

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

102-1 de Jacques Chayé (Poitiers) :

Un exercice du baccalauréat de 1894 (Clermont-Section Lettres-Mathématiques)

On donne, dans un triangle rectangle, la somme L de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante, et la surface K^2 . Calculer les trois côtés du triangle. Discussion.

102-2 de Frédéric de Ligt (Montguyon) :

Pour tout point M intérieur à un quadrilatère convexe $ABCD$, dont on note P, Q, R, S les projetés orthogonaux sur $(AB), (BC), (CD), (DA)$ respectivement, montrer que l'on a l'inégalité :

$$MA + MB + MC + MD \geq \sqrt{2} (MP + MQ + MR + MS)$$

102-3 de Frédéric de Ligt (Montguyon) :

Montrer que $n^4 + 4^n$ n'est jamais un nombre premier quand $n \geq 2$.

Des solutions

98-2 de Frédéric de Ligt :

Quels sont les triangles qui peuvent être partagés en 3 triangles isocèles ?

Louis-Marie Bonneval a donné une solution très fouillée à ce problème dans le numéro 100 du Corollaire en présentant 27 familles de triangles triséables. Mais une possibilité manquait à l'appel.

Complément de Georges Borion :

Tous les triangles acutangles répondent aussi à la question. Soit un triangle acutangle ABC et O le centre du cercle circonscrit. Les triangles AOB, BOC et COA sont isocèles.

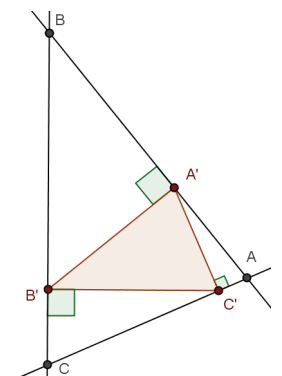
99-4 de Frédéric de Ligt :

Soit ABC un triangle acutangle, construire un triangle $A'B'C'$ avec A' sur $[AB]$, B' sur $[BC]$, C' sur $[AC]$ tel que les droites $(A'B'), (B'C')$ et $(A'C')$ soient respectivement orthogonales aux droites $(AB), (BC)$ et (AC) . Que dire du triangle $A'B'C'$?

Solution de Louis-Marie Bonneval

Pour faire une figure, il est commode de partir du triangle $A'B'C'$: on construit la perpendiculaire d_1 en A' à $(A'B')$, d_2 en B' à $(B'C')$, d_3 en C' à $(C'A')$. Appelons A l'intersection de d_1 et d_3 , B l'intersection de d_1 et d_2 , C l'intersection de d_2 et d_3 . Pour le triangle ABC , $A'B'C'$ est le triangle cherché (du moins, si ABC est acutangle, cf. plus loin).

L'angle de droites (AB, AC) est égal à l'angle de droites $(A'B', A'C')$ puisque les côtés sont deux à deux perpendiculaires ; de même $(BC, BA) = (B'C', B'A')$ et $(CA, CB) = (C'A', C'B')$. Donc les angles géométriques des deux triangles sont deux à deux égaux ou supplémentaires. En fait ils sont égaux : sinon on aurait

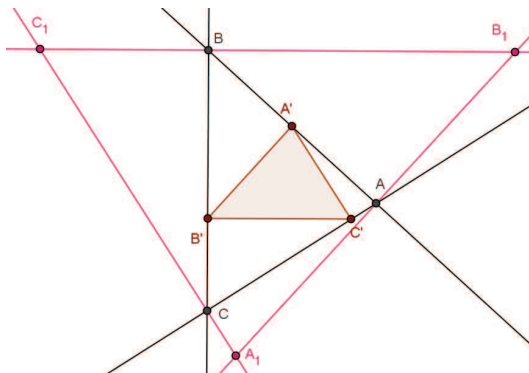


par exemple $\alpha' = \pi - \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$ (puisque un triangle a au plus un angle obtus), et comme $\alpha + \beta + \gamma = \pi = \alpha' + \beta' + \gamma'$, on en déduirait $\alpha' = \frac{\pi}{2} = \alpha$.

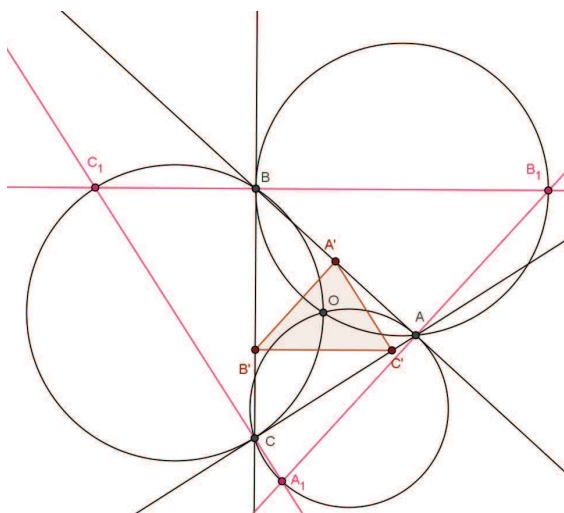
Les deux triangles ABC et A'B'C' sont donc semblables, et même directement semblables puisque :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}) ; (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{B'C'}; \overrightarrow{B'A'}) \text{ et } (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{C'A'}; \overrightarrow{C'B'}).$$

Donc il existe une similitude directe s transformant A'B'C' en ABC. Cherchons son centre O. Pour cela, appliquons-la au triangle ABC. Autrement dit, construisons le triangle à partir du triangle ABC par la méthode ci-dessus.

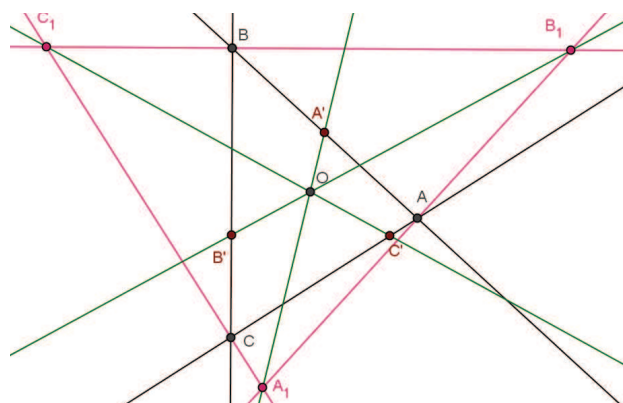


L'angle de la similitude étant droit, O est sur chacun des cercles de diamètre $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, qui sont aussi les cercles ACA_1 , BAB_1 , CBC_1 , ou encore les cercles : passant par C et tangent en A à (AB) ; passant par A et tangent en B à (BC) ; passant par B et tangent en C à (AC). O est l'intersection de ces trois cercles.

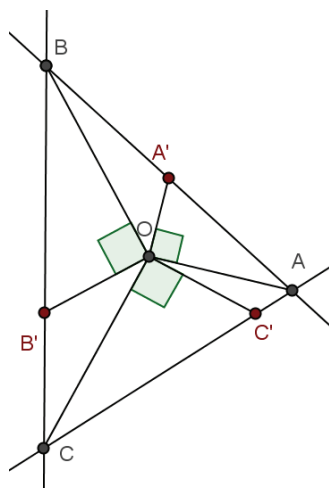


On passe de A'B'C' à $A_1B_1C_1$ par la transformation $s \circ s$, qui est une similitude de centre O et d'angle plat, c'est-à-dire une homothétie de centre O. Donc les droites $(A'A_1)$, $(B'B_1)$, $(C'C_1)$ passent par O.

On en déduit une construction de A'B'C' à partir de ABC : on construit $A_1B_1C_1$, puis O. Alors A' est l'intersection de (OA_1) avec (AB), B' l'intersection de (OB_1) avec (BC), C' l'intersection de (OC_1) avec (CA).



On peut aussi remarquer que les triangles AOA' , BOB' , COC' sont rectangles, ce qui fournit une autre construction : on construit $A_1B_1C_1$, puis O . Alors A' est l'intersection de (AB) avec la perpendiculaire en O à (AO) , B' l'intersection de (BC) avec la perpendiculaire en O à (BO) , C' l'intersection de (CA) avec la perpendiculaire en O à (CO) .

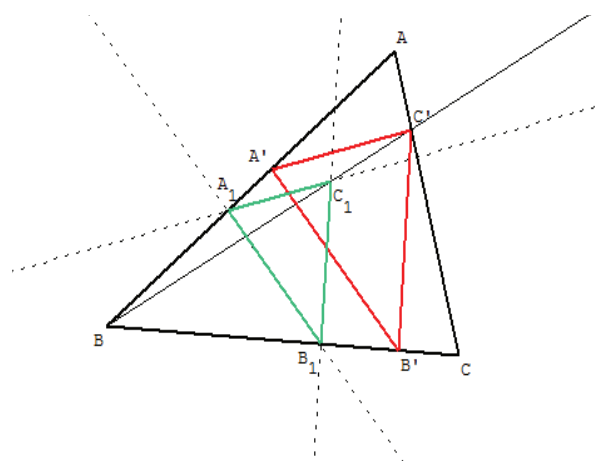


Ces constructions sont toujours possibles, mais il faut que ABC soit acutangle pour que A' , B' et C' soient respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$. En effet (cf. première figure), les triangles $AC'A'$, $BA'B'$, $CB'C'$ étant rectangles respectivement en C' , A' , B' , leurs angles respectifs en A , B , C sont nécessairement aigus. Cette condition est suffisante : supposons ABC acutangle. Dans le cercle AOB , les angles inscrits $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ABC}$ interceptent la même corde $[AB]$, puisque (BC) est tangente au cercle ; ils sont donc égaux ou supplémentaires. De même $\widehat{BOC}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux ou supplémentaires, $\widehat{COA}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux ou supplémentaires. Or les trois premiers ont pour somme 2π (ce qui impose que deux d'entre eux au moins soient obtus), les trois seconds sont aigus et ont pour somme π . C'est donc que les trois premiers, $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$ sont supplémentaires des trois seconds, et sont donc obtus. D'après la 2^e construction ci-dessus, on en déduit que A' , B' et C' appartiennent respectivement à $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$.

Solution de Jacques Chayé :

Le triangle cherché aura ses côtés perpendiculaires à ceux du triangle ABC ; il aura donc les mêmes angles que ce triangle. Soit A_1 un point du segment $[AB]$; puisque le triangle ABC est acutangle, la perpendiculaire à (AB) en A_1 coupe $[BC]$ en un point B_1 . La perpendiculaire à (BC) en B_1 et la perpendiculaire à (AC) passant par A_1 se coupent en un point C_1 ; le triangle $A_1B_1C_1$ a les mêmes angles que le triangle ABC . Soit C' l'intersection de (AC) et de (BC_1) ; l'homothétie de centre B qui transforme C_1 en C' , transforme le triangle $A_1B_1C_1$ en le triangle $A'B'C'$ cherché.

En fait la propriété est valable dans n'importe quel triangle avec A' , B' et C' sur les droites (AB) , (BC) et (CA) , sans se limiter aux segments.



100-5 de Frédéric de Ligt :

Montrer que dans un ensemble de 199 entiers il est toujours possible d'en trouver 100 dont la somme est un multiple de 100.

Solution de Jean-Christophe Laugier :

L'énoncé à démontrer n'est autre que P_{100} , P_n étant la proposition générale suivante :

(P_n) : Soit une suite de $2n - 1$ entiers $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$ ($n > 0$) ; alors il existe une partie I de $\{1; 2; \dots; 2n - 1\}$ de cardinal n ($|I| = n$) telle que $\sum_{i \in I} x_i = 0 \pmod n$.

Pour démontrer P_{100} nous allons démontrer P_2, P_5 et l'implication suivante : $(P_n \text{ et } P_m) \Rightarrow P_{nm}$ pour tous $n, m > 0$. Il en résultera P_{100} puisque $100 = 2^2 \times 5^2$. P_2 est évidente, puisque on vérifie aisément que dans une suite de 3 nombres, on peut toujours trouver deux termes dont la somme est paire. Pour démontrer P_5 nous avons besoin du lemme suivant :

Soit p un nombre premier, X une partie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ telle que $1 \leq |X| \leq p - 1$, et d un élément non nul de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Alors $X + d \not\subseteq X$.

Preuve : Soit $x \in X$; puisque p est premier et $d \neq 0$, les éléments $x, x + d, x + 2d, \dots, x + (p-1)d$ sont distincts dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $X + d \subseteq X$, alors ces éléments en nombre p appartiennent à X . Or ceci est impossible puisqu'on a par hypothèse $|X| \leq p-1$. Donc $X + d \not\subseteq X$.

Démontrons à présent P_5 . Soit donc une suite de 9 entiers $x_1, \dots, x_9$. Pour le problème qui nous intéresse, on peut évidemment remplacer chaque x_i par son reste modulo 5 et supposer la suite (x_i) croissante, c'est-à-dire : $0 \leq x_i \leq 4$ pour tout $i = 1, 2, \dots, 9$ et $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_9$. S'il existe $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $x_{i_0} = x_{i_0+4}$, alors posant $I = \{i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + 4\}$, on a $|I| = 5$ et $\sum_{i \in I} x_i = 5x_{i_0} = 0 \pmod 5$.

On suppose donc désormais que $x_i < x_{i+4}$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et on pose $X_i = \{x_i, x_{i+4}\}$. Les calculs vont être effectués à présent dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Posons $S_i = X_1 + \dots + X_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Puisque les ensembles $\{i, i+4\}$ sont deux à deux disjoints, les éléments de chaque S_i sont de la forme $\sum_{k \in K} x_k$ avec $|K| = i$.

Nous allons démontrer par récurrence sur i que : $|S_i| > i$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$ (P).

On a bien $|S_1| > 1$ puisque que $|S_1| = |X_1| = 2$.

Supposons (P) démontrée jusqu'à l'ordre i avec $i = 1, 2$ ou 3 .

$S_{i+1} = S_i + X_{i+1} = (S_i + x_{i+1}) \cup (S_i + x_{i+5})$ et $|S_i + x_{i+1}| = |S_i|$. Par hypothèse, $|S_i| > i$; si $|S_i| > i + 1$ alors on a $|S_{i+1}| \geq |S_i + x_{i+1}| > i + 1$; sinon $|S_i + x_{i+1}| = |S_i| = i + 1$.

Puisque $x_{i+5} - x_{i+1} \neq 0$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ car $0 \leq x_{i+1} < x_{i+5} \leq 4$, et $|S_i| = i + 1 \leq 4$, il en résulte d'après le lemme que $S_i + x_{i+5} - x_{i+1} \notin S_i$, d'où $S_i + x_{i+5} \not\subseteq S_i + x_{i+1}$ et par suite $|S_{i+1}| > |S_i + x_{i+1}| = i + 1$.

On a donc $|S_4| > 4$, d'où $S_4 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Donc il existe I_0 avec $|I_0| = 4$, $I_0 \subseteq \{1, 2, \dots, 8\}$ tel que $\sum_{i \in I_0} x_i = -x_9$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\sum_{i \in I} x_i = 0 \pmod 5$ en posant $I_0 \cup \{9\} = I$ et l'on a bien $|I| = 5$.

Démontrons à présent $(P_n \text{ et } P_m) \Rightarrow P_{nm}$

Soit donc $x_1, x_2, \dots, x_{2mn-1}$ une suite de $2mn-1$ entiers. Nous allons construire par récurrence une suite $I_1, I_2, \dots, I_{2n-1}$ de parties de $\{1, 2, \dots, 2mn-1\}$ deux à deux disjointes, toutes d'effectif m , vérifiant pour tout k , $1 \leq k \leq 2n-1$: $\sum_{i \in I_k} x_i = 0 \pmod m$.

Puisque $2mn-1 \geq 2m-1$, et P_m étant satisfaite, il existe $I_1 \subseteq \{1, 2, \dots, 2mn-1\}$, telle que avec $|I_1| = m$ et $\sum_{i \in I_1} x_i = 0 \pmod m$. Supposons déterminés $I_1, \dots, I_k$ ($1 \leq k \leq 2n-1$), parties de $\{1, 2, \dots, 2mn-1\}$, deux à deux disjointes d'effectif m satisfaisant à $\sum_{i \in I_\ell} x_i = 0 \pmod m$ pour $\ell = 1, \dots, k$.

Alors $|\{1, 2, \dots, 2mn-1\} - \bigcup_{\ell=1}^k I_\ell| = 2mn - 1 - km = (2n-k)m - 1 \geq 2m-1$. Il existe donc une partie I_{k+1} vérifiant $I_{k+1} \subseteq (\{1, 2, \dots, 2mn-1\} - \bigcup_{\ell=1}^k I_\ell)$, $|I_{k+1}| = m$ et $\sum_{i \in I_{k+1}} x_i = 0 \pmod m$.

Considérons à présent la suite d'entiers $\sum_{i \in I_k} x_i$, $1 \leq k \leq 2n-1$. On peut poser $\sum_{i \in I_k} x_i = my_k$, $y_k \in \mathbb{Z}$, d'après ce qui précède. P_n étant satisfaite, il existe une partie J de $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ d'effectif n telle que $\sum_{j \in J} y_j = 0 \pmod n$.

Posons $I = \bigcup_{k \in J} I_k$; alors on a $|I| = mn$ et $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in J} (\sum_{i \in I_k} x_i) = \sum_{k \in J} my_k = m \sum_{k \in J} y_k = 0 \pmod{mn}$.

Voici quelques remarques pour terminer :

- 1) La preuve P_5 que l'on a exposée peut être généralisée à P_m , n étant un nombre premier quelconque. Il en résulte que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$ en vertu de l'implication $(P_n \text{ et } P_m) \Rightarrow P_{nm}$.
- 2) La longueur minimale d'une suite finie d'entiers $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($k \geq n$) garantissant l'existence d'une partie I de $\{1, 2, \dots, k\}$ telle que $|I| = n$ et $\sum_{i \in I} x_i = 0 \pmod n$ est égale à $2n-1$. En effet, considérons la suite (x_i) de longueur $2n-2$ suivante :

$$x_i = 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1, \quad x_i = 0 \text{ pour } n \leq i \leq 2n-2.$$
 Pour toute partie I de $\{1, 2, \dots, 2n-2\}$ telle que $|I| = n$, $\sum_{i \in I} x_i = |I \cap \{1, 2, \dots, n-1\}|$, et comme $1 \leq |I \cap \{1, 2, \dots, n-1\}| \leq n-1$, alors $\sum_{i \in I} x_i \neq 0 \pmod n$.
- 3) Il existe un énoncé similaire à celui que l'on vient de démontrer, mais beaucoup plus simple : Soit une suite de n entiers $x_1, x_2, \dots, x_n$; alors il existe une partie I non vide (d'effectif non imposé) de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\sum_{i \in I} x_i = 0 \pmod n$. La démonstration repose sur le principe des tiroirs. On peut vérifier également que n est le nombre minimal de termes que doit comporter une suite d'entiers pour garantir l'existence d'une partie I non vide de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\sum_{i \in I} x_i = 0 \pmod n$.

101-1 de Frédéric de Ligt :

Si la fraction p/q est strictement comprise entre $2014/2015$ et $2015/2016$, quelle est alors la valeur minimale de la somme $p + q$?

Solution de l'auteur :

Dans toute la suite a, b, c, d désigneront des entiers naturels non nuls tels que $bc - ad = 1$.

Lemme 1 : $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Preuve :

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+d)} > 0 \text{ et } \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{1}{d(b+d)} > 0.$$

Lemme 2 : Si p/q est une fraction telle que $a/b < p/q < c/d$ alors il existe deux entiers naturels non nuls r et s tels que $p = ra + sc$ et $q = rb + sd$.

Preuve :

$p/q < c/d$ donc $qc - pd > 0$, il existe donc un entier naturel non nul r tel que $qc - pd = r$ (L_1).

De même avec $a/b < p/q$, il existe donc un entier naturel non nul q tel que $pb - aq = s$ (L_2).

Avec la combinaison $bL_1 + dL_2$ on obtient $rb + sd = qbc - qad = q(bc - ad) = q$.

Avec la combinaison $aL_1 + cL_2$ on obtient $ra + sc = pbc - pad = p(bc - ad) = p$.

Pour une telle fraction p/q on a donc $p = ra + sc \geq a + c$ et $q = rb + sd \geq b + d$.

Finalement $(a + c) + (b + d) \leq p + q$. Parmi les fractions p/q strictement comprises entre a/b et c/d , c'est la fraction $(a + c)/(b + d)$ qui a la somme $p + q$ la plus petite.

Pour revenir au cas particulier de l'énoncé, $(2014 + 2015) + (2015 + 2016) = 8060$ est la somme minimale cherchée.