Histoire d’angles

IREM de Poitiers, groupe collège

Comment noter un angle ? D’où viennent nos théorèmes sur les angles ? Peut-on calculer sur des angles sans utiliser les degrés ? Avec quels instruments les hommes ont-ils mesuré les angles ? Voici des questions que l’histoire des mathématiques peut éclairer, nous aidant ainsi à faire des choix plus motivés.

Épisode 1 : La notation des angles géométriques

(Une partie de cet article est déjà parue dans Corol’aire n°37.)

En géométrie élémentaire il n’y a pas, comme en algèbre, une nécessité impérieuse d’utiliser des symboles pour améliorer l’efficacité des procédures. Une grande partie des raisonnements passe toujours par le discours.
Ce sont en fait les progrès de l’algèbre qui ont amené l’utilisation de plus en plus systématique de symboles dans la partie calculatoire de la géométrie, ou dans l’écriture des données. En voici deux exemples relativement récents.

- Dans le *Lebossé & Hemery* 2[e] (1960) :

  « Si OM est la bissectrice de l’angle AOB on peut écrire : $\widehat{AOM} = \widehat{MOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.
- Dans un sujet de BEPC de 1951 :
  « Déterminer la valeur de l’angle AMB… Comparer les angles ODM et DMH… Soit D le point de PY tel que : $\widehat{PCD} = \widehat{PBA}$ …»

Hadamard, dans ses *Leçons de Géométrie Elémentaire* (1922), écrit : « On désigne un angle par la lettre de son sommet, placée entre deux autres lettres qui désignent ses côtés, et surmontée souvent d’un signe spécial ». Souvent, pas toujours…
De fait la plupart des mathématiciens jusqu’au XX[e] siècle, qu’il s’agisse de Descartes (1637), de Taylor (1759), de Legendre (1813), de Hoüel (1867)… écrivent «l’angle ABC». De même pour les manuels et les sujets d’examens, même relativement récents, comme en témoignent ces extraits du BEPC de 1970 : « Calculer tg AED et en déduire la valeur approchée de l’angle AED à une minute près par excès »… « Montrer que MB est la bissectrice de l’angle ABP. En déduire la mesure en degrés des angles en A et en B du triangle APB ».
On trouve parfois chez certains auteurs une abréviation comme Angl. ABC (!) chez Legendre (1794), Wkl DOQ chez A.von Frank (angle se dit “Winkel” en allemand).

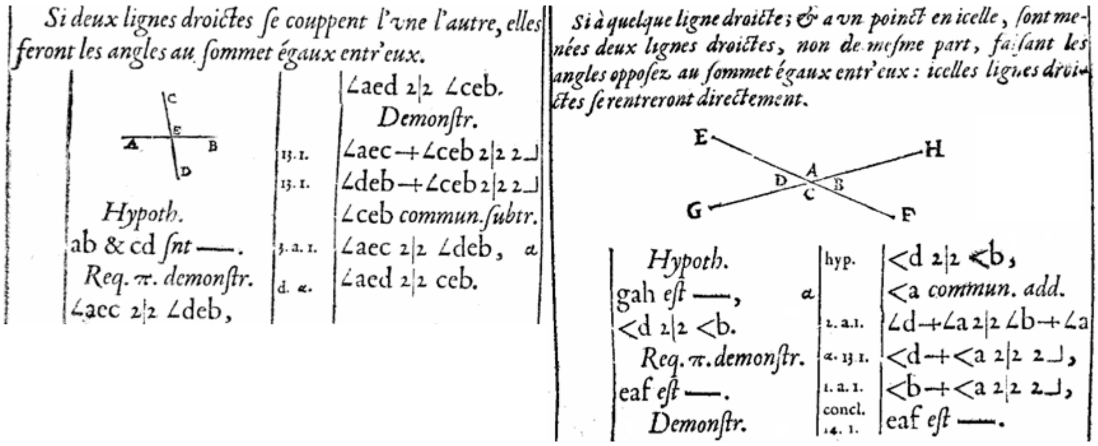
Ce qui est intéressant c’est de savoir qu’actuellement il n’y a pas de notation unifiée mais coexistent 3 notations :

1) $\widehat{ABC}$ en usage chez nous et d’origine française (Carnot, *Géométrie de Position* 1803). Elle ne figure pas dans les polices de Word, ce qui avait amené un collègue de l’APMEP (André Guillemot) à créer un logiciel “amath” qui permettait de la mettre en œuvre. Sous Word on ne peut la réaliser qu’avec l’éditeur d’équation, en utilisant l’option accentuation !
2) $\angle$ ABC en usage chez les anglo-saxons et d’origine anglaise (Oughtred Trigonometria 1657) : c’était le seul symbole disponible dans l’éditeur d’équation de Word, ainsi que dans la police mathématique Symbol ! Il a l’avantage, comme les parenthèses par rapport au surlignage, comme le symbole %, comme le signe / pour les fractions, de rester “en ligne”.
3) $\sphericalangle$ ABC en usage en Allemagne et aux États Unis, d’origine allemande (Spitz 1862, Hilbert Les fondements de la géométrie 1899). Il faisait partie des trois symboles

d’angles de la police mathématique Maths C de Word, avec ∠, et leur mixte. Ils ne sont plus disponibles dans les polices actuelles de Word en français !

En fait ces trois notations ne sont que des variantes des pictogrammes < ABC et ∠ ABC créés en 1634 par le français Hérigone, qui bien qu’en usage aux XVII^e et XVIII^e siècles (ils figurent à l’article “Caractère” de *L’Encyclopédie* de Diderot et d’Alembert de 1784), vont rapidement se trouver en compétition avec les symboles < et > introduits à la même époque par l’anglais Harriot (1631) pour signifier “plus petit que” et “plus grand que”. Ces symboles vont rencontrer un grand succès et être adoptés, rapidement, quasi universellement, et ce, fait rare dans l’histoire des symboles, sans changement jusqu’à nos jours. L’idée est alors d’apporter de légères modifications au symbole < pour désigner un angle : côté horizontal ∠ , rotation Λ, symbolisation de l’arc intercepté , avec d’autres variantes : V, ∀…

Quelques illustrations


Si deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, elles feront les angles au sommet égaux entr'eux.

Hypoth.
ab & cd sont —.
Req. π. demonstr.
∠aec 2|2 ∠deb,

∠aed 2|2 ∠ceb.
Demonstr.
13.1. ∠aec+∠ceb 2|2 2⌋
13.1. ∠deb+∠ceb 2|2 2⌋
∠ceb commun. subtr.
3.a.1. ∠aec 2|2 ∠deb, α
d. α. ∠aed 2|2 ceb.

Si à quelque ligne droicte; & a vn poinct en icelle, sont menées deux lignes droictes, non de mesme part, faisant les angles opposez au sommet égaux entr'eux : icelles lignes droictes se rentreront directement.

Hypoth.
gah est —, α
<d 2|2 <b.
Req. π. demonstr.
eaf est —.
Demonstr.

hyp. <d 2|2 <b,
<a commun. add.
1.a.1. ∠d+∠a 2|2 ∠b+∠a
α.13.1. <d+<a 2|2 2⌋,
1.a.1. <b+<a 2|2 2⌋,
concl. 14.1. eaf est —.

Les angles opposés par le sommet (Livre I, théorème VIII) du tome 1 du Cours Mathématique d’Hérigone (1634)

Théorème 13. *C’est le deuxième cas de congruence des triangles.* Un triangle ABC est congruent à un autre triangle $A'B'C'$ si les congruences suivantes sont satisfaites :

$$AB \equiv A'B', \qquad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \qquad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'.$$

D. Hilbert. *Les Fondements de la Géométrie*, 1899

Soit un cercle de centre O et de rayon R.

1. *Tracer une corde BA égale au côté du carré inscrit, puis une corde AC égale au côté du triangle équilatéral inscrit (O est à l’intérieur de l’angle BAC). Justifier les tracés.*
2. *Tracer BC et donner la valeur des angles du triangle BAC.*
3. *Calculer la hauteur AH du triangle ABC puis le côté BC et l’aire de ce triangle en fonction de R.*
4. *Prolonger AH jusqu’à son intersection A’ avec le cercle. Quelle est la nature du quadrilatère ABA’C ? Évaluer ses côtés et son aire en fonction de R.*

Sujet de Géométrie du BEPC, 1951, 1ère session, Académie de POITIERS