Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l' Enseignement
Public

79 86
17 16

*Régionale de
Poitou-Charentes*

Corol'aire

Décembre 2015 n°103

Liberté, Égalité, Fraternité

Sébastien Dassule-Debertonne

L'année 2015 s'achève, comme elle a commencé, par des attaques intérieures et extérieures envers les valeurs fondatrices de la République.
Notre devise est entamée de chaque côté.
Notre travail d'éducateur et de formateur est profondément questionné, non parce que l'École aurait une responsabilité directe, mais parce nous avons face à nous des esprits très malléables qu'il faut accompagner avec autant de prudence que d'exigence.
On a tendance à penser parfois que les mathématiques nous tiennent à distance des sujets épineux. Et on est bien content de n'être pas professeur d'histoire-géographie. C'est qu'alors on ne veut pas entendre, à l'évocation d'Al-Khwarizmi, un bruissement dans la classe, quand ce n'est pas une revendication d'appartenance à cette civilisation qui a tant apporté à la science.
Nous avons toute notre part à prendre pour que tous les jeunes se reconnaissent dans ce qu'on leur enseigne. L'histoire des mathématiques, et plus largement des sciences, ne peut que leur profiter, en amenant les élèves à connaitre les intellectuels qui ont fait avancer les mathématiques.

L'éducation est une arme.

Illustration : Xavier Brandeis (ESADSE)

Cependant, ce volet historique ne doit pas être notre seule contribution. Nous devons, plus encore que maintenant, faire que ce que nous enseignons éclaire le monde dans lequel les jeunes vivent. Et nous savons tous l'impact des mathématiques sur celui-ci.
Cela demande une évolution plus nette encore des pratiques, même si une inflexion a déjà eu lieu en ce sens.
Mais il est nécessaire, aussi, que les jeunes aient du temps pour approfondir les notions, pour comprendre et donner du sens à ce qu'on leur enseigne. C'est le vœu que je formule pour cette nouvelle année qui se dessine et que je vous souhaite pleine de bonheur et de partage.

Sommaire

Edito p.1
Rallye p.2
Des sacs bleus dans la ville p.3
Histoire de prix..... p.6
Les mathématiques du Père Noël p.8
Rubricollage..... p.9
Expo puzzle, les défis p.13

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Groupe Rallye

Le 16 novembre 2015, les documents concernant le Rallye (lettre aux chefs d'établissement, lettre aux collègues, informations diverses sur le Rallye, formulaire d'inscription pour l'épreuve 2016, rappel pour aller voir le site de l'APMEP) ont été mis sous enveloppe puis remis au Rectorat qui s'est chargé de l'envoi dans les établissements. Nous l'en remercions vivement. Si vous ne les avez toujours pas reçus, vous pouvez vous les procurer sur le site de la Régionale. Mais, contrairement aux années précédentes, les épreuves d'entraînement n'étaient pas dans cet envoi. En effet, dans certains collèges, seulement un ou deux niveaux participent, et il est inutile d'envoyer les épreuves dans des établissements qui de toute façon ne participeront pas. Les épreuves d'entraînement de tous les niveaux sont donc disponibles sur le site de la Régionale APMEP.

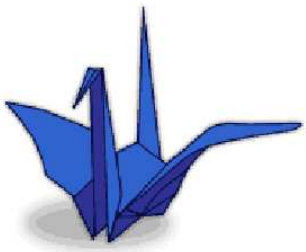
Comme nous l'avions annoncé dans le Corol'aire de juin, les élèves vont se mobiliser sur les pliages avec des activités proposées en trois parties : recherche documentaire, pliages mathématiques et pliages créatifs. Pour cela, nous avons mis sur le site de la Régionale des compléments et aides, en particulier des vidéos, pour la préparation de cette partie sur les pliages.

Dans les épreuves d'entraînement, un certain nombre de documents sont signalés par un astérisque. Ces documents sont sur le site de la Régionale (http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article244).

Les droits d'inscription sont inchangés : 5 euros par classe inscrite. Le fait de proposer au téléchargement les épreuves d'entraînement nous a permis d'envoyer le courrier et de lancer les inscriptions plus tôt que les années précédentes. Ainsi des établissements ont pu déjà inscrire des classes et régler les droits d'inscription sur les crédits 2015.

La date limite d'inscription est le 11 janvier 2016 et l'épreuve officielle se déroulera le mardi 15 mars 2016 pendant la Semaine Nationale des Mathématiques. Dans l'épreuve officielle, l'équipe va proposer quelques exercices sur le sport pour faire un clin d'œil au thème de cet événement.

L'équipe du Rallye se réjouit de voir, qu'à ce jour, 220 classes de collège, 36 de lycée et 7 de lycée professionnel, soit un peu plus de 6 800 élèves, sont déjà inscrites.



Elle se réjouit aussi que six collègues aient répondu à l'appel que nous avions lancé dans le Corol'aire de Septembre pour nous aider à la correction des épreuves. Nous les en remercions vivement.

Soyez nombreux à participer **le 15 mars 2016**.

Des sacs bleus dans la ville

Cécile Cheminard , Leslie Letard et Daniel Guiraud

Mi-octobre. Après cette première salve de semaines de cours, et à l'heure où certains se débarrassent des copies tandis que d'autres commencent par une procrastination bien méritée, nous prenons la route de Laon, bien plus au nord que Poitiers, pour rejoindre nos collègues de mathématiques venus de la France entière.

Accueil à la maison des Arts et Loisirs, juste devant la cathédrale : un café et quelques gâteaux pour nous réchauffer, un beau sac bleu offert par la Région Picardie, rempli de documents divers, d'exemplaires gratuits de revues, de jeux concours, et de l'indispensable livret du congressiste. On peut d'ores et déjà acheter l'objet de cette année : un mug aux couleurs des Journées Nationales de l'APMEP à Laon.

Butin rapporté des Journées Nationales

Arrivée en ordre dispersé, tout l'après-midi, alors que les orateurs se succèdent dans la grande salle du théâtre : représentants de la ville, du conseil départemental, de l'inspection, de l'Adirem, du CFEM, de l'association femmes et mathématiques pour finir par le discours du président de l'APMEP.

Après une pause, conférence inaugurale de Michèle Artigue « Mathématiques et culture ». Voyage dans la diversité des pratiques sur toute la planète. De quoi prendre du recul sur nos propres certitudes.

Dimanche, 8h45, arrivée à la Cité Scolaire dans un léger brouillard. Dans les couloirs très ventilés, presque à l'extérieur, des élèves méritantes du CVL vendent du café et des friandises au bénéfice de leurs actions humanitaires. Bravo à elles ! Un peu partout, des bénévoles en blouson bleu, prêts à nous renseigner et nous guider.

Premier atelier. Nous avons la joie et la surprise de constater que nous avons choisi le même, parmi un choix de 34 ateliers différents ! Histoire des maths, pédagogie, jeux, maths dans la magie ou la musique, le choix est vaste. Dans notre atelier, nous parlons de variables, de preuves, de logiques, en compagnie du truculent René Cori. Une remise à niveau passionnante sur la manière de formuler les théorèmes : rien que cela valait la peine de venir jusqu'ici.

10h, alors que certains vont aux commissions nationales, nous décidons de visiter les stands. Les fabricants de calculatrices nous expli-

quent l'origine du mode examen. Des centaines de publications nous tentent, revues Apmep en particulier, mais aussi des jeux, des logiciels. Beaucoup d'idées pour repartir avec l'envie de tester de nouvelles méthodes.

Après le repas, chacun se dirige vers la conférence choisie. Laon est calme, le dimanche. On y voit surtout des gens allant d'un bout à l'autre, tous avec un étrange sac bleu, signe de ralliement et de tutoiement à travers la ville. Difficile de ne pas nous repérer !

Après les conférences, retour à la cité scolaire pour la réunion de la Régionale. Toujours un grand moment car cela permet de retrouver des gens connus, collègues de nos établissements, ou rencontrés à l'occasion de stages, ou de la journée de la Régionale à St Jean d'Angély. Clairement, le but principal est de décider du lieu du repas de la Régionale du lundi soir. Les lyonnais en profitent pour passer nous voir et nous présenter la belle affiche de l'an prochain.

Lundi, nouveaux ateliers : 35 choix, encore ! Un atelier nous explique comment faire participer les élèves à la rédaction des propriétés, pour que notre langage mathématique, si rigoureux, prenne du sens dans leurs esprits.

Un autre atelier nous montre le lien entre l'art et les mathématiques à travers divers exemples : La mélancolie de Dürer, une peinture de Raphaël visible au Vatican, la Sagrada Familia et les anamorphoses coniques.

Retour au grand théâtre pour les questions d'actualité. Un inspecteur général est présent, pour répondre à nos questions, nombreuses, sur le collège, le lycée. Le temps manque pour tout développer. La réforme et l'algorithmique sont au cœur des débats.

À midi, les lyonnais (encore eux) nous offrent charcuterie, fromage et beaujolais, et les sacs bleus envahissent encore la ville, et se retrouvent aux 4 conférences de l'après-midi. Belle conférence sur le sens du nombre et les difficultés cognitives des enfants. Instants rares où nous prenons le temps de nous pencher sur les fondements de la pédagogie.

Dernier tour en ville : la réderie des maths nous attend. Dans un ancien cloître, on trouve pêle-mêle des produits locaux, des ateliers de jeux, de nombreux jeux de bistrot, en bois, ancêtres des flippers et autres jeux vidéo, pendant qu'en face, à la cité scolaire, on peut faire un tournoi de mini-bridge ou de Mathador®.

Le soir, tandis que se déroule le buffet officiel, nous goûtons les (très) copieuses spécialités locales. L'année

Erratum

Dans le numéro précédent, nous vous donnions le compte rendu du dernier comité régional.

Un malencontreux copier-coller a daté ce comité du 10 juin 2015. Il fallait lire 29 septembre 2015 bien sûr puisque, vous le savez nous nous réunissons tous les trimestres.

Le prochain comité aura lieu le 13 janvier dans les locaux de l'IREM.

dernière, nous avions calculé différentes suites de Fibonacci sur les nappes (en papier !).

Mardi. Déjà le dernier matin. Assemblée générale de l'association, sujets variés autour de la vie de l'association. Les lyonnais (toujours eux) reviennent et nous présentent leur région, les lieux des Journées de 2016, nous font chanter. Ultime conférence de Samuel Petite qui nous donne quelques rudiments de la théorie des pavages. Passionnant, même si certains somnolent, fatigués par ces journées intenses.

Et déjà l'heure de se quitter. 4 journées fatigantes, mais passionnantes. De quoi recharger nos batteries d'enseignants, nous donner envie de faire aimer les mathématiques à nos élèves, plein d'idées, de documents. L'année prochaine à Lyon ? Oh, on risque bien de se laisser tenter, après avoir découvert les Journées Nationales de l'APMEP l'année dernière à Toulouse. Dans deux ans à Nantes. Dans trois ans à Bordeaux. Voyager pour le plaisir des maths, c'est ça, les Journées Nationales !

Réunion de la Régionale aux Journées Nationales

Jacky Citron

La Régionale a réuni une dizaine de personnes sur la quinzaine inscrite.

Nous avons évoqué les questions du moment sur les futures réformes.

Au lycée nous souhaitons que l'APMEP se concentre sur l'essentiel (horaires, formation) et qu'elle anticipe sur les contenus et envisage de travailler avec les « matières voisines ».

Au collège c'est le flou qui règne aussi bien sur les textes que sur la mise en place.

Dernier point important : déterminer le nombre de participants au repas traditionnel des pictocharentais le lundi soir aux Arcades.

La séance est levée sur cette perspective agréable.

Annonce de Parution

À l'occasion du numéro spécial sur **la définition en mathématiques** de la revue Repères IREM (n°100, juillet 2015), Emmanuel Claisse de l'IREM de Lorraine a recensé des articles parus dans repère IREM susceptibles de faire écho à cette thématique.

Cette liste, d'une cinquantaine d'articles, est disponible sur notre site internet à l'adresse http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article248

Si la définition en mathématiques est le thème qui unit les différents articles, on parcourt avec eux l'analyse comme les probabilités en passant par la démonstration ou la narration de recherche.

Cette liste est donc une mine, qui peut s'avérer utile aux étudiants de master MEEF dans la recherche bibliographique pour un mémoire ou aux candidats au CAPES dans la préparation de l'épreuve orale d'exercices, mais aussi à chaque professeur en poste pour approfondir sa réflexion.

La majorité des articles sont consultables en ligne à l'adresse :

http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique24.

Histoire de prix

IREM de Poitiers, groupe collège

Épisode 5 : monnaie et prix à Rome

Le système monétaire de Rome sous l'Empire

L'unité est le denier qui est une pièce d'argent :
3,40 g d'argent sous Néron (4,5 g en 211 av. J.-C.)

Monnaie d'argent :
Quinaire d'argent = ½ denier
Cistophore (en Asie Mineure) = 3 deniers = 4 drachmes grecques

Monnaie d'or :
Aureus = 25 deniers ; or : 7,20 g sous Néron
Quinaire d'or = ½ aureus

Monnaie de laiton :
Sesterce = ¼ de denier ; laiton : 27 g sous Néron
Dupondius = ½ sesterce

Monnaie de cuivre :
As = ¼ de sesterce ; cuivre : 11 g sous Néron
Semis = ½ as
Quadrans = ¼ as

Quelques salaires à la fin du I^e siècle ap. J.-C.
Préfet de camp = 600 aureus / an
Centurion = 150 aureus / an
Garde prétorien = 116 aureus et 20 deniers / an
Légionnaire = 9 aureus / an
Maçon, charpentier, forgeron = 3 sesterces / jour
Ouvrier de ferme = 1 sesterce et 1 as / jour
Professeur (par élève) = 2 sesterces / mois

Quelques prix à la fin du Ier siècle ap. J.-C.
Un pichet de vin ordinaire = 1 as
Un pichet de vin grand cru = 1 à 5 sesterces
Une cruche d'huile d'olive = 1 sesterce
Une cruche de garum = 150 sesterces
Un modius de blé = 3 sesterces
Un modius de froment = 30 sesterces
Un esclave commun = 20 à 60 aureus
Une lampe = 1 as
Une assiette = 1 as
Une assiette en argent = 3 aureus 18 deniers 3 sesterces
Une tunique = 15 sesterces
Un lavage de tunique = 4 sesterces
Un mulet = 5 aureus 5 deniers
5 œufs = 1 as
Un lapin = 2 sesterces
Un poulet = 1 as
Un loyer de maison = 20 à 200 aureus

Denier (180 ap. J.-C.)

Sesterce (69 ap. J.-C.)

Dupondius (138 ap. J.-C.)

Aureus (vers 280 av. J.-C.)

As (vers 100 av. J.-C.)

Les riches à la fin du Ie siècle ap. J.-C.

Pour être sénateur il faut posséder au moins 1 million de sesterces. La fortune de Pline le Jeune est estimée à 30 millions de sesterces. Celle de Pallas, affranchi de l'empereur Claude, est de 400 millions de sesterces. Le célèbre cuisinier Apicius se suicide parce qu'il n'a plus que 10 millions de sesterces.

Le système pondéral romano-byzantin

Du IVe siècle av. J.-C. à l'empereur Dioclétien (284-305) les unités de poids sont les suivantes : 1 livre (326 g) vaut 12 onces, 1 once vaut 24 scrupules, 1 scrupule (ou grammarion pesant 1,13 g, ancêtre de notre gramme) vaut 24 grains d'orge nue.

Le grain d'orge nue semble être l'étalon initial dans l'Antiquité de par sa qualité de constance de poids quand il est pris au milieu de l'épi. Le grain d'orge nue a été estimé à 0,0472 g.

À partir du IVe siècle ap. J.-C. sous l'empereur Dioclétien : 1 livre vaut 12 onces, 1 once vaut 6 hexagions, 1 hexagion (ou exagium ou sextule) vaut 4 scrupules, 1 scrupule vaut 6 siliques, 1 silique (aussi appelé carat ou kération) vaut 4 grains d'orge nue.

À partir de cette époque il existe deux étalons de base : le grain d'orge nue et le grain de blé. On a la relation suivante quant au poids : 4 grains d'orge nue = 5 grains de blé. Et donc 1 grain d'orge nue = ¼ carat (pesée de monnaie et de métaux précieux) alors que 1 grain de blé = 1/5 carat (pour l'usage médicinal).

Le système pondéral est duodécimal.

Le système de monnaie romano-byzantin

Durant l'Antiquité la valeur des pièces est souvent liée à leur poids et aux alliages qui les composent : or, argent et bronze.

Au IVe siècle. av. J.-C., l'as (lingot de bronze) pesait une livre, le quincussis valait 5 as, le quadrussis valait 4 as.

Vers 280 av. J.-C, le denier d'argent valait 10 as de bronze et pesait 4 scrupules, donc le quinaire (ou demi-denier) pesait 2 scrupules et valait 5 as de bronze, et la petite sesterce d'argent (ou demi-quinaire) pesait un scrupule et valait 2,5 as de bronze.

Vers 87 av. J.-C., circulaient l'aureus d'or pesant 1/60 livre, le demi-aureus (ou quinaire d'or), denier d'argent (quinaire d'argent).

D'Auguste à Dioclétien, étaient en circulation l'aureus, le demi-aureus (quinaire d'or), le denier d'argent valant 1/25 aureus, le quinaire d'argent (le demi-denier), la sesterce (bronze) valait ¼ de denier, le dupondius (en bronze) valait 1/8 denier, l'as (en bronze) valait 1/6 denier, le semis (en cuivre) valait ½ as, le quadrans (en cuivre) valait ¼ as. Sous Néron fut introduit le denier de 3 scrupules. Ce nouveau système permettait d'exprimer la masse du denier en nombres entiers dans la livre et l'once (96 deniers dans la livre et 8 deniers dans l'once) qui étaient les unités d'usage. Sous Dioclétien au poids d'un hexagion correspond la pièce nommée solidus (en or) encore appelée sou d'or qui correspond à peu près à une solde mensuelle : sa valeur est de 1/72 livre. On avait aussi le demi-sou d'or, le tremissis (1/3 sou d'or), et la silique (en or) de poids un silique correspondant à une solde journalière ; il existait aussi une silique d'argent et enfin une demi-silique d'argent.

Vers 615, on introduisit l'hexagramme en argent qui pesait 6 scrupules.

Maths et Noël

En cette époque de fêtes, Frédéric de Ligt nous propose deux articles trouvés sur internet. On peut se dire que la magie des mathématiques et la magie de Noël ne sont pas tout à fait compatibles.

Mon beau sapin, pour info !

$$B = \frac{\sqrt{17}}{20}h \qquad L = \pi h$$
$$G = \frac{13\pi}{8}h \qquad S = \frac{h}{10}$$

h : hauteur de l'arbre (en cm)
B : nombre de boules
G : longueur des guirlandes (en cm)
L : longueur des lumières (en cm)
S : taille de l'étoile (en cm)

Équation du sapin parfait, par Nicole Wrightham et Alex Craig, étudiants de l'Université de Sheffield (2012). Étude commandée par la chaîne de magasins Debenhams.

L'équation aurait demandé deux heures complètes de travail acharné...

Source : http://eljjdx.canalblog.com/archives/2015/04/24/31833344.html

À vérifier quand même...

Le Père Noël peut-il mathématiquement exister ?

Difficile dans un monde cartésien de croire à un vieux monsieur habillé de rouge qui se faufilerait dans toutes les cheminées du monde pour y déposer des cadeaux.

Le Père Noël passerait 0,001 seconde par maison

Première donnée: il y a deux milliards de personnes ayant moins de 18 ans dans le monde. Parmi ces enfants, les matheux ont exclu du calcul ceux qui ne sont pas de religion chrétienne et qui s'en fichent bien du Père Noël et du petit Jésus. Sans les musulmans, les hindous, les Juifs et les bouddhistes, il ne reste que 378 millions d'enfants qui attendent avec impatience le 25 décembre.

Avec en moyenne 3,5 enfants par foyer dans le monde, on arrive à 91,8 millions de maisons à desservir pour les rennes du Père Noël. Bien sûr, le traîneau doit marquer tous les stops, car on fait l'hypothèse qu'il y a bien un enfant sage dans chaque maison. Pour faire cela, Papa Noël a 31 heures si on considère qu'il voyage d'est en ouest et que son traîneau suit les fuseaux horaires autour du globe. Il faut donc qu'il fasse 822,6 descentes de cheminée par seconde, ce qui lui laisse un peu plus de 0,001 seconde pour distribuer les cadeaux dans chaque maison. Ereintant.

Suite page 14

Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

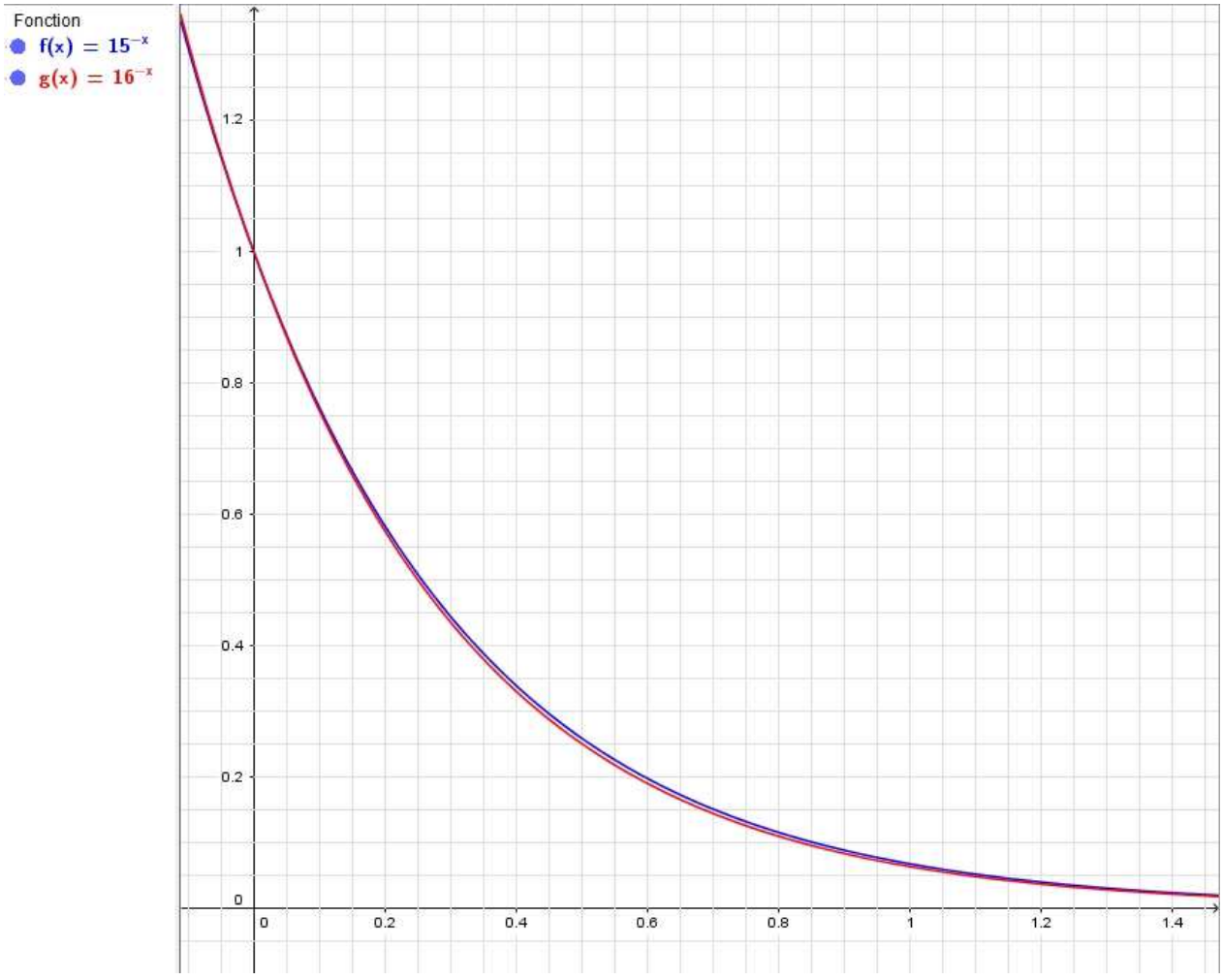
Des problèmes

103-1 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* : $\widehat{BAC}$

Passe-t-on si facilement de 15 à 16 ?

Il n'est pas aisé, sur l'intervalle [0 ; 1], de faire la distinction entre les représentations graphiques des fonctions f_{15} et f_{16} définies par $f_{15}(t) = 15^{-t}$ et $f_{16}(t) = 16^{-t}$. Pourtant l'outil informatique semble indiquer que les suites $\left(f_{15}^{n}(0)\right)_{n\geq 1}$ et $\left(f_{16}^{n}(0)\right)_{n\geq 1}$ n'ont pas le même comportement. Qu'en est-il ?

(f_{15}^{n} et f_{16}^{n} désignent les n^{e} itérées des fonctions f_{15} et f_{16} avec $f_{15}^{1} = f_{15}$ et $f_{16}^{1} = f_{16}$).



103-2 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Ce triangle ABC a une propriété curieuse : le côté [AB] mesure le double de la distance HM, où H est le pied de la hauteur issue de A et M est le milieu de [BC]. Quelles sont les valeurs possibles de l'angle $\widehat{ACB}$?

103-3 *de l'artiste Yvo Jacquier (Prague) transmis par Jean-Paul Guichard* :

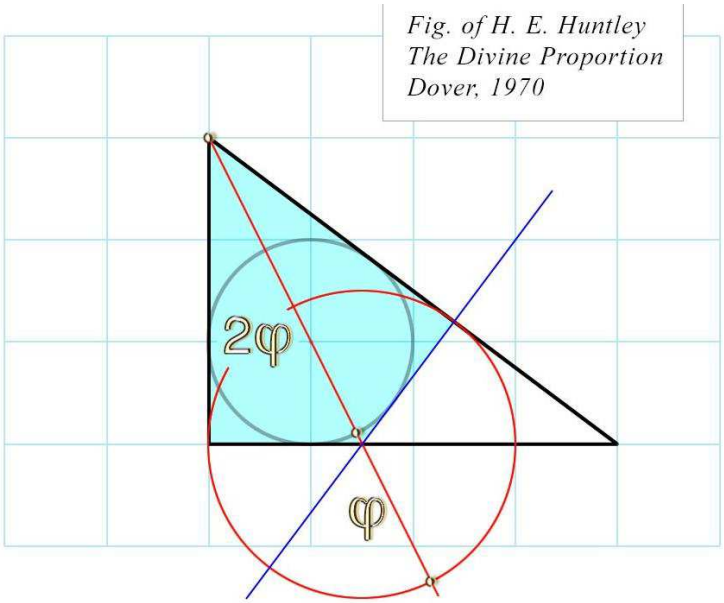


Figure accompagnée de l'énigmatique commentaire :
Huntley est passé par la puissance du point pour démontrer la tangente à l'hypoténuse. L'Égyptien préfère jouer au cerf-volant.

103-4 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Etant donné un entier naturel n, on note $f(n)$ le nombre obtenu en déplaçant le premier chiffre de l'écriture décimale de n à la fin. Par exemple, $f(3458) = 4583$. Déterminer tous les entiers n tels que :

1) n divise $f(n)$.
2) $f(n)$ divise n.

Des solutions

99-2 *de Jean-Christophe Laugier* :
Soit a, m, n des entiers tels que $a > 1$ et $m, n > 0$. Déterminer le PGCD de $a^m + 1$ et $a^n - 1$.

Solution de Frédéric de Ligt

On note $m \wedge n$ le PGCD des entiers m et n. On suppose tout d'abord que $m \wedge n = 1$ et, dans toute la suite, que $a > 1$.
Si $m > n$, en posant $\varepsilon = \pm 1$ et $\varepsilon' = \pm 1$, on a :
$(a^m + \varepsilon) \wedge (a^n + \varepsilon') = \left(a^m + \varepsilon - \varepsilon\varepsilon'(a^n + \varepsilon')\right) \wedge (a^n + \varepsilon') = (a^m - \varepsilon\varepsilon' a^n) \wedge (a^n + \varepsilon') = (a^{m-n} - \varepsilon\varepsilon') \wedge (a^n + \varepsilon')$
puisque $a^n \wedge (a^n + \varepsilon') = 1$.
Si $m < n$, on intervertit les rôles de m et n dans les calculs précédents.
En itérant cet algorithme à partir de $(a^m + 1) \wedge (a^n - 1)$, on aboutit au fait que ce PGCD ne peut être égal qu'à $(a + 1) \wedge (a + 1)$ ou à $(a + 1) \wedge (a - 1)$.
Si n est pair, $(a + 1)$ divise $(a^n - 1)$; mais m doit alors être impair et donc $(a + 1)$ divise aussi $(a^m + 1)$. On a finalement dans ce cas $(a^m + 1) \wedge (a^n - 1) = a + 1$.
Si n est impair, $(a + 1)$ ne divise pas $(a^n - 1)$ et donc $(a^m + 1) \wedge (a^n - 1) = (a + 1) \wedge (a - 1)$. Si a est pair ce PGCD vaut 1, alors que si a est impair ce PGCD vaut 2.
Si maintenant $m \wedge n = d > 1$, on pose $a' = a^d$ et on cherche $\left((a')^{\frac{m}{d}} + 1\right) \wedge \left((a')^{\frac{n}{d}} - 1\right)$. On est ramené au cas précédent :

- Si n/d est pair, on a $(a^m + 1) \wedge (a^n - 1) = a^d + 1$.
- Si n/d est impair, avec a pair on a $(a^m + 1) \wedge (a^n - 1) = 1$ et avec a impair on a $(a^m + 1) \wedge (a^n - 1) = 2$.

100-1 *de Frédéric de Ligt* :

La série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge. Mais qu'en est-il de la série harmonique incomplète $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ où A est l'ensemble des entiers naturels qui ne contiennent pas la séquence 100 dans leur écriture décimale.

Solution de l'auteur

Soit n un entier naturel. On note A_n l'ensemble des entiers naturels compris entre 10^n (inclus) et 10^{n+1} (exclu) qui ne contiennent pas la séquence 100 dans leur écriture décimale. On note b_n le nombre d'éléments de A_n.

On a la relation de récurrence : $b_{n+3} = 10b_{n+2} - b_n$ avec $b_0 = 9$; $b_1 = 90$; $b_2 = 899$.
En effet, on peut construire un entier de A_{n+3} à partir d'un entier de A_{n+2} de la façon suivante. On rajoute un des dix chiffres à la droite de son écriture. Si c'est un 0 qui est placé, le nouvel entier formé appartient en général encore à A_{n+3} mais à la condition que le nombre choisi dans A_{n+2} ne finisse pas à droite par la séquence 10. Combien y a-t-il de nombres de A_{n+2} qui finissent par la séquence 10 ? Autant qu'il y a d'éléments dans A_n.

On sait que l'expression générale de cette suite s'obtient en résolvant l'équation caractéristique associée $x^3 - 10x^2 + 1 = 0$. Cette équation admet 3 racines réelles x_1, x_2, x_3. Un solveur donne les approximations suivantes $x_1 \simeq 0{,}32144$; $x_2 \simeq -0{,}31142$; $x_3 \simeq 9{,}98998$. L'expression générale de b_n est de la forme $\alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n$ avec les trois réels α, β, γ déterminés par les valeurs de b_0, b_1 et b_2. En résolvant le système linéaire de 3 équations aux 3 inconnues α, β, γ :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 9 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 90 \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 899 \end{cases}$$

On trouve $\alpha \simeq 0{,}01146, \beta \simeq -0{,}01951$ et $\gamma \simeq 9{,}00805$.

Comme $\sum_{i\in A_n}\frac{1}{i} < \frac{b_n}{10^n}$, alors on a :

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in A_n}\frac{1}{i}\right) < \sum_{n=0}^{N}\frac{b_n}{10^n} = \alpha\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x_1}{10}\right)^n + \beta\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x_2}{10}\right)^n + \gamma\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x_3}{10}\right)^n.$$

Le nombre $\frac{x_k}{10}$, pour $k = 1$, 2 ou 3 est compris strictement entre -1 et 1, alors :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x_k}{10}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x_k}{10}}.$$

On a finalement l'inégalité :.

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in A_n}\frac{1}{i}\right) < \alpha\frac{1}{1-\frac{x_1}{10}} + \gamma\frac{1}{1-\frac{x_3}{10}}$$

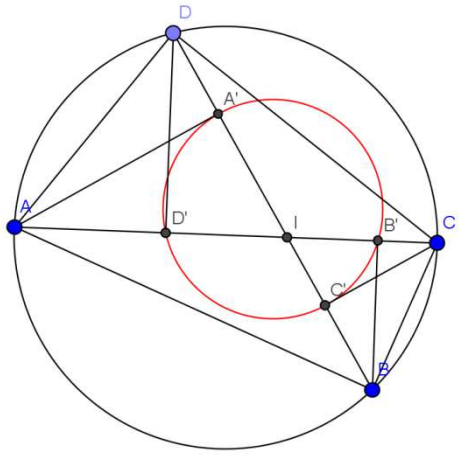
La suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in A_n}\frac{1}{i}\right)\right)_{N\geq 0}$ qui est croissante car constituée de termes positifs, est donc aussi majorée. La série harmonique incomplète $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ est par conséquent convergente.

101-3 *de Jacques Chayé* :
Soit ABCD un quadrilatère inscriptible. On projette orthogonalement A en A' et C en C' sur (BD), B en B' et D en D' sur (AC). Démontrer que A', B', C' et D' sont cocycliques.

Solution de l'auteur
Soit I le point d'intersection de [AC] et [BD]. Les points A, B, C et D sont cocycliques par hypothèse. Le cercle de diamètre [AB] passe par A' et B', les points A, B, A' et B' sont donc cocycliques. Le cercle de diamètre [CD] passe par C' et D', les points C, D, C' et D' sont donc cocycliques. On peut écrire les égalités :

$$\overline{IA'} \times \overline{IB} = \overline{IA} \times \overline{IB'}, \qquad \overline{IA} \times \overline{IC} = \overline{IB} \times \overline{ID}, \qquad \overline{IC'} \times \overline{ID} = \overline{IC} \times \overline{ID'}.$$

D'où, en multipliant ces égalités membre à membre et en simplifiant par le produit non nul $\overline{IA} \times \overline{IB} \times \overline{IC} \times \overline{ID}$, on a $\overline{IA'} \times \overline{IC'} = \overline{IB'} \times \overline{ID'}$. Donc les quatre points A', B', C' et D' sont cocycliques.



Remarque : la considération des triangles semblables IAA' et IBB', des triangles semblables IDD' et ICC' et enfin des triangles semblables IAB et IDC amènent facilement à $\overline{IA'} \times \overline{IC'} = \overline{IB'} \times \overline{ID'}$ mais cette égalité n'est pas une condition suffisante de cocyclicité des quatre points A', B', C' et D'.

102-3 *de Frédéric de Ligt* :
Montrer que $n^4 + 4^n$ n'est jamais un nombre premier quand $n \geq 2$.

Solution de l'auteur
Si l'entier n est pair c'est évident. On suppose donc que n est impair et par conséquent $\frac{n+1}{2}$ est un entier.

$$n^4 + 4^n = (n^2)^2 + 2^n \cdot 2^n = (n^2)^2 + (2^n)^2 + 2n^2 \cdot 2^n - 2n^2 \cdot 2^n = (n^2 + 2^n)^2 - 2^{n+1} \cdot n^2$$
$$= (n^2 + 2^n)^2 - \left(2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n\right)^2 = \left(n^2 + 2^n - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n\right) \cdot \left(n^2 + 2^n + 2^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

Mais les deux facteurs de ce produit sont deux entiers strictement supérieurs à 1. En effet c'est évident pour le second facteur et pour le premier facteur on a les égalités suivantes :

$$n^2 + 2^n - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n = \left(n - 2^{\frac{n}{2}}\right)^2 + 2n \cdot 2^{\frac{n}{2}} - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n = \left(n - 2^{\frac{n}{2}}\right)^2 + n \cdot 2^{\frac{n}{2}+1} - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n$$
$$= \left(n - 2^{\frac{n}{2}}\right)^2 + n \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(2 - 2^{\frac{1}{2}}\right)$$

Le premier terme de cette somme est positif et le second est strictement plus grand que 1.

Expo puzzle : les défis

Dominique Gaud

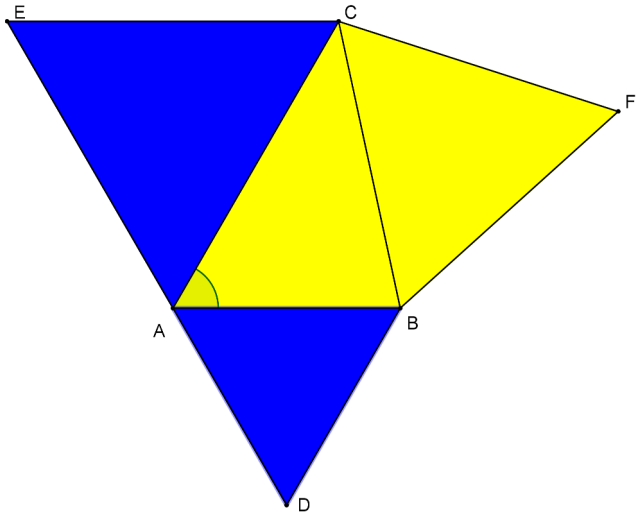
Votre régionale APMEP, en collaboration avec l'IREM, et l'Espace Mendès-France de Poitiers conçoivent actuellement une exposition consacrée aux puzzles et à leurs applications aux mathématiques.
Cette exposition se déroulera de septembre 2016 à juin 2017 dans les locaux de l'Espace Mendès-France, puis sera disponible pour tous les établissements qui en feront la demande après, comme l'étaient les précédentes expositions (Expocube, Comment tu comptes ?, Courbes).
Nous vous proposerons toute cette année, en liaison avec cette exposition, quelques défis. Vous pouvez nous soumettre vos solutions mais aussi des séquences dans les classes que ces défis ne manqueront pas de vous faire concevoir.
Il suffit de les faire parvenir à : sdassule.apmep@gmail.com

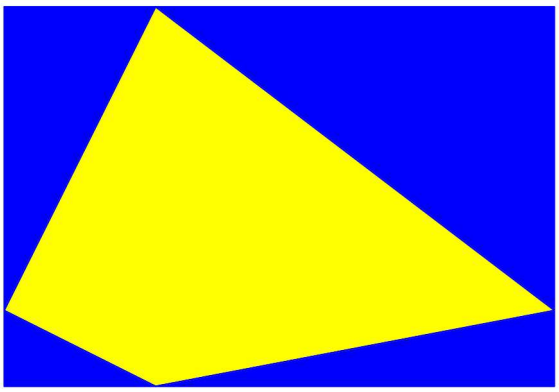
Exercice 1

ABC est un triangle quelconque dont l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 60°.

On construit extérieurement 3 triangles équilatéraux.

Par un découpage, prouver que l'aire du quadrilatère ABFC est la somme des aires des triangles ABD et AEC.





Exercice 2 :

À l'aide de deux quadrilatères identiques ayant des diagonales perpendiculaires on peut construire le rectangle circonscrit à ce quadrilatère dont les côtés sont parallèles aux diagonales, et ainsi trouver une formule donnant l'aire de ce type de quadrilatère en fonction de la longueur des diagonales.

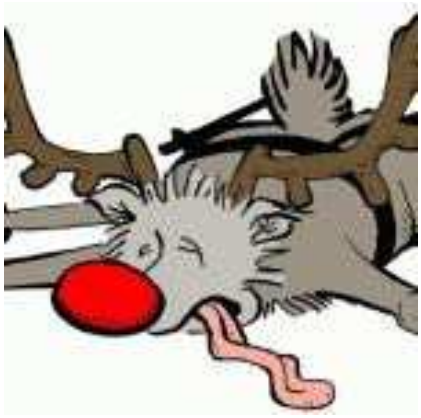
Cela constitue un puzzle de 5 pièces.

Comment obtenir à partir de deux quadrilatères ce même rectangle avec seulement 4 pièces ?

Les rennes lancés à Mach 3.000

Ce parcours du combattant suppose également que les rennes soient très en forme. Si on estime que chaque maison est éloignée en moyenne de la suivante de 1,2 km, le voyage représente au total plus de 120 millions de km. En 31h, cela représente une vitesse moyenne supérieure à 3,8 millions de km/h, soit environ 1 050 km par seconde. Le mur du son est donc très largement franchi, puisqu'il est atteint à partir de 340 mètres par seconde. Les rennes devraient courir à Mach 3 000. Rien que ça.

Les calculs ne s'arrêtent pas là. Parce que le Père Noël ne voyage pas à vide : il porte sur son traîneau tous les cadeaux de tous les petits enfants. Et ça représente un poids non négligeable : pour un cadeau de 900 grammes par enfant, la charge totale serait de 321 300 tonnes. Sachant qu'un renne normal ne peut tirer plus de 136 kg avec ses petites pattes musclées, il faudrait donc un attelage de quelque 2 360 000 rennes. Un beau bazar. Les mathématiciens, dans leur grande sagesse, ont donc considéré que les rennes du Père Noël avaient des pouvoirs magiques et pouvaient transporter dix fois plus de poids que leurs congénères terrestres. Allez, un attelage de 236 000 rennes, c'est plus raisonnable.



Oui, mais ces rennes, ce poids, cette vitesse, ce ne serait pas un peu dangereux ? En fait, cela produirait une résistance dans l'air semblable à celle d'un vaisseau spatial entrant dans l'atmosphère. Les rennes en tête de cortège recevraient 14,3 milliards de trilliards de joules d'énergie dans le museau. Autant dire qu'ils se consumeraient en moins de temps qu'il n'en faut pour le dire. Et en 0,00426e de seconde, tout l'attelage serait réduit en cendres. Conclusion : si le Père Noël existe, il est mort. CQFD.

Source : http://www.20minutes.fr/planete/1067923-20121220-pere-noel-peut-il-mathematiquement-exister

APMEP, IREM Bâtiment de mathématiques
Téléport 2—BP30179
Bd Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope CHASSENEUIL CEDEX

Site : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél : apmep.poitiers@free.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication
F. de Ligt

Comité de rédaction
F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne, J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon, J. Michel

Imprimerie
IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie 86962 Chasseneuil CEDEX

Éditeur
APMEP, Régionale de Poitou-Charentes

Siège Social
IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie 86962 Chasseneuil CEDEX

Dépôt légal
Décembre 2015