surface K^2. Calculer les trois côtés du triangle. Discussion.

Solution de l'auteur

Soient a, b, c et h les longueurs respectives des côtés de l'angle droit ($a \geq b$), de l'hypoténuse et de la hauteur. Les hypothèses s'écrivent c × h = $2K^2$ et c + h = L. Les deux nombres dont la somme est L et le produit $2K^2$ sont les racines du polynôme en x : $x^2 - Lx + 2K^2$ dont le discriminant est $L^2 - 8K^2$. A condition que $L \geq 2\sqrt{2}K$, les nombres convenables sont donc :

$$\begin{cases} c = \dfrac{L+\sqrt{L^2-8K^2}}{2} \\ h = \dfrac{L-\sqrt{L^2-8K^2}}{2} \end{cases}$$

Or, par hypothèse, a × b = c × h et $a^2 + b^2 = c^2$ ou encore $(a + b)^2 = c^2 + 4K^2$. On est amené à résoudre :

$$\begin{cases} a \times b = 2K^2 \\ a+b = \sqrt{c^2+4K^2} \end{cases}$$

On cherche donc les racines du polynôme en x : $x^2 - \sqrt{c^2+4K^2}\,x + 2K^2$ dont le discriminant est $c^2 + 4K^2 - 8K^2 = c^2 - 4K^2$; ce discriminant est positif à condition que $c \geq 2K$ c'est-à-dire $L+\sqrt{L^2-8K^2} \geq 4K$, soit encore L ≥ 3K. Puisque $a \geq b$, le système équivaut à :

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{c^2+4K^2}+\sqrt{c^2-4K^2}}{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{c^2+4K^2}-\sqrt{c^2-4K^2}}{2} \end{cases}$$

En résumé, à condition que L ≥ 3K, il existe un triangle rectangle et un seul répondant à la question ; ses côtés vérifient :

$$c = \frac{L+\sqrt{L^2-8K^2}}{2} ; \; a = \frac{\sqrt{c^2+4K^2}+\sqrt{c^2-4K^2}}{2} ; \; b = \frac{\sqrt{c^2+4K^2}-\sqrt{c^2-4K^2}}{2}$$

103-1 *de Frédéric de Ligt* :

Passe-t-on si facilement de 15 à 16 ?

Il n'est pas aisé, sur l'intervalle [0 ; 1], de faire la distinction entre les représentations graphiques des fonctions f_{15} et f_{16} définies par $f_{15}(t) = 15^{-t}$ et $f_{16}(t) = 16^{-t}$. Pourtant l'outil informatique semble indiquer que les suites $(f_{15}^n(0))_{n\geq 1}$ et $(f_{16}^n(0))_{n\geq 1}$ n'ont pas le même comportement. Qu'en est-il ?

(f_{15}^n et f_{16}^n désignent les nièmes itérées des fonctions f_{15} et f_{16} avec $f_{15}^1 = f_{15}$ et $f_{16}^1 = f_{16}$).

Solution de l'auteur

On va faire l'étude plus générale du comportement des suites $(f_a^n(0))_{n\geq 0}$ où f_a est la fonction, de paramètre réel $a > 1$, définie sur [0 ; 1] par $f_a(t) = a^{-t}$. (f_a^0 désigne la fonction identité).

Tout d'abord :

f_a est stable sur l'intervalle [0 ; 1], et même mieux $f_a([0;1]) \subset]0;1]$.

Preuve. $f_a(t) = e^{-t\mathrm{Ln}a}$ avec $\mathrm{Ln}a > 0$ et $t \in [0;1]$. Par conséquent $f_a(t) \in [\frac{1}{a}; 1] \subset]0 ; 1]$.

A partir de cette observation on établit facilement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n on a $f_a^n(0) \in]0 ; 1]$.

$(f_a^{2n}(0))_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante.

Preuve par récurrence. $f_a^2(0) = \frac{1}{a} > f_a^0(0) = 0$.

On suppose que pour un entier n on a l'inégalité stricte $f_a^{2n+2}(0) > f_a^{2n}(0)$. La fonction f_a^2 est strictement croissante sur [0 ; 1] car le calcul de sa dérivée donne $f_a^{2\prime}(t) = f_a^2(t)a^{-t}\mathrm{Ln}^2 a > 0$ pour $t \in [0 ; 1]$. Par conséquent $f_a^{2n+4}(0) = f_a^2(f_a^{2n+2}(0)) > f_a^2(f_a^{2n}(0)) = f_a^{2n+2}(0)$.

$(f_a^{2n+1}(0))_{n\geq 0}$ est une suite strictement décroissante.

Preuve par récurrence. $f_a^3(0) = f_a(f_a^2(0)) = f_a(\frac{1}{a}) = a^{-\frac{1}{a}} = e^{-\frac{\mathrm{Ln}a}{a}} < f_a(0) = 1$.

On suppose que pour un entier n on a l'inégalité stricte $f_a^{2n+3}(0) < f_a^{2n+1}(0)$. La stricte croissance de f_a^2 sur [0 ; 1] entraîne que $f_a^{2n+5}(0) = f_a^2(f_a^{2n+3}(0)) < f_a^2(f_a^{2n+1}(0)) = f_a^{2n+3}(0)$.

Les deux suites $(f_a^{2n}(0))_{n\geq 0}$ et $(f_a^{2n+1}(0))_{n\geq 0}$ sont bornées et monotones, elles convergent donc toutes deux. On a par ailleurs l'inégalité stricte suivante :

$f_a^{2n}(0) < f_a^{2n+1}(0)$ pour tout entier naturel n.

Preuve par récurrence. $f_a^0(0) = 0 < f_a^1(0) = 1$.

On suppose que pour un entier n on a l'égalité stricte $f_a^{2n}(0) < f_a^{2n+1}(0)$. La stricte croissance de f_a^2 sur [0 ;1] entraîne que $f_a^{2n+2}(0) = f_a^2(f_a^{2n}(0)) < f_a^2(f_a^{2n+1}(0)) = f_a^{2n+3}(0)$.

Si on note c la limite de la suite $(f_a^{2n}(0))_{n\geq 0}$ et d celle de la suite $(f_a^{2n+1}(0))_{n\geq 0}$, on a donc les inégalités :

$$0 < c \leq d < 1.$$

Pour que la suite $(f_a^n(0))_{n\geq 0}$ converge il faut et il suffit que $c = d$. A partir de l'égalité $f_a^{2n+1}(0) = f_a(f_a^{2n}(0)) = a^{-f_a^{2n}(0)}$, la continuité de la fonction f_a permet d'obtenir l'égalité :

$$d = a^{-c} \quad (1)$$

De même à partir de l'égalité $f_a^{2n+2}(0) = f_a(f_a^{2n+1}(0)) = a^{-f_a^{2n+1}(0)}$ et on obtient l'égalité :

$$c = a^{-d} \quad (2)$$

On raisonne maintenant par l'absurde et on suppose qu'il existe un réel r tel que $c = rd$ avec $0 < r < 1$.

L'égalité (1) s'écrit alors $d = a^{-rd}$ et l'égalité (2) s'écrit $rd = a^{-d}$. On tire alors $d^{1/r} = a^{-d} = rd$ puis $r = d^{\frac{1-r}{r}}$ et enfin $d = r^{\frac{r}{1-r}}$. Par ailleurs $c = rd = r^{\frac{r}{1-r}+1} = r^{\frac{1}{1-r}}$, d'où l'expression de a en fonction seulement de r tirée de $a = d^{-\frac{1}{c}}$:

$$a = (r^{\frac{r}{r-1}})^{r^{\frac{1}{r-1}}}$$

On va étudier la fonction *F* définie sur l'intervalle]0 ; 1[par $F(r) = (r^{\frac{r}{r-1}})^{r^{\frac{1}{r-1}}}$.

La fonction *F* est strictement décroissante.

Preuve. Le calcul de la dérivée de *F* peut alors se mettre sous la forme :

$$F'(r) = \frac{F(r)r^{\frac{1}{r-1}}}{(1-r)^3}\left(r\mathrm{Ln}^2 r - (1-r)^2\right).$$

Le facteur $\frac{F(r)r^{\frac{1}{r-1}}}{(1-r)^3}$ est strictement positif sur]0 ; 1[. On étudie donc le signe de l'expression $h(r) = r\mathrm{Ln}^2 r - (1-r)^2$ sur]0 ; 1[.

On a successivement $h'(r) = 2(1 - r) + 2\mathrm{Ln}r + \mathrm{Ln}^2 r$ et $h''(r) = \frac{2}{r}(\mathrm{Ln}r - r + 1)$.

Comme la tangente en 1 à la courbe représentative de la fonction Ln est toujours placée au-dessus de celle-ci en raison de la concavité de la fonction Ln, alors $\mathrm{Ln}r - r + 1$ prend toujours des valeurs strictement négatives sur]0 ; 1[, de même que *h*". La fonction *h*' est donc strictement décroissante sur]0 ; 1[. Comme $\lim_{r\to 1^-} h'(r) = 0$ alors *h*' est strictement positive sur]0 ; 1[. La fonction *h* est donc strictement croissante sur]0 ; 1[. Comme $\lim_{r\to 1^-} h(r) = 0$ alors *h* est strictement négative sur]0 ; 1[et finalement il en va de même pour la fonction *F* '.

La fonction *F* est bijective de]0 ; 1[dans $]e^e;+\infty[$.

Preuve. La fonction *F* est continue et strictement décroissante sur]0 ; 1[.

$\lim_{r\to 1^-} r^{\frac{r}{r-1}} = \lim_{r\to 1^-} e^{\frac{r}{r-1}\mathrm{Ln}r} = \lim_{r\to 1^-} e^{r\frac{\mathrm{Ln}r - \mathrm{Ln}1}{r-1}} = e$; $\lim_{r\to 1^-} r^{\frac{1}{r-1}} = e$. Par conséquent $\lim_{r\to 1^-} F(r) = e^e$.

D'autre part $\lim_{r\to 0^+} (r^{\frac{r}{r-1}})^{r^{\frac{1}{r-1}}} = \lim_{r\to 0^+} (r^{-r})^{r^{-1}} = \lim_{r\to 0^+} r^{-r\times\frac{1}{r}} = \lim_{r\to 0^+} r^{-1} = +\infty$.

Selon l'hypothèse faite, la valeur du réel *a* doit donc être strictement supérieure à e^e. En conséquence si on a $1 < a \le e^e$, et puisque les réels *c* et *d* existent on a nécessairement *c* = *d* et la suite $(f_a^n(0))_{n\ge 0}$ converge.

En revanche si $a > e^e$ il existe deux réels *c* et *d* tels que 0 < *c* < *d* < 1, les deux suites $(f_a^{2n}(0))_{n\ge 0}$ et $(f_a^{2n+1}(0))_{n\ge 0}$ convergent vers deux valeurs distinctes et donc la suite $(f_a^n(0))_{n\ge 0}$ ne converge pas.

Il se trouve que l'on a les inégalités 15 < e^e < 16, d'où le résultat final, que la représentation graphique ne laissait pas prévoir, à savoir : $(f_{15}^n(0))_{n\ge 1}$ converge et $(f_{16}^n(0))_{n\ge 1}$ ne converge pas.

En utilisant un grapheur-solveur on peut obtenir les précisions suivantes : $\lim_{n\to+\infty} f_{15}^n(0) \approx 0,3686$ à partir de l'équation $f_{15}(t) = t$; $\lim_{n\to+\infty} f_{16}^{2n}(0) = 0,25$ et $\lim_{n\to+\infty} f_{16}^{2n+1}(0) = 0,5$ à partir de l'équation $f_{16}^2(t) = t$ qui admet trois solutions sur]0 ; 1[, 0,3643... qui est la solution de $f_{16}(t) = t$ et qui ne peut donc être retenue puisque $(f_{16}^n(0))_{n\ge 1}$ ne converge pas, 0,25 et 0,5 qui sont des solutions exactes comme on peut le vérifier. On peut aussi écrire un petit programme qui donne les termes successifs des suites définies par récurrence : $a_{n+1} = 15^{-a_n}$ avec a_0= 0 et $b_{n+1} = 16^{-b_n}$ avec b_0 = 0.