Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l' Enseignement
Public

79 86 17 16

*Régionale de
Poitou-Charentes*

Corol'aire

Mars 2016 n°104

20 000 journées

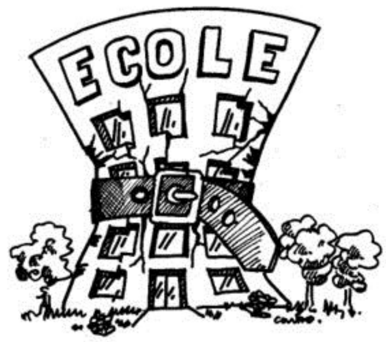
Sébastien Dassule-Debertonne

D'après la FCPE, 20 000 journées de cours ont été manquées depuis le début de l'année scolaire. Nous avons tous été témoins de ces situations où un collègue absent ne peut être remplacé, faute de remplaçants disponibles. On paie là la politique *pas de maitre sans classe* exercée de 2002 à 2012. Politique dont les effets sont renforcés, cette année, par les formations des enseignants travaillant au collège en prévision de la mise en place de la réforme l'an prochain.

En mathématiques, la situation est particulièrement tendue. La chute vertigineuse du nombre de candidats au CAPES entre en résonnance avec les choix précédemment cités. Il n'est alors pas rare de voir des académies, c'est vrai dans la nôtre, commencer l'année scolaire avec des postes non pourvus.

Cela conduit à un recrutement hâtif de collègues contractuels ou vacataires. Et fréquemment, faute d'une formation suffisante, ces collègues se retrouvent en difficulté devant les élèves. Ce qui n'est ni satisfaisant pour les élèves, ni pour ledit collègue ni pour l'institution.

L'image dégradée que renvoie l'institution dans ces moments ne fait qu'accroitre la défiance des parents face à l'école publique. C'est encore plus vrai depuis que les questions d'autorité et de sécurité sont revenues tristement sur le devant de la scène. Ces représentations, souvent mal fondées, je les entends de plus en plus régulièrement.



L'Ecole, si elle a besoin de moyens, a encore plus besoin d'une considération bienveillante des élites. Ce chiffre de 20 000 journées aurait dû être mis en perspective. Rien. Le métier d'enseignant doit être expliqué car l'image que le public s'en fait est assez caricatural. La pédagogie a, elle aussi, besoin d'être expliquée pour que les décisions soient prises à partir de réalités et non d'idées préconçues (et souvent erronées).

Sommaire

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Groupe Rallye

L'équipe Rallye s'était pliée en quatre pour élaborer les énoncés de l'épreuve finale du Rallye Mathématiques de Poitou-Charentes qui a donc eu lieu le 15 mars dernier.

Ce mercredi 24 mars, l'équipe se réunissait pour se répartir les dossiers. Un grand merci à celles et ceux qui ont répondu à notre appel pour nous aider à la correction. Près de 500 dossiers, ce n'est pas rien ! Tout devra être corrigé pour le 27 avril, jour de la délibération et de l'établissement du palmarès.

À la suite de cette réunion, les établissements qui ont participé au Rallye recevront ce palmarès par courrier électronique, et ceux qui ont des classes lauréates pourront s'organiser pour leur participation à la remise des prix qui aura lieu au Pôle Sciences de l'Université de La Rochelle le mercredi 1er juin avec une conférence-atelier de **Didier Boursin** sur les pliages.

Cette réception des dossiers et les échanges qui ont eu lieu pour régler quelques petits problèmes de transmission des envois sont l'occasion, pour nous, de recevoir des avis spontanés sur notre Rallye. En voici quelques-uns.

À propos des inscriptions : *Le rallye ça m'intéresse, ça plait bien aux 6e - 5e mais dès la 4e, c'est beaucoup plus compliqué de les impliquer (à cet âge, ils ne veulent pas faire grand chose... quoiqu'on leur propose, c'est difficile !).*

À l'occasion d'un dossier retrouvé : *mes élèves auraient été très déçus, ils se sont beaucoup impliqués.*

Pour justifier l'envoi d'un colis : *Les élèves ont fait un travail formidable qu'ils ont voulu envoyer dans un carton pour ne pas écraser tous les pliages qu'ils vous avaient préparés.*

Ou encore : *Le thème des pliages les a passionnés, ils y ont mis tout leur cœur et j'en profite pour vous remercier pour cet immense travail.*

Lors d'un autre échange : *Bon courage pour l'organisation de la correction. C'était à nouveau un plaisir de travailler ce rallye cette année, je pense qu'un club origami va naître de cette expérience l'an prochain...*

À propos de l'épreuve du primaire : *L'épreuve des CM m'intéresse car j'interviens en primaire dans le cadre d'un échange de service CM-6e. Je pense que les collègues de primaire sont rarement au courant de ce Rallye et de ce que fait l'APMEP.*

L'équipe du rallye étudie les dossiers.

Confirmation d'une collègue du primaire : *C'est dommage qu'il n'y ait pas une petite émulation régionale pour les primaires, car en termes de travail coopératif en classe, ce genre de petit concours motive les enfants face aux problèmes mathématiques. L'aspect ludique et collectif permet de pousser à la réflexion et à la persévérance plus facilement.*

Inutile de vous dire que ces retours nous donnent une sacrée envie de poursuivre et d'améliorer notre travail au sein de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes.

Corriger un dossier… plaisir ou contrainte ?

Chantal Gobin

Mercredi 23 avril : à l'IREM, distribution des dossiers du Rallye à corriger.

Malchance pour moi, j'ai deux niveaux à gérer, des 3ème et des 2nde Pro.

Retour chez moi avec un carton plein de dossiers.

Il fait beau, j'ai plus envie de me balader, de faire du jardinage ou simplement lire sur ma terrasse que de corriger des dossiers ! Allez, courage, je commence par les 2nde Pro.

Le premier dossier est épais. Je l'ouvre et je découvre cette lettre :

Carnet de voyage

Un jour de décembre, un prof d'EPS et son collègue de maths-sciences évoquent le « rallye ». Ils s'emballent comme on lance un pari, puis s'engagent comme ils achèteraient un billet de train pour une destination inconnue.

Quinze jours de réflexion pour concevoir et organiser le travail, bousculer les emplois du temps pour récupérer les créneaux d'une heure trente d'aide personnalisée sur neuf semaines, convaincre la collègue d'arts appliqués de nous conseiller (elle fera bien plus), la documentaliste de nous accueillir et nous aider lors des séances avec les élèves.

Rentrée de janvier, première séance, les élèves sont sur leurs gardes. Il faut amorcer le projet. On commence par quelques exercices puisés dans les éditions précédentes souvent au niveau collège (merci pour cette mine en accès libre sur le site).

On a fixé le cadre, on est bien là pour faire des maths. Plantons le décor, on termine par un condensé des meilleurs moments de la vidéo « ***Un monde en pli*** *». Le silence se fait, les yeux s'ouvrent grands. Promis, mardi prochain, on plie.*

D'abord le code des plieurs, pas toujours si facile. Et l'on se lance déjà dans la réalisation de la Rallye-box. Parfois une heure entière, à transpirer, parfois à s'énerver, mais chacun repart avec sa boîte, telle une malle à remplir pour le voyage.

Séance suivante, encore quelques problèmes à résoudre, avant de s'engager dans le pliage de la grue. Ce migrateur nous emmène alors dans son monde de pli.

La semaine suivante, nous reviennent des poissons, des cochons, des grenouilles, des perroquets…

On profite du voyage, pour jouer le dépaysement. Les exercices de la semaine suivante seront tous en anglais (dernière langue étrangère parlée au lycée). Là, on est dans le dur. On a même dû déranger la collègue de lettre-anglais d'à côté. Merci d'avoir été « soft » avec « Ready, steady, go ! ».

Les idées du dossier avancent, nous commençons à le mettre en forme en même temps que d'autres s'engagent dans les recherches sur l'origami. Ils ont de quoi nous raconter pour la semaine entière.

Dernier mardi avant les vacances, c'est l'épreuve d'entraînement. La classe est tendue, il faut s'organiser, se concerter, s'écouter, avancer…

Une heure-trente pour finir. C'est trop. Il faudra gagner trente minutes et surtout apparaît la nécessité d'avoir achevé le dossier avant le 15 mars.

Un mardi à la rentrée, puis le suivant qui saute pour un événement du lycée, le temps nous manque. La moitié des élèves viendront sur leur temps libre, le jeudi après midi, finir un cadre, une enveloppe, un collage...

Mardi 15 mars, tout le monde à son poste, la fourmilière est en marche, les pliages et les réponses reviennent à bon rythme, les enveloppes se remplissent et le dossier se complète.

L'heure passe si vite et dure si longtemps à la fois. Stop ! C'est fini ! On colle un dernier papillon sur le dos du dossier.

On regarde en silence notre travail et comme quand l'avion du retour vient de se poser, il nous vient l'envie d'applaudir.

Mesdames, Messieurs, nous vous confions notre carnet de voyage.

Nous y avons mis des maths, mais aussi nos notes, nos souvenirs et un peu de nos rêves. Plongez y comme on part en vacances. Profitez de chaque page comme d'un bon moment.

Ouvrez chaque boîte et chaque enveloppe, vous y trouverez un peu de chaque élève.

Merci pour ce voyage au pays des maths.

Recevez ce « pli » comme un présent.

Bonne correction et à l'année prochaine.

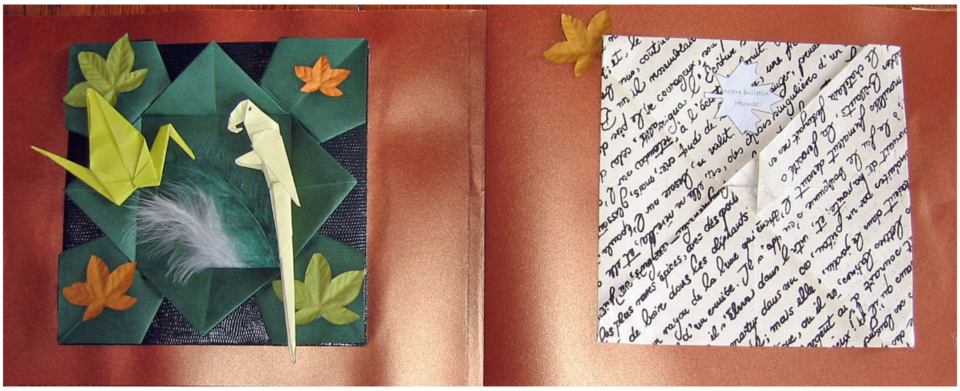
Moi je reste encore avec cette question qui revient : « Eh ! M'sieur, mardi prochain, y a Rallye-math ? »

Jean-Michel

J'ai tout de suite envie de découvrir leur travail. Le dossier est là, devant mes yeux. Il se présente sous forme d'une enveloppe, carnet de voyage, magnifique. Je l'ouvre.

Sur la page de gauche, en origami, j'admire une mare avec un perroquet, une grue, des plumes.

Sur la page de droite, une enveloppe surprise qui cache le bulletin-réponse. Je le lirai plus tard. J'ai plutôt envie de voir la suite.



Je tourne la page et la Rallye-box demandée est là mais elle a pris une forme gigogne. Et en voici une autre, je l'ouvre et je découvre une grue, des plumes et quelques volières. Un dragon (origami) surveille tout ça.

Au dos du dossier, un oiseau (origami) est prêt à s'envoler. C'est féerique, je dois penser à évaluer, mais je suis dans le rêve dans lequel cette classe m'a plongée avec son superbe travail.

Allons, revenons à la réalité. Soyons rigoureuse, objective, équitable car il reste encore d'autres dossiers à corriger.

Je ne sais pas encore si cette classe sera primée mais je tiens vraiment à la remercier pour cette évasion poétique.

Compte-rendu du comité du 13 janvier 2016

Élection du bureau

Après plusieurs années passées au bureau du comité, F. de Ligt et J. Chayé souhaitent passer la main. Le comité les remercie pour tout le temps passé à gérer l'association.

Sont élus à l'unanimité :

Président : Sébastien Dassule-Debertonne
Vice-président : Philippe Rogeon
Trésorier : Jean Marie Parnaudeau
Trésorier adjoint : Jacques Germain
Secrétaire : Corinne Parcelier

Mise en place du comité

Deux nouvelles recrues rejoignent le comité : Marion Chauleau et Daniel Guiraud. Celui-ci renforce l'équipe du site internet.

Exposition « Puzzle »

L'Espace Mendès-France a commencé à créer la bibliothèque de l'exposition.

La grosse partie du travail actuel porte sur le catalogue en cours de rédaction. Dominique Gaud espère qu'il sera bouclé pour le mois de juin. A partir du document finalisé par Jacqueline Guichard, une professionnelle infographiste du laboratoire de l'université de Poitiers mettra en page le catalogue.

Plusieurs noms sont évoqués pour le conférencier « grand public ».

Dominique Gaud souhaite organiser des ½ journées de formation pendant la tenue de l'exposition à destination notamment des professeurs des écoles. Frédéric propose de contacter les IEN afin que ces formations tiennent lieu d'animations pédagogiques.

Il est alors envisagé d'organiser la journée de la Régionale 2016 à Poitiers autour de l'exposition afin de pouvoir la proposer à la visite. (Voir le paragraphe ad hoc.)

Rallye

Les inscriptions sont en légère baisse : un peu moins de 12 000 élèves soit 464 classes (pour rappel, l'an dernier : 14 155 élèves pour 554 classes).

Les épreuves d'entraînement ont été mises en ligne, ce qui génère une certaine affluence sur le site.

Point très positif, nous avons été entendus lors de la dernière journée de la Régionale car nous allons pouvoir profiter de quelques correcteur.trice.s de plus qui se sont proposé.e.s pour nous aider.

A noter : nous avons été sollicités par une enseignante de République Dominicaine et par une autre de l'académie de Marseille. Nous avons mis notre travail à disposition mais ne nous chargerons pas des corrections.

La date définitive de la remise des prix n'est toujours pas fixée (1er ou 8 juin) car nous attendons la réponse de Didier Boursin que Jean a contacté pour la conférence.

Cap maths s'est de nouveau manifesté en nous demandant une nouvelle fois un dossier. C'est un peu usant mais Jacques va essayer de recycler celui qu'il a déjà réalisé...

Le financement reste un problème : certains établissements ne jouent pas le jeu et ne veulent pas payer avant la date des épreuves finales. Un autre demande la signature d'une convention.

Suite à la consultation de passer à 6 € les frais d'inscription lors de la journée de la Régionale, la décision est soumise au vote du comité : 12 pour, 3 abstentions.

Corol'aire

Il n'y a pas eu d'article sur la journée de la Régionale dans le dernier numéro. Il faudra désigner un rédacteur en amont l'an prochain

Site de la Régionale

L'autorisation est donnée de faire appel à un hébergement payant afin d'avoir un service d'assistance performant.

Divers

Journée de la Régionale

Dominique prend contact avec l'EMF pour l'organiser dans leurs locaux le mercredi 12 octobre 2016. Christine Guitton nous répond favorablement. Nous allons demander à J.-P. Delahaye deux conférences ce jour-là : une à destination des professeurs de mathématiques, l'autre à destination du grand public en soirée.

Fond documentaire du collège Henri IV de Poitiers

La convention signée avec l'association doit être transmise à Sébastien. Julien demande à ce qu'elle devienne tripartite avec l'IREM.

Histoire d'angles

IREM de Poitiers, groupe collège

Comment noter un angle ? D'où viennent nos théorèmes sur les angles ? Peut-on calculer sur des angles sans utiliser les degrés ? Avec quels instruments les hommes ont-ils mesuré les angles ? Voici des questions que l'histoire des mathématiques peut éclairer, nous aidant ainsi à faire des choix plus motivés.

Épisode 1 : La notation des angles géométriques

(Une partie de cet article est déjà parue dans Corol'aire n°37.)

En géométrie élémentaire il n'y a pas, comme en algèbre, une nécessité impérieuse d'utiliser des symboles pour améliorer l'efficacité des procédures. Une grande partie des raisonnements passe toujours par le discours.
Ce sont en fait les progrès de l'algèbre qui ont amené l'utilisation de plus en plus systématique de symboles dans la partie calculatoire de la géométrie, ou dans l'écriture des données. En voici deux exemples relativement récents.

- Dans le *Lebossé & Hemery* 2e (1960) :

  « Si OM est la bissectrice de l'angle AOB on peut écrire : $\widehat{AOM} = \widehat{MOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.
- Dans un sujet de BEPC de 1951 :
  « Déterminer la valeur de l'angle AMB… Comparer les angles ODM et DMH… Soit D le point de PY tel que : $\widehat{PCD} = \widehat{PBA}$ …»

Hadamard, dans ses *Leçons de Géométrie Elémentaire* (1922), écrit : « On désigne un angle par la lettre de son sommet, placée entre deux autres lettres qui désignent ses côtés, et surmontée souvent d'un signe spécial ». Souvent, pas toujours…
De fait la plupart des mathématiciens jusqu'au XXe siècle, qu'il s'agisse de Descartes (1637), de Taylor (1759), de Legendre (1813), de Houël (1867)… écrivent «l'angle ABC». De même pour les manuels et les sujets d'examens, même relativement récents, comme en témoignent ces extraits du BEPC de 1970 : « Calculer tg AED et en déduire la valeur approchée de l'angle AED à une minute près par excès »… « Montrer que MB est la bissectrice de l'angle ABP. En déduire la mesure en degrés des angles en A et en B du triangle APB ».
On trouve parfois chez certains auteurs une abréviation comme Angl. ABC (!) chez Legendre (1794), Wkl DOQ chez A.von Frank (angle se dit "Winkel" en allemand).

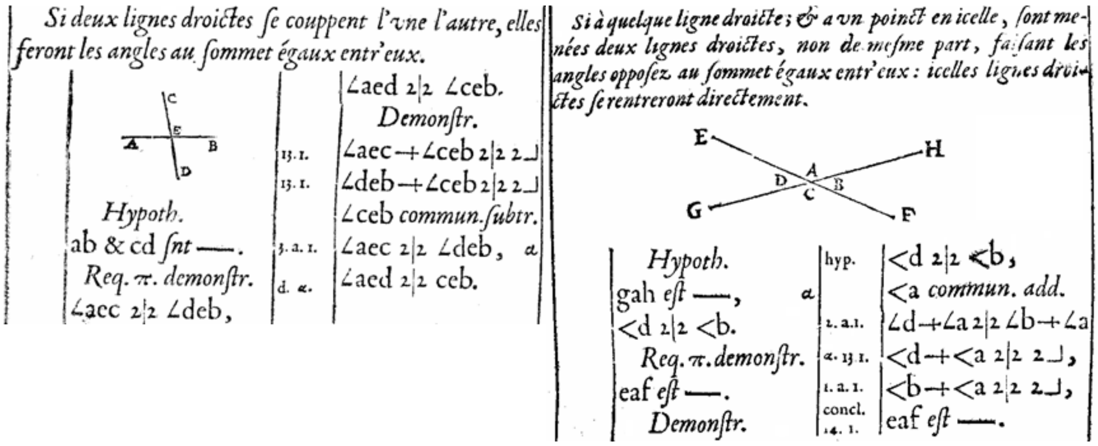
Ce qui est intéressant c'est de savoir qu'actuellement il n'y a pas de notation unifiée mais coexistent 3 notations :

1) $\widehat{ABC}$ en usage chez nous et d'origine française (Carnot, *Géométrie de Position* 1803). Elle ne figure pas dans les polices de Word, ce qui avait amené un collègue de l'APMEP (André Guillemot) à créer un logiciel "amath" qui permettait de la mettre en œuvre. Sous Word on ne peut la réaliser qu'avec l'éditeur d'équation, en utilisant l'option accentuation !
2) $\angle$ ABC en usage chez les anglo-saxons et d'origine anglaise (Oughtred Trigonometria 1657) : c'était le seul symbole disponible dans l'éditeur d'équation de Word, ainsi que dans la police mathématique Symbol ! Il a l'avantage, comme les parenthèses par rapport au surlignage, comme le symbole %, comme le signe / pour les fractions, de rester "en ligne".
3) $\sphericalangle$ ABC en usage en Allemagne et aux États Unis, d'origine allemande (Spitz 1862, Hilbert Les fondements de la géométrie 1899). Il faisait partie des trois symboles

d'angles de la police mathématique Maths C de Word, avec ∠, et leur mixte. Ils ne sont plus disponibles dans les polices actuelles de Word en français !

En fait ces trois notations ne sont que des variantes des pictogrammes < ABC et ∠ ABC créés en 1634 par le français Hérigone, qui bien qu'en usage aux XVII[e] et XVIII[e] siècles (ils figurent à l'article "Caractère" de *L'Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert de 1784), vont rapidement se trouver en compétition avec les symboles < et > introduits à la même époque par l'anglais Harriot (1631) pour signifier "plus petit que" et "plus grand que". Ces symboles vont rencontrer un grand succès et être adoptés, rapidement, quasi universellement, et ce, fait rare dans l'histoire des symboles, sans changement jusqu'à nos jours. L'idée est alors d'apporter de légères modifications au symbole < pour désigner un angle : côté horizontal ∠ , rotation Λ, symbolisation de l'arc intercepté , avec d'autres variantes : V, ∀…

Quelques illustrations


Si deux lignes droictes se couppent l'une l'autre, elles feront les angles au sommet égaux entr'eux.

Hypoth.
ab & cd snt —.
Req. π. demonstr.
∠aec 2|2 ∠deb,
∠aed 2|2 ∠ceb.
Demonstr.
13.1. ∠aec+∠ceb 2|2 2⅃
13.1. ∠deb+∠ceb 2|2 2⅃
∠ceb commun. subtr.
3.a.1. ∠aec 2|2 ∠deb, α
d. α. ∠aed 2|2 ceb.

Si à quelque ligne droicte, & à un poinct en icelle, sont menées deux lignes droictes, non de mesme part, faisant les angles opposez au sommet égaux entr'eux : icelles lignes droictes se rentreront directement.

Hypoth.
gah est —, α
<d 2|2 <b.
Req. π. demonstr.
eaf est —.
Demonstr.
hyp. <d 2|2 <b,
<a commun. add.
1.a.1. ∠d+∠a 2|2 ∠b+∠a
α.13.1. <d+<a 2|2 2⅃,
1.a.1. <b+<a 2|2 2⅃,
concl. 14.1. eaf est —.

Les angles opposés par le sommet (Livre I, théorème VIII) du tome 1 du Cours Mathématique d'Hérigone (1634)

Théorème 13. *C'est le deuxième cas de congruence des triangles.* Un triangle ABC est congruent à un autre triangle $A'B'C'$ si les congruences suivantes sont satisfaites :

$$AB \equiv A'B', \qquad \measuredangle A \equiv \measuredangle A', \qquad \measuredangle B \equiv \measuredangle B'.$$

D. Hilbert. *Les Fondements de la Géométrie*, 1899

Soit un cercle de centre O et de rayon R.

1. *Tracer une corde BA égale au côté du carré inscrit, puis une corde AC égale au côté du triangle équilatéral inscrit (O est à l'intérieur de l'angle BAC). Justifier les tracés.*
2. *Tracer BC et donner la valeur des angles du triangle BAC.*
3. *Calculer la hauteur AH du triangle ABC puis le côté BC et l'aire de ce triangle en fonction de R.*
4. *Prolonger AH jusqu'à son intersection A' avec le cercle. Quelle est la nature du quadrilatère ABA'C ? Évaluer ses côtés et son aire en fonction de R.*

Sujet de Géométrie du BEPC, 1951, 1ère session, Académie de POITIERS

Ru – Bri – COL⅃AGE

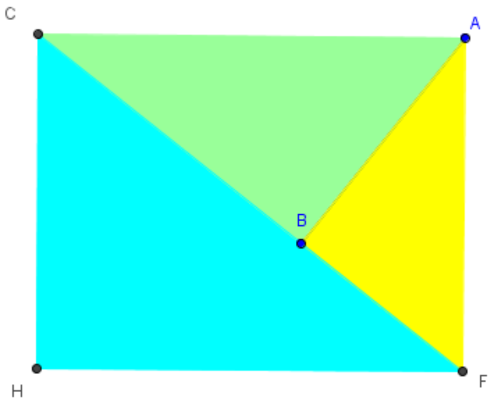
Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

104-1 *de Jean-Paul Guichard (Parthenay)* :
Puzzle à 3 pièces
Le rectangle est constitué de 3 triangles rectangles tels que AF = BC. Sauriez-vous le construire ?



104-2 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :
Exercice extrait des « Premiers éléments de géométrie » par Ch. Vaquant et A. Macé de Lépinay - Masson (1914)
On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] et dont les diagonales se coupent en O ; connaissant les côtés a et b des carrés respectivement équivalents aux triangles AOB et COD, calculer le côté c du carré équivalent au trapèze tout entier.

104-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Existe-t-il une suite d'entiers naturels non nuls contenant **tous** les entiers naturels non nuls, exactement une fois chacun, et telle que la moyenne arithmétique de ses k premiers termes pour k = 1, 2, ... donne toujours un résultat entier ?

104-4 *de Walter Mesnier (Poitiers)* :
Dans une classe de 34 élèves quelle est la probabilité qu'il y ait un mois de l'année où aucun élève n'ait d'anniversaire ?
On suppose, pour simplifier, que tous les mois de l'année ont le même nombre de jours et que, pour les dates de naissance, tous les mois de l'année sont équiprobables.

Des solutions

100-1 *de Frédéric de Ligt* :
La série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge. Mais qu'en est-il de la série harmonique incomplète $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ où A est l'ensemble des entiers naturels qui ne contiennent pas la séquence 100 dans leur écriture décimale.

Solution de Jean-Christophe Laugier

Voici une démonstration qui évite de dénombrer A_n, ensemble des éléments de A dont l'écriture décimale comporte n+1 chiffres. Soit B l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture en base 1000 ne comporte pas le « chiffre » 100. Alors $A \subseteq B$; l'inclusion est d'ailleurs stricte, puisque, par exemple 31004 $\in$B et 31004$\notin$A.

D'où $\sum_{n\in A}\frac{1}{n} \le \sum_{n\in B}\frac{1}{n}$ et $\sum_{n\in B}\frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{n\in B,(10^3)^i \le n<(10^3)^{i+1}}\frac{1}{n}\right) \le \sum_{i=0}^{+\infty}\left(10^3-2\right)\frac{(10^3-1)^i}{(10^3)^i} = 998\times 1000 = 998000$.

Par conséquent $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ est convergente.

On peut généraliser ce qui précède : soit s une séquence quelconque de chiffres ; la série $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$, A étant l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture décimale ne contient pas s est convergente.

De manière analogue, on peut donner une preuve du fameux théorème du « singe dactylographe » : un singe tape, indéfiniment, sur un clavier d'une machine à écrire et produit ainsi un « texte » infini. Alors, la probabilité qu'un texte fini donné, arbitrairement long, apparaisse au cours de cette errance dactylographique est égale à 1 !

Plus formellement, soit un alphabet $\mathcal{A}$ constitué de k lettres ou symboles distincts ; soit $\mathcal{M} \in \mathcal{A}^*$ (ensemble des mots construits sur $\mathcal{A}$), de longueur p et soit $\left(X_n\right)_{n\ge 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathcal{A}$ et uniformément distribuées sur $\mathcal{A}$. Alors l'évènement E : « la suite (X_1, X_2, ...) contient au moins une occurrence de $\mathcal{M}$ » est presque sûr. Soit, en effet, E_i l'évènement : « (X_1, X_2, ...) contient une occurrence de $\mathcal{M}$ au rang i, c'est-à-dire $X_i X_{i+1} \ldots X_{i+p-1} = \mathcal{M}$ ». Alors $E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ d'où $\overline{E} = \bigcap_{i=1}^{+\infty}\overline{E_i} \subseteq \bigcap_{u=0}^{+\infty}\overline{E_{1+up}}$ et

$$P(\overline{E}) \le P\left(\bigcap_{u=0}^{+\infty}\overline{E_{1+up}}\right) = \lim_{u\to+\infty} P(\overline{E_1}\cap\overline{E_{p+1}}\cap\ldots\cap\overline{E_{up+1}}) = \lim_{u\to+\infty} P(\overline{E_1})\times P(\overline{E_{p+1}})\times\ldots\times P(\overline{E_{up+1}}) = \lim_{u\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{k}\right)^p\right)^{u+1} = 0$$

On a donc bien P(E) = 1.

100-3 *de Frédéric de Ligt* :

Combien de pavés droits différents peut-on former avec 100^{100} cubes identiques ?

Solution de l'auteur

Un diviseur d quelconque de 100^{100} est de la forme $2^n 5^m$ avec n et m des entiers naturels inférieurs ou égaux à 100. Ce diviseur d possède lui-même (n + 1)(m + 1) diviseurs. Il y a donc

$$\sum_{n,m=0}^{100}(n+1)(m+1) = \sum_{n=0}^{100}\sum_{m=0}^{100}(n+1)(m+1) = \left(\frac{101\times 102}{2}\right)^2$$ triplets (a, b, c) tels que abc = 100^{100}.

On ne peut y trouver de triplets de la forme (a, a, a) car 100 n'est pas divisible par 3.

Pour le décompte des pavés droits, les triplets de la forme (a, a, b), (a, b, a), (b, a, a) avec a différent de b ne doivent être comptés qu'une seule fois et cela correspond au nombre de boîtes différentes ayant 2 faces carrées. Il y en a autant que de nombres de la forme $(2^p 5^q)^2$ avec p et q des entiers naturels inférieurs ou égaux à 50, c'est-à-dire 51^2.

Toujours dans ce décompte des pavés droits, les 6 triplets (a, b, c), (b, a, c), (c, b, a), (a, c, b), (b, c, a) et (c, a, b), avec a, b et c différents deux à deux, ne doivent être comptés qu'une seule fois et cela correspond au nombre de boîtes n'ayant aucune face carrée.

Il y en a $((101\text{x}102/2)^2 - 3\text{x}51^2)/6$. On a donc au total $((101\text{x}102/2)^2 - 3\text{x}51^2)/6 + 51^2$ =
4 423 434 boîtes différentes formées de 100^{100} cubes identiques.

101-3 *de Jacques Chayé* :
Jacques Chayé signale avec raison qu'une erreur, qui n'est pas de son fait, s'est glissée dans la retranscription de sa solution au problème 101-3, parue dans la Rubricollage du précédent Corol'aire : « A la deuxième ligne de la remarque, c'est une égalité entre produits de distances et non pas de mesures algébriques qui aurait dû être écrite : IA'×IC'=IB'×ID'. *C'est précisément l'intérêt des mesures algébriques qui permettent de formuler des conditions nécessaires et suffisantes. »*
Avec toutes les excuses de la rédaction pour cette étourderie.

102-1 *de Jacques Chayé* :
Un exercice du baccalauréat de 1894 (Clermont-Section Lettres-Mathématiques)
On donne, dans un triangle rectangle, la somme L de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante, et la surface K^2. Calculer les trois côtés du triangle. Discussion.

Solution de l'auteur
Soient a, b, c et h les longueurs respectives des côtés de l'angle droit ($a \geq b$), de l'hypoténuse et de la hauteur. Les hypothèses s'écrivent $c \times h = 2K^2$ et $c + h = L$. Les deux nombres dont la somme est L et le produit $2K^2$ sont les racines du polynôme en x : $x^2 - Lx + 2K^2$ dont le discriminant est $L^2 - 8K^2$. A condition que $L \geq 2\sqrt{2}K$, les nombres convenables sont donc :

$$\begin{cases} c=\dfrac{L+\sqrt{L^2\text{-}8K^2}}{2} \\ h=\dfrac{L-\sqrt{L^2\text{-}8K^2}}{2} \end{cases}$$

Or, par hypothèse, $a \times b = c \times h$ et $a^2 + b^2 = c^2$ ou encore $(a + b)^2 = c^2 + 4K^2$. On est amené à résoudre :

$$\begin{cases} a\times b=2K^2 \\ a+b=\sqrt{c^2+4K^2} \end{cases}$$

On cherche donc les racines du polynôme en x : $x^2 - \sqrt{c^2+4K^2}\,x + 2K^2$ dont le discriminant est $c^2 + 4K^2 - 8K^2 = c^2 - 4K^2$; ce discriminant est positif à condition que $c \geq 2K$ c'est-à-dire $L+\sqrt{L^2\text{-}8K^2} \geq 4K$, soit encore $L \geq 3K$. Puisque $a \geq b$, le système équivaut à :

$$\begin{cases} a=\dfrac{\sqrt{c^2+4K^2}+\sqrt{c^2\text{-}4K^2}}{2} \\ b=\dfrac{\sqrt{c^2+4K^2}-\sqrt{c^2\text{-}4K^2}}{2} \end{cases}$$

En résumé, à condition que $L \geq 3K$, il existe un triangle rectangle et un seul répondant à la question ; ses côtés vérifient :

$$c=\frac{L+\sqrt{L^2\text{-}8K^2}}{2};\ a=\frac{\sqrt{c^2+4K^2}+\sqrt{c^2\text{-}4K^2}}{2};\ b=\frac{\sqrt{c^2+4K^2}-\sqrt{c^2\text{-}4K^2}}{2}$$

103-1 *de Frédéric de Ligt* :

Passe-t-on si facilement de 15 à 16 ?
Il n'est pas aisé, sur l'intervalle [0 ; 1], de faire la distinction entre les représentations graphiques des fonctions f_{15} et f_{16} définies par $f_{15}(t) = 15^{-t}$ et $f_{16}(t) = 16^{-t}$. Pourtant l'outil informatique semble indiquer que les suites $(f_{15}^n(0))_{n\geq1}$ et $(f_{16}^n(0))_{n\geq1}$ n'ont pas le même comportement. Qu'en est-il ?
(f_{15}^n et f_{16}^n désignent les nièmes itérées des fonctions f_{15} et f_{16} avec $f_{15}^1 = f_{15}$ et $f_{16}^1 = f_{16}$).

Solution de l'auteur

On va faire l'étude plus générale du comportement des suites $(f_a^n(0))_{n\geq 0}$ où f_a est la fonction, de paramètre réel $a > 1$, définie sur [0 ; 1] par $f_a(t) = a^{-t}$. (f_a^0 désigne la fonction identité).

Tout d'abord :

f_a est stable sur l'intervalle [0 ; 1], et même mieux $f_a([0;1]) \subset]0;1]$.

Preuve. $f_a(t) = e^{-t\mathrm{Ln}a}$ avec Ln$a > 0$ et $t \in [0;1]$. Par conséquent $f_a(t) \in [\frac{1}{a};\ 1] \subset]0\ ;\ 1]$.

A partir de cette observation on établit facilement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n on a $f_a^n(0) \in]0\ ;\ 1]$.

$(f_a^{2n}(0))_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante.

Preuve par récurrence. $f_a^2(0) = \frac{1}{a} > f_a^0(0) = 0$.

On suppose que pour un entier n on a l'inégalité stricte $f_a^{2n+2}(0) > f_a^{2n}(0)$. La fonction f_a^2 est strictement croissante sur [0 ; 1] car le calcul de sa dérivée donne $f_a^2\,'(t) = f_a^2(t)a^{-t}\mathrm{Ln}^2 a > 0$ pour $t \in [0\ ;\ 1]$. Par conséquent $f_a^{2n+4}(0) = f_a^2(f_a^{2n+2}(0)) > f_a^2(f_a^{2n}(0)) = f_a^{2n+2}(0)$.

$(f_a^{2n+1}(0))_{n\geq 0}$ est une suite strictement décroissante.

Preuve par récurrence. $f_a^3(0) = f_a(f_a^2(0)) = f_a(\frac{1}{a}) = a^{-\frac{1}{a}} = e^{-\frac{\mathrm{Ln}a}{a}} < f_a(0) = 1$.

On suppose que pour un entier n on a l'inégalité stricte $f_a^{2n+3}(0) < f_a^{2n+1}(0)$. La stricte croissance de f_a^2 sur [0 ; 1] entraîne que $f_a^{2n+5}(0) = f_a^2(f_a^{2n+3}(0)) < f_a^2(f_a^{2n+1}(0)) = f_a^{2n+3}(0)$.

Les deux suites $(f_a^{2n}(0))_{n\geq 0}$ et $(f_a^{2n+1}(0))_{n\geq 0}$ sont bornées et monotones, elles convergent donc toutes deux. On a par ailleurs l'inégalité stricte suivante :

$f_a^{2n}(0) < f_a^{2n+1}(0)$ pour tout entier naturel n.

Preuve par récurrence. $f_a^0(0) = 0 < f_a^1(0) = 1$.

On suppose que pour un entier n on a l'égalité stricte $f_a^{2n}(0) < f_a^{2n+1}(0)$. La stricte croissance de f_a^2 sur [0 ;1] entraîne que $f_a^{2n+2}(0) = f_a^2(f_a^{2n}(0)) < f_a^2(f_a^{2n+1}(0)) = f_a^{2n+3}(0)$.

Si on note c la limite de la suite $(f_a^{2n}(0))_{n\geq 0}$ et d celle de la suite $(f_a^{2n+1}(0))_{n\geq 0}$, on a donc les inégalités :

$$0 < c \leq d < 1.$$

Pour que la suite $(f_a^n(0))_{n\geq 0}$ converge il faut et il suffit que $c = d$. A partir de l'égalité $f_a^{2n+1}(0) = f_a(f_a^{2n}(0)) = a^{-f_a^{2n}(0)}$, la continuité de la fonction f_a permet d'obtenir l'égalité :

$$d = a^{-c} \quad (1)$$

De même à partir de l'égalité $f_a^{2n+2}(0) = f_a(f_a^{2n+1}(0)) = a^{-f_a^{2n+1}(0)}$ et on obtient l'égalité :

$$c = a^{-d} \quad (2)$$

On raisonne maintenant par l'absurde et on suppose qu'il existe un réel r tel que $c = rd$ avec $0 < r < 1$.

L'égalité (1) s'écrit alors $d = a^{-rd}$ et l'égalité (2) s'écrit $rd = a^{-d}$. On tire alors $d^{1/r} = a^{-d} = rd$ puis $r = d^{\frac{1-r}{r}}$ et enfin $d = r^{\frac{r}{1-r}}$. Par ailleurs $c = rd = r^{\frac{r}{1-r}+1} = r^{\frac{1}{1-r}}$, d'où l'expression de a en fonction seulement de r tirée de $a = d^{-\frac{1}{c}}$:

$$a=(r^{\frac{r}{r-1}})^{r^{\frac{1}{r-1}}}$$

On va étudier la fonction F définie sur l'intervalle]0 ; 1[par $F(r)=(r^{\frac{r}{r-1}})^{r^{\frac{1}{r-1}}}$.

La fonction F est strictement décroissante.

Preuve. Le calcul de la dérivée de F peut alors se mettre sous la forme :

$$F'(r)=\frac{F(r)r^{\frac{1}{r-1}}}{(1-r)^3}\left(r\mathrm{Ln}^2r-(1-r)^2\right).$$

Le facteur $\frac{F(r)r^{\frac{1}{r-1}}}{(1-r)^3}$ est strictement positif sur]0 ; 1[. On étudie donc le signe de l'expression $h(r)=r\mathrm{Ln}^2r-(1-r)^2$ sur]0 ; 1[.

On a successivement $h'(r) = 2(1 - r) + 2\mathrm{Ln}r + \mathrm{Ln}^2r$ et $h''(r) = \frac{2}{r}(\mathrm{Ln}r-r+1)$.

Comme la tangente en 1 à la courbe représentative de la fonction Ln est toujours placée au-dessus de celle-ci en raison de la concavité de la fonction Ln, alors $\mathrm{Ln}r - r + 1$ prend toujours des valeurs strictement négatives sur]0 ; 1[, de même que h''. La fonction h' est donc strictement décroissante sur]0 ; 1[. Comme $\lim\limits_{r\to 1^-}h'(r)=0$ alors h' est strictement positive sur]0 ; 1[. La fonction h est donc strictement croissante sur]0 ; 1[. Comme $\lim\limits_{r\to 1^-}h(r)=0$ alors h est strictement négative sur]0 ; 1[et finalement il en va de même pour la fonction F'.

La fonction F est bijective de]0 ; 1[dans $]e^e;+\infty[$.

Preuve. La fonction F est continue et strictement décroissante sur]0 ; 1[.

$\lim\limits_{r\to 1^-}r^{\frac{r}{r-1}}=\lim\limits_{r\to 1^-}e^{\frac{r}{r-1}\mathrm{Ln}r}=\lim\limits_{r\to 1^-}e^{r\frac{\mathrm{Ln}r-\mathrm{Ln}1}{r-1}}=e$; $\lim\limits_{r\to 1^-}r^{\frac{1}{r-1}}=e$. Par conséquent $\lim\limits_{r\to 1^-}F(r)=e^e$.

D'autre part $\lim\limits_{r\to 0^+}(r^{\frac{r}{r-1}})^{r^{\frac{1}{r-1}}}=\lim\limits_{r\to 0^+}(r^{-r})^{r^{-1}}=\lim\limits_{r\to 0^+}r^{-r\times\frac{1}{r}}=\lim\limits_{r\to 0^+}r^{-1}=+\infty$.

Selon l'hypothèse faite, la valeur du réel a doit donc être strictement supérieure à e^e. En conséquence si on a $1<a\le e^e$, et puisque les réels c et d existent on a nécessairement $c = d$ et la suite $(f_a^n(0))_{n\ge 0}$ converge.

En revanche si $a > e^e$ il existe deux réels c et d tels que $0 < c < d < 1$, les deux suites $(f_a^{2n}(0))_{n\ge 0}$ et $(f_a^{2n+1}(0))_{n\ge 0}$ convergent vers deux valeurs distinctes et donc la suite $(f_a^n(0))_{n\ge 0}$ ne converge pas.

Il se trouve que l'on a les inégalités $15 < e^e < 16$, d'où le résultat final, que la représentation graphique ne laissait pas prévoir, à savoir : $(f_{15}^n(0))_{n\ge 1}$ converge et $(f_{16}^n(0))_{n\ge 1}$ ne converge pas.

En utilisant un grapheur-solveur on peut obtenir les précisions suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty}f_{15}^n(0)\approx 0{,}3686$ à partir de l'équation $f_{15}(t) = t$; $\lim\limits_{n\to+\infty}f_{16}^{2n}(0)=0{,}25$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}f_{16}^{2n+1}(0)=0{,}5$ à partir de l'équation $f_{16}^2(t) = t$ qui admet trois solutions sur]0 ; 1[, 0,3643… qui est la solution de $f_{16}(t) = t$ et qui ne peut donc être retenue puisque $(f_{16}^n(0))_{n\ge 1}$ ne converge pas, 0,25 et 0,5 qui sont des solutions exactes comme on peut le vérifier. On peut aussi écrire un petit programme qui donne les termes successifs des suites définies par récurrence : $a_{n+1}=15^{-a_n}$ avec $a_0 = 0$ et $b_{n+1}=16^{-b_n}$ avec $b_0 = 0$.

Expo puzzle : les défis

Dominique Gaud

Votre régionale APMEP, en collaboration avec l'IREM, et l'Espace Mendès-France de Poitiers conçoivent actuellement une exposition consacrée aux puzzles et à leurs applications aux mathématiques.

Cette exposition se déroulera de septembre 2016 à juin 2017 dans les locaux de l'Espace Mendès-France, puis sera disponible pour tous les établissements qui en feront la demande après, comme l'étaient les précédentes expositions (Expocube, Comment tu comptes ?, Courbes).

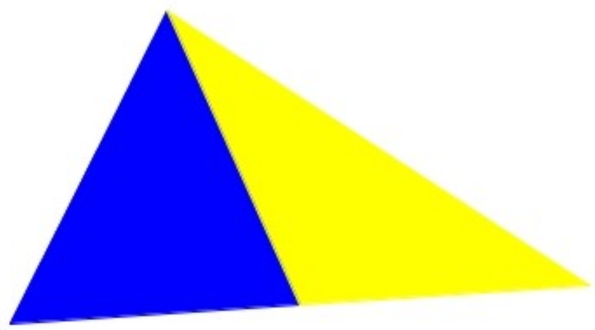
Nous vous proposerons toute cette année, en liaison avec cette exposition, quelques défis. Vous pouvez nous soumettre vos solutions mais aussi des séquences dans les classes que ces défis ne manqueront pas de vous faire concevoir.

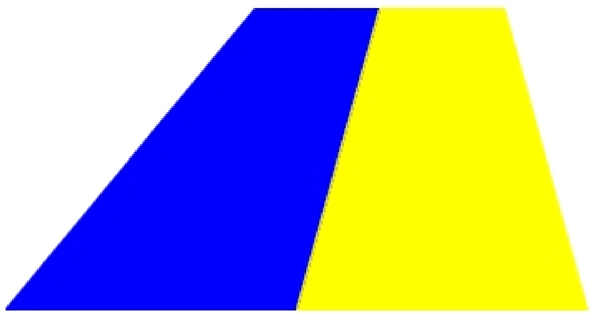
Il suffit de les faire parvenir à : sdassule.apmep@gmail.com

Exercice 3

La médiane AM d'un triangle ABC partage ce triangle en deux triangles de même aire : ABM et ACM.

Découper ABM pour reconstruire ACM en faisant le moins de morceaux possibles.





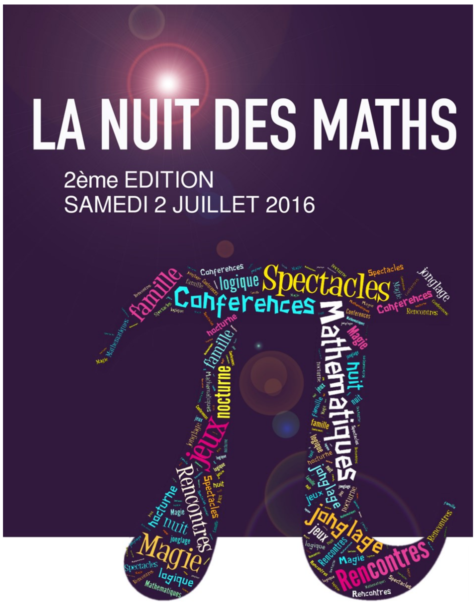
Exercice 4

AB et CD sont les bases d'un trapèze (convexe) qui ont pour milieux I et J. Les trapèze AIJD et IBCJ on la même aire.

Découper l'un des trapèzes pour reconstituer l'autre en faisant le moins de morceaux possibles.

Deuxième nuit des maths

Comme l'an dernier, cette deuxième « Nuit des Maths » aura lieu le 2 juillet prochain à l'Université François Rabelais de Tours.



C'est un festival des maths qui est proposé avec des spectacles de clown, du théâtre, des rencontres, des conférences, des stands, tout autour des mathématiques. Ce temps festif et convivial, aux portes de l'été, sera ouvert à tous, spécialistes ou non, en famille, entre amis...

De grands noms du monde des mathématiques tels que Jean-Paul Delahaye ou André Deledicq auront l'occasion de faire partager leur passion. Le public pourra déambuler sur le parvis de l'Université et dans le grand hall parmi les stands de livres de mathématiques, de casse-têtes, de jeux d'échecs... et se restaurer sur place s'ils ne sont pas déjà en train d'assister aux spectacles dans la grande salle Thélème.

En plus du principal partenaire : Les jeux du Kangourou, l'APMEP tiendra un stand : « Les JEUX de l'APMEP » comme elle le fait, chaque année, fin mai, au Salon des Jeux Mathématiques, Place Saint Sulpice, à Paris. À ce stand, les visiteurs pourront faire des mathématiques en jouant et en y prenant plaisir. C'est en effet ce qui y est proposé avec des jeux distribués dans le commerce ou imaginés par les membres du Groupe JEUX. Ces jeux amènent petits et grands à faire naturellement de la géométrie, du calcul et de la logique. N'hésitez pas, venez les découvrir et les pratiquer !

Triste nouvelle

Claude Robin nous a quittés à l'âge de 67 ans. Beaucoup d'entre nous se souviennent de sa frêle silhouette qui pourtant dégageait énergie et détermination.
Longtemps impliquée dans notre Régionale notamment comme trésorière, elle fut la garante des finances lors des journées nationales de 1993 organisées au Futuroscope.
Membre de l'IREM pendant une vingtaine d'années, elle participa activement à la fois à la rénovation des collèges, aux stages de formation de l'IREM, à la formation initiale des jeunes professeurs à l'IUFM et à la rédaction de nombreuses brochures IREM tout en mettant en application son savoir dans ses classes du collège de Vouneuil-sur-Vienne.
Membre active de la CII didactique, elle a participé à l'organisation de nombreux colloques et d'universités d'été. Son sens de l'organisation, sa rigueur étaient des qualités très appréciées.
Tous, membres de l'APMEP et formateurs IREM lui sont reconnaissants de tout ce qu'elle nous a apporté.

APMEP, IREM Bâtiment de mathématiques
Téléport 2—BP30179
Bd Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope CHASSENEUIL CEDEX

Site : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. apmep.poitiers@free.fr
Tél. 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication
S. Dassule-Debertonne
Comité de rédaction
F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne, J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon, J. Michel
Imprimerie
IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie
86962 Chasseneuil CEDEX

Éditeur
APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Siège Social
IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie
86962 Chasseneuil CEDEX
Dépôt légal
Mars 2016