Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

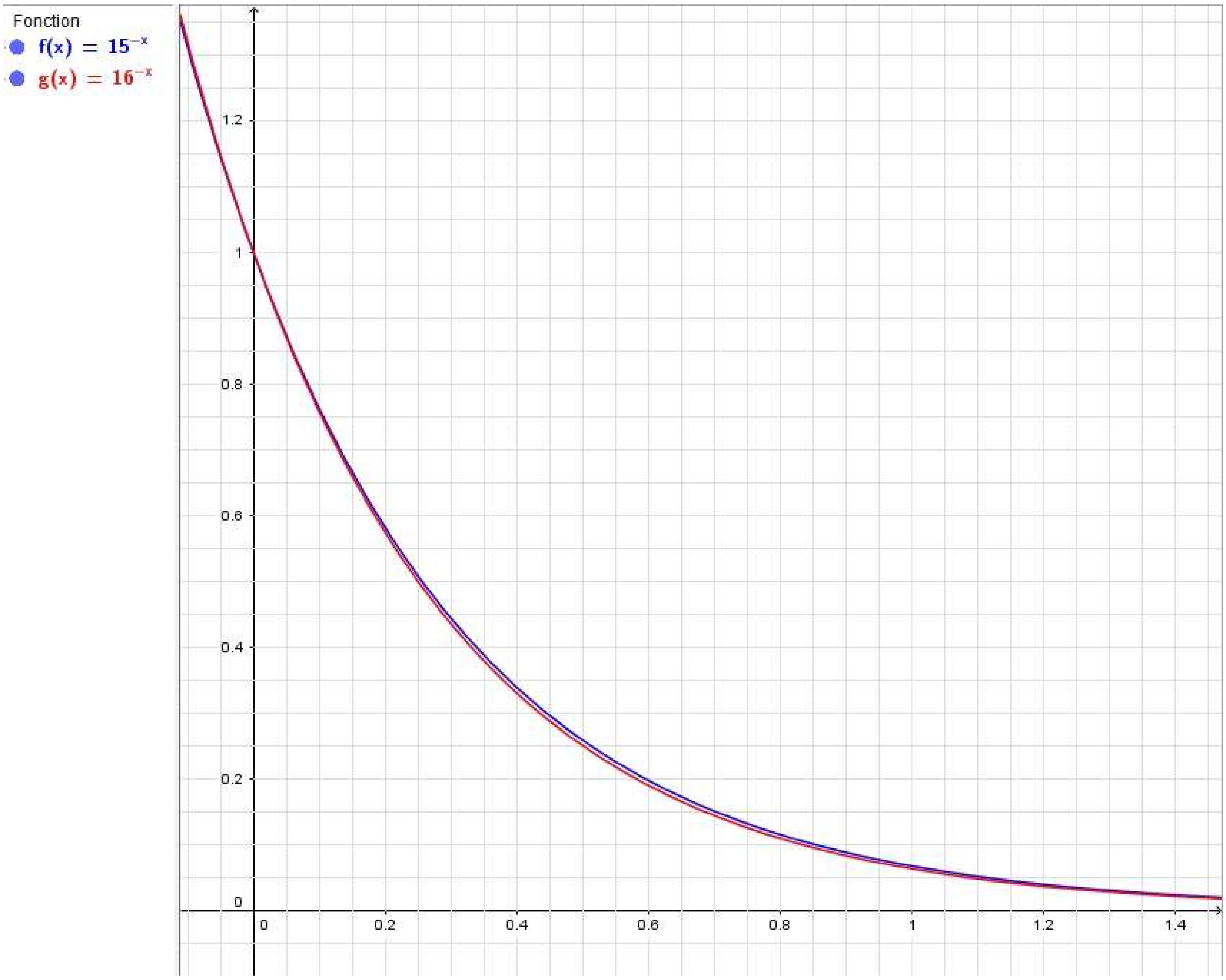
Des problèmes

103-1 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* : $\widehat{BAC}$

Passe-t-on si facilement de 15 à 16 ?

Il n'est pas aisé, sur l'intervalle [0 ; 1], de faire la distinction entre les représentations graphiques des fonctions f_{15} et f_{16} définies par $f_{15}(t) = 15^{-t}$ et $f_{16}(t) = 16^{-t}$. Pourtant l'outil informatique semble indiquer que les suites $\left(f_{15}^n(0)\right)_{n\geq 1}$ et $\left(f_{16}^n(0)\right)_{n\geq 1}$ n'ont pas le même comportement. Qu'en est-il ?

(f_{15}^n et f_{16}^n désignent les n^{e} itérées des fonctions f_{15} et f_{16} avec $f_{15}^1 = f_{15}$ et $f_{16}^1 = f_{16}$).



103-2 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Ce triangle ABC a une propriété curieuse : le côté [AB] mesure le double de la distance HM, où H est le pied de la hauteur issue de A et M est le milieu de [BC]. Quelles sont les valeurs possibles de l'angle $\widehat{ACB}$?

103-3 *de l'artiste Yvo Jacquier (Prague) transmis par Jean-Paul Guichard* :

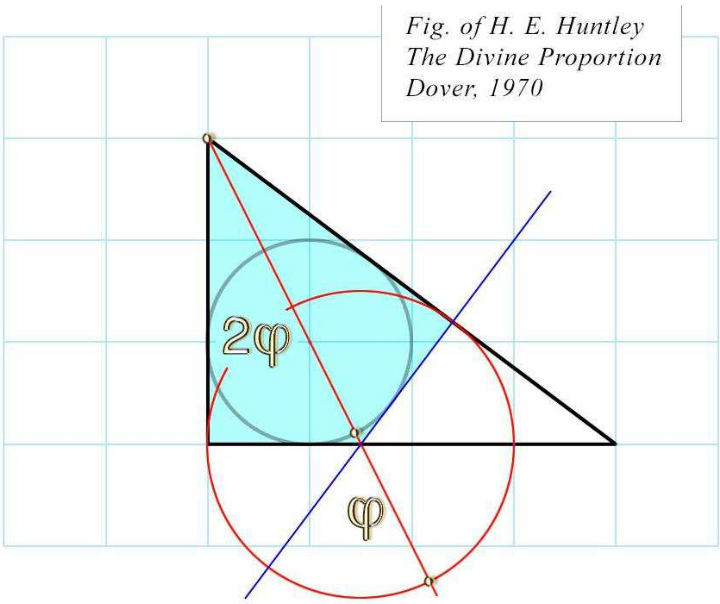


Figure accompagnée de l'énigmatique commentaire :
Huntley est passé par la puissance du point pour démontrer la tangente à l'hypoténuse. L'Égyptien préfère jouer au cerf-volant.

103-4 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Etant donné un entier naturel n, on note $f(n)$ le nombre obtenu en déplaçant le premier chiffre de l'écriture décimale de n à la fin. Par exemple, $f(3458) = 4583$. Déterminer tous les entiers n tels que :

1) n divise $f(n)$.
2) $f(n)$ divise n.

Des solutions

99-2 *de Jean-Christophe Laugier* :
Soit a, m, n des entiers tels que $a > 1$ et $m, n > 0$. Déterminer le PGCD de $a^m + 1$ et $a^n - 1$.

Solution de Frédéric de Ligt
On note $m \wedge n$ le PGCD des entiers m et n. On suppose tout d'abord que $m \wedge n = 1$ et, dans toute la suite, que $a > 1$.
Si $m > n$, en posant $\varepsilon = \pm 1$ et $\varepsilon' = \pm 1$, on a :
$$(a^m + \varepsilon) \wedge (a^n + \varepsilon') = \left(a^m + \varepsilon - \varepsilon\varepsilon'(a^n + \varepsilon')\right) \wedge (a^n + \varepsilon') = (a^m - \varepsilon\varepsilon' a^n) \wedge (a^n + \varepsilon') = (a^{m-n} - \varepsilon\varepsilon') \wedge (a^n + \varepsilon')$$
puisque $a^n \wedge (a^n + \varepsilon') = 1$.
Si $m < n$, on intervertit les rôles de m et n dans les calculs précédents.
En itérant cet algorithme à partir de $(a^m + 1) \wedge (a^n - 1)$, on aboutit au fait que ce PGCD ne peut être égal qu'à $(a + 1) \wedge (a + 1)$ ou à $(a + 1) \wedge (a - 1)$.
Si n est pair, $(a + 1)$ divise $(a^n - 1)$; mais m doit alors être impair et donc $(a + 1)$ divise aussi $(a^m + 1)$. On a finalement dans ce cas $(a^m + 1) \wedge (a^n - 1) = a + 1$.
Si n est impair, $(a + 1)$ ne divise pas $(a^n - 1)$ et donc $(a^m + 1) \wedge (a^n - 1) = (a + 1) \wedge (a - 1)$. Si a est pair ce PGCD vaut 1, alors que si a est impair ce PGCD vaut 2.
Si maintenant $m \wedge n = d > 1$, on pose $a' = a^d$ et on cherche $\left((a')^{\frac{m}{d}} + 1\right) \wedge \left((a')^{\frac{n}{d}} - 1\right)$. On est ramené au cas précédent :

- Si n/d est pair, on a $(a^m + 1) \wedge (a^n - 1) = a^d + 1$.
- Si n/d est impair, avec a pair on a $(a^m + 1) \wedge (a^n - 1) = 1$ et avec a impair on a $(a^m + 1) \wedge (a^n - 1) = 2$.

100-1 *de Frédéric de Ligt* :
La série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge. Mais qu'en est-il de la série harmonique incomplète $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ où A est l'ensemble des entiers naturels qui ne contiennent pas la séquence 100 dans leur écriture décimale.

Solution de l'auteur
Soit n un entier naturel. On note A_n l'ensemble des entiers naturels compris entre 10^n (inclus) et 10^{n+1} (exclu) qui ne contiennent pas la séquence 100 dans leur écriture décimale. On note b_n le nombre d'éléments de A_n.

On a la relation de récurrence : $b_{n+3} = 10b_{n+2} - b_n$ avec $b_0 = 9$; $b_1 = 90$; $b_2 = 899$.
En effet, on peut construire un entier de A_{n+3} à partir d'un entier de A_{n+2} de la façon suivante. On rajoute un des dix chiffres à la droite de son écriture. Si c'est un 0 qui est placé, le nouvel entier formé appartient en général encore à A_{n+3} mais à la condition que le nombre choisi dans A_{n+2} ne finisse pas à droite par la séquence 10. Combien y a-t-il de nombres de A_{n+2} qui finissent par la séquence 10 ? Autant qu'il y a d'éléments dans A_n.

On sait que l'expression générale de cette suite s'obtient en résolvant l'équation caractéristique associée $x^3 - 10x^2 + 1 = 0$. Cette équation admet 3 racines réelles x_1, x_2, x_3. Un solveur donne les approximations suivantes $x_1 \simeq 0{,}32144$; $x_2 \simeq -0{,}31142$; $x_3 \simeq 9{,}98998$. L'expression générale de b_n est de la forme $\alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n$ avec les trois réels α, β, γ déterminés par les valeurs de b_0, b_1 et b_2. En résolvant le système linéaire de 3 équations aux 3 inconnues α, β, γ :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 9 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 90 \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 899 \end{cases}$$

On trouve $\alpha \simeq 0{,}01146, \beta \simeq -0{,}01951$ et $\gamma \simeq 9{,}00805$.

Comme $\sum_{i\in A_n}\frac{1}{i} < \frac{b_n}{10^n}$, alors on a :

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in A_n}\frac{1}{i}\right) < \sum_{n=0}^{N}\frac{b_n}{10^n} = \alpha\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x_1}{10}\right)^n + \beta\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x_2}{10}\right)^n + \gamma\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x_3}{10}\right)^n.$$

Le nombre $\frac{x_k}{10}$, pour $k = 1$, 2 ou 3 est compris strictement entre -1 et 1, alors :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x_k}{10}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x_k}{10}}.$$

On a finalement l'inégalité :.

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in A_n}\frac{1}{i}\right) < \alpha\frac{1}{1-\frac{x_1}{10}} + \gamma\frac{1}{1-\frac{x_3}{10}}$$

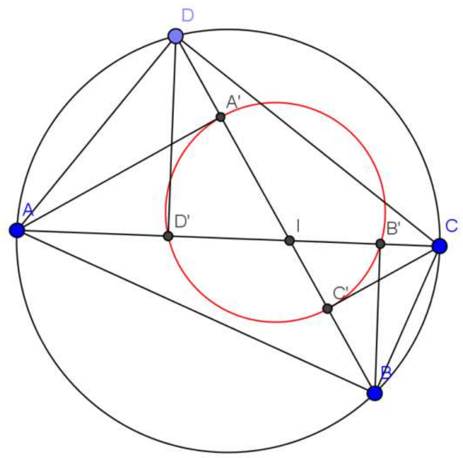
La suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in A_n}\frac{1}{i}\right)\right)_{N\geq 0}$ qui est croissante car constituée de termes positifs, est donc aussi majorée. La série harmonique incomplète $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ est par conséquent convergente.

101-3 *de Jacques Chayé* :
Soit ABCD un quadrilatère inscriptible. On projette orthogonalement A en A' et C en C' sur (BD), B en B' et D en D' sur (AC). Démontrer que A', B', C' et D' sont cocycliques.

Solution de l'auteur
Soit I le point d'intersection de [AC] et [BD]. Les points A, B, C et D sont cocycliques par hypothèse. Le cercle de diamètre [AB] passe par A' et B', les points A, B, A' et B' sont donc cocycliques. Le cercle de diamètre [CD] passe par C' et D', les points C, D, C' et D' sont donc cocycliques. On peut écrire les égalités :

$$\overline{IA'} \times \overline{IB} = \overline{IA} \times \overline{IB'}, \qquad \overline{IA} \times \overline{IC} = \overline{IB} \times \overline{ID}, \qquad \overline{IC'} \times \overline{ID} = \overline{IC} \times \overline{ID'}.$$

D'où, en multipliant ces égalités membre à membre et en simplifiant par le produit non nul $\overline{IA} \times \overline{IB} \times \overline{IC} \times \overline{ID}$, on a $\overline{IA'} \times \overline{IC'} = \overline{IB'} \times \overline{ID'}$. Donc les quatre points A', B', C' et D' sont cocycliques.



Remarque : la considération des triangles semblables IAA' et IBB', des triangles semblables IDD' et ICC' et enfin des triangles semblables IAB et IDC amènent facilement à $\overline{IA'} \times \overline{IC'} = \overline{IB'} \times \overline{ID'}$ mais cette égalité n'est pas une condition suffisante de cocyclicité des quatre points A', B', C' et D'.

102-3 *de Frédéric de Ligt* :
Montrer que $n^4 + 4^n$ n'est jamais un nombre premier quand $n \geq 2$.

Solution de l'auteur
Si l'entier n est pair c'est évident. On suppose donc que n est impair et par conséquent $\frac{n+1}{2}$ est un entier.

$$n^4 + 4^n = (n^2)^2 + 2^n \cdot 2^n = (n^2)^2 + (2^n)^2 + 2n^2 \cdot 2^n - 2n^2 \cdot 2^n = (n^2 + 2^n)^2 - 2^{n+1} \cdot n^2$$
$$= (n^2 + 2^n)^2 - \left(2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n\right)^2 = \left(n^2 + 2^n - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n\right) \cdot \left(n^2 + 2^n + 2^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

Mais les deux facteurs de ce produit sont deux entiers strictement supérieurs à 1. En effet c'est évident pour le second facteur et pour le premier facteur on a les égalités suivantes :

$$n^2 + 2^n - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n = \left(n - 2^{\frac{n}{2}}\right)^2 + 2n \cdot 2^{\frac{n}{2}} - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n = \left(n - 2^{\frac{n}{2}}\right)^2 + n \cdot 2^{\frac{n}{2}+1} - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n$$
$$= \left(n - 2^{\frac{n}{2}}\right)^2 + n \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(2 - 2^{\frac{1}{2}}\right)$$

Le premier terme de cette somme est positif et le second est strictement plus grand que 1.