Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à ***ma nouvelle adresse*** *:* frederic.deligt2@gmail.com

Voici l'étude annoncée dans la précédente rubrique envoyée par ***Jean-Christophe Laugier***.

Un problème de poids

La nuit est propice à la réflexion mathématique. Bien des matheux partagent cet avis ! Voici le résultat, certainement classique, de cogitations nocturnes, qu'un travail diurne a permis de clarifier et de mettre en forme. Je me suis posé le problème suivant que l'on peut présenter sous une forme imagée, en termes physiques :

Est-il possible de constituer une boîte de poids de manière que l'on puisse peser toute masse inférieure à la masse totale des poids, la pesée s'effectuant de la manière habituelle avec une balance à double plateau ?

La masse m à peser est placée sur le plateau de droite par exemple et on place sur le plateau de gauche successivement, les plus grands poids possibles jusqu'à atteindre l'équilibre si possible, auquel cas la pesée est terminée. On remarque que les poids doivent être en nombre infini, sinon on ne pourrait peser qu'un nombre fini de masses. On peut donc représenter la boîte de poids par une suite $\left(p_n\right)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs décroissante au sens large. Il est clair d'autre part que l'on doit avoir $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$ car si $\lim_{n\to+\infty} p_n = \alpha$ avec $\alpha > 0$, on ne peut peser aucune masse inférieure à α.

Soit m une masse à peser, $0 < m < s$, s étant la masse totale des poids, $s = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n$, $0 < s \leq +\infty$.

La pesée est décrite par la suite $\left(n_k\right)_{k\geq 1}$ finie ou infinie définie par induction de la manière suivante : n_1 est le plus petit des entiers n tels que $p_n \leq m$, qui existe puisque $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$. Si $p_{n_1} = m$ alors la pesée est terminée et la suite $\left(n_k\right)_{k\geq 1}$ se réduit à son seul terme n_1. Sinon, supposons définis $n_1, n_2, \ldots, n_k$, $k \geq 1$, tels que $p_{n_1} + p_{n_2} + \ldots + p_{n_k} < m$; soit n_{k+1} le plus petit des entiers $n > n_k$ tels que $p_{n_1} + p_{n_2} + \ldots + p_{n_k} + p_n \leq m$, qui existe également puisque $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$.

Si $p_{n_1} + p_{n_2} + \ldots + p_{n_k} + p_{n_{k+1}} = m$ alors la suite $\left(n_k\right)_{k\geq 1}$ est finie et égale à $n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}$ et la pesée est terminée.

La suite $\left(n_k\right)_{k\geq 1}$ est générée par l'algorithme suivant :

***n* := 1 ; *p* := 0 ; *k* := 0 ; {*p* est le poids cumulé sur le plateau de gauche, *k* le nombre de poids placés sur ce plateau}**
répéter
***p* := *p* + p_n ;**
tant que *p* > *m* faire
début
***p* := *p* – p_n ;**
***n* := *n* + 1 ;**
***p* := *p* + p_n ;**
fin ;
***k* :=*k* + 1 ;**
n_k := *n* ;
***n* := *n* + 1**
jusqu'à *p* = *m*

Si la suite $\left(n_k\right)_{k\geq 1}$ engendrée est finie, on a évidemment $m = \sum_k p_{n_k}$. Mais qu'en est-il dans le cas où la suite est infinie ?

On a alors pour tout $k \geq 1$, $p_{n_1} + p_{n_2} + \ldots + p_{n_k} < m$ d'où $\sum_k p_{n_k} \leq m$. A quelle condition a-t-on l'égalité ?

Une condition nécessaire pour que l'égalité $\sum_k p_{n_k} = m$ ait lieu pour tout m, $0 < m < s$, lorsque la suite $(n_k)_{k\geq 1}$ est infinie est :

Pour tout $i \geq 1$, $p_i \leq \sum_{n=i+1}^{+\infty} p_n$ (C).

En effet, s'il existe $i \geq 1$ tel que $p_i > \sum_{n=i+1}^{+\infty} p_n$, soit m tel que $\sum_{n=i+1}^{+\infty} p_n < m < p_i$; supposons que $\sum_k p_{n_k} = m$. Alors puisque $m < p_i$, on doit avoir $n_1 \geq i+1$ d'où $m \leq \sum_{n=i+1}^{+\infty} p_n$ ce qui est contradictoire. Montrons que la condition (C) est suffisante pour avoir l'égalité $\sum_k p_{n_k} = m$ dans le cas où la suite $(n_k)_{k\geq 1}$ est infinie.

Prouvons que l'on a $p_{n_1} + p_{n_2} + \ldots + p_{n_k} < m < p_{n_1} + p_{n_2} + \ldots + p_{n_k} + p_{n_k+1}$, c'est-à-dire $n_{k+1} > n_k + 1$, pour une infinité de valeurs de k. S'il n'en est pas ainsi, soit k_0 tel que $n_{k+1} = n_k + 1$ pour tout $k \geq k_0$, avec k_0 minimal.

Si $k_0 > 1$ alors $p_{n_1} + p_{n_2} + \ldots + p_{n_{k0}} + p_{n_{k0}+1} + \ldots + p_{n_{k0}+u} < m < p_{n_1} + p_{n_2} + \ldots + p_{n_{k0}-1}$ pour tout $u \geq 1$; d'où $p_{n_1} + p_{n_2} + \ldots + p_{n_{k0}-1} \leq m < p_{n_1} + p_{n_2} + \ldots + p_{n_{k0}-1}$ en vertu de (C) ce qui est absurde.

Si $k_0 = 1$ et $n_1 > 1$ alors $p_{n_1} + p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_1+u} < m < p_{n_1-1}$ pour tout $u \geq 1$ d'où $p_{n_1-1} \leq m < p_{n_1-1}$ en vertu de (C) ce qui est absurde.

Enfin si $k_0 = 1$ et $n_1 = 1$ alors $p_1 + p_2 + \ldots + p_{1+u} < m < s$ pour tout $u \geq 1$ d'où $s \leq m < s$ ce qui est absurde.

Puisque $p_{n_1} + p_{n_2} + \ldots + p_{n_k} < m < p_{n_1} + p_{n_2} + \ldots + p_{n_k} + p_{n_k+1}$ pour une infinité de valeur de k et comme $\lim_{k\to+\infty} p_{n_k+1} = 0$ alors $\sum_k p_{n_k} = m$.

Le problème que nous nous étions posés est donc résolu. Remarquons que la condition (C) est automatiquement satisfaite si $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty$. C'est le cas par exemple si $p_n = 1/n$.

Le lecteur pourra d'ailleurs démontrer qu'avec cette boîte de poids, la pesée décrite ci-dessus, de toute masse m, $0 < m \leq 1$, est finie si et seulement si m est rationnelle. Ceci n'est autre qu'un résultat bien connu relatif aux fractions égyptiennes : toute fraction a/b ($1 \leq a \leq b$), peut s'écrire comme une somme finie de fractions unitaires ou égyptiennes (de numérateurs 1) distinctes.

On a par exemple $\frac{35}{48} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{35} + \frac{1}{1680}$.

La condition (C) est également satisfaite avec la suite de poids bien connue (p_n) définie par $p_n = \frac{1}{2^n}$. Tout nombre réel compris entre 0 et 1 admet un développement binaire.

Un autre problème se pose à présent : l'unicité de la pesée. Pour le formuler correctement, la boîte de poids doit être présentée d'une manière différente. On considère la suite strictement décroissante de poids distincts de la boîte. Celle-ci est représentée par une suite de couples $(p_n, k_n)_{n\geq 1}$, $(p_n)_{n\geq 1}$ étant une suite de réels strictement positifs, <u>strictement décroissante</u>, de limite 0, et $(k_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 1 (k_n est le nombre de poids de la boîte égaux à p_n). On suppose que la condition (C) est satisfaite, qui s'écrit à présent : pour tout $i \geq 1$, $p_i \leq \sum_{n=i+1}^{+\infty} k_n p_n$. On sait d'après ce qui précède qu'il existe alors pour tout m tel que $0 < m < s = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n p_n$ une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'entiers telle que $0 \leq x_n \leq k_n$ vérifiant $m = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n p_n$. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est-elle unique ?

Supposons qu'il existe i tel que $p_i < \sum_{n=i+1}^{+\infty} k_n p_n$ et soit x tel que $p_i < x < \sum_{n=i+1}^{+\infty} k_n p_n$. Alors d'après ce qui précède, on peut écrire d'une part $x = p_i + \sum_{n=i+1}^{+\infty} x_n p_n$ et d'autre part $x = \sum_{n=i+1}^{+\infty} x'_n p_n$, x_n et x'_n étant des entiers compris entre 0 et k_n. x est donc pesé d'au moins deux manières différentes. Si l'on veut que la pesée de chaque x appartenant à $]0\,;\,s[$ sauf peut-être une quantité dénombrable d'entre eux, soit unique, il est nécessaire que pour tout $i \geq 1$, $p_i = \sum_{n=i+1}^{+\infty} k_n p_n$ (C'). On est en mesure à présent de décrire précisément toutes les suites $(p_n, k_n)_{n\geq 1}$ vérifiant la condition (C'). Tout d'abord, d'après (C'), $s=\sum_{n=1}^{+\infty} k_n p_n < +\infty$. Quitte à remplacer p_n par p_n/s, on peut supposer que $s = 1$. On a donc $k_1 p_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} k_n p_n = k_1 p_1 + p_1 = 1$ d'où $p_1 = \frac{1}{k_1+1}$.

Il vient ensuite $k_2 p_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} k_n p_n = k_2 p_2 + p_2 = \frac{1}{k_1+1}$ d'où $p_2 = \frac{1}{(k_1+1)(k_2+1)}$. Et l'on montre aisément que d'une manière générale $p_n = \frac{1}{(k_1+1)...(k_n+1)}$. Pour constituer une boîte de poids de masse totale 1, vérifiant la condition (C'), on se donne une suite $(k_n)_{n\geq 1}$ d'entiers supérieurs ou égaux à 1 : pour tout $n \geq 1$, la boîte comporte k_n poids p_n avec $p_n = \frac{1}{(k_1+1)...(k_n+1)}$.

Le lecteur pourra prouver, si le cœur lui en dit, qu'effectivement une telle boîte permet de peser de manière unique toutes les masses inférieures à 1 qui ne sont pas de la forme $\frac{N}{(k_1+1)...(k_n+1)}$, $N \geq 1$, celles-ci pouvant être pesées de deux manières différentes, l'une finie et l'autre infinie, à préciser.

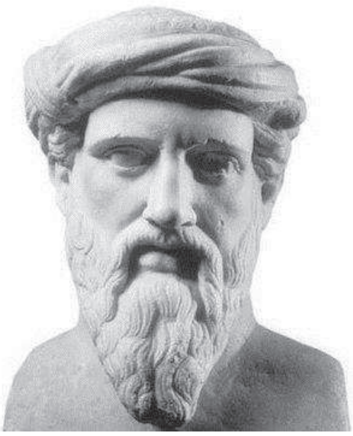
Le problème de l'unicité est donc résolu. Nous avons déterminé toutes les boîtes de poids qui permettent de peser de manière unique toutes les masses inférieures à la masse totale des poids à l'exception d'une infinité dénombrable d'entre elles.

Remarquons pour terminer que si $k_n = 9$ pour tout $n \geq 1$, alors on retrouve une boîte de poids bien familière. La « pesée » de tout réel x compris entre 0 et 1 n'est autre que son développement décimal habituel, unique si x n'est pas de la forme $\frac{N}{10^n}$, c'est-à-dire décimal.

Des problèmes :

101-1 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Si la fraction p/q est strictement comprise entre les fractions 2014/2015 et 2015/2016, quelle est alors la valeur minimale de la somme $p + q$?

101-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Métempsychose



« Un jour, passant près de quelqu'un qui maltraitait son chien, on raconte qu'il [Pythagore] fut pris de compassion et qu'il adressa à l'individu ces paroles : "Arrête et ne frappe plus, car c'est l'âme d'un homme qui était mon ami, et je l'ai reconnu en entendant le son de sa voix" » (Diogène Laërce, *Vies et doctrines des philosophes illustres*, VIII, 36).

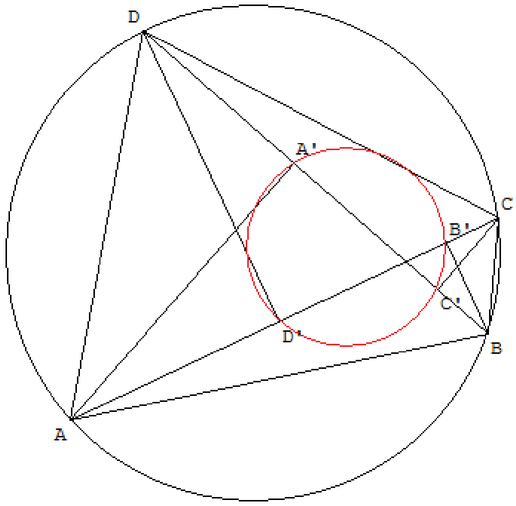
Depuis le temps de Pythagore, la science a fait bien des progrès. On dispose maintenant de statistiques.

Il est établi qu'un humain a deux fois plus de chances de se réincarner en animal plutôt qu'en humain et de même un animal a deux fois plus de chances de se réincarner en humain plutôt qu'en animal.

Si la quatrième réincarnation d'un humain est encore un humain, quelle est la probabilité qu'il soit resté humain après sa première réincarnation ?

101-3 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

Soit ABCD un quadrilatère inscriptible. On projette orthogonalement A en A' et C en C' sur (BD), B en B' et D en D' sur (AC).
Démontrer que A', B', C' et D' sont cocycliques.

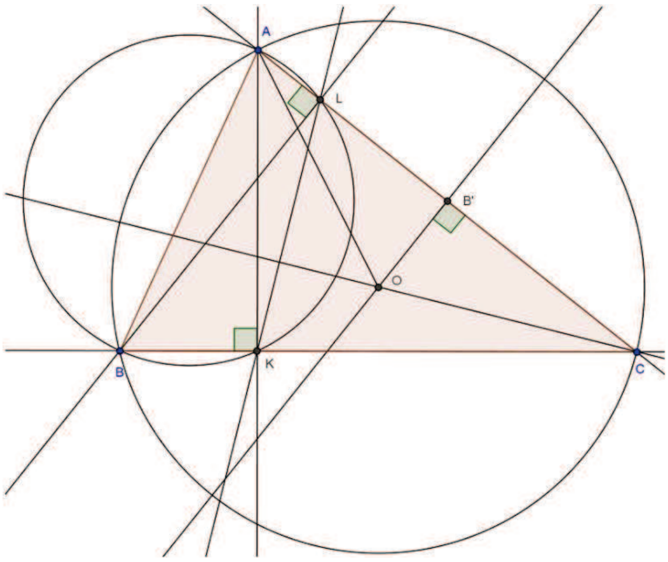


Des solutions :

98-5 *de Jacques Chayé* :
D'après « Premiers éléments de géométrie » par C. Vaquant et A. Macé de Lépinay, Masson, 1914, p.113.
Démontrer que, dans un triangle, les droites qui joignent les pieds des hauteurs sont respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent les sommets au centre du cercle circonscrit au triangle.

Solution de Louis-Marie Bonneval
Soit ABC un triangle, appelons K et L les pieds des hauteurs issues de A et B, O le centre du cercle circonscrit, B' le milieu de [AC]. Raisonnons en angles de droites (*i.e.* modulo π) pour englober tous les cas de figure.
(OC,LK) = (OC,OB') + (OB',LB) + (LB,LK).
Or

- (OC,OB') = $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)$ = (BC,BA) car (OB') est la médiatrice de [AC], et O est le centre du cercle circonscrit à ABC ;
- (OB',LB) = 0 car (OB') et (LB) sont perpendiculaires à (AC) ;
- (LB,LK) = (AB,AK) car A, B, K, L sont cocycliques.



On en déduit que :

$$(OC,LK) = (BC,BA) + (AB,AK) = (BC,AK) = \frac{\pi}{2}.$$

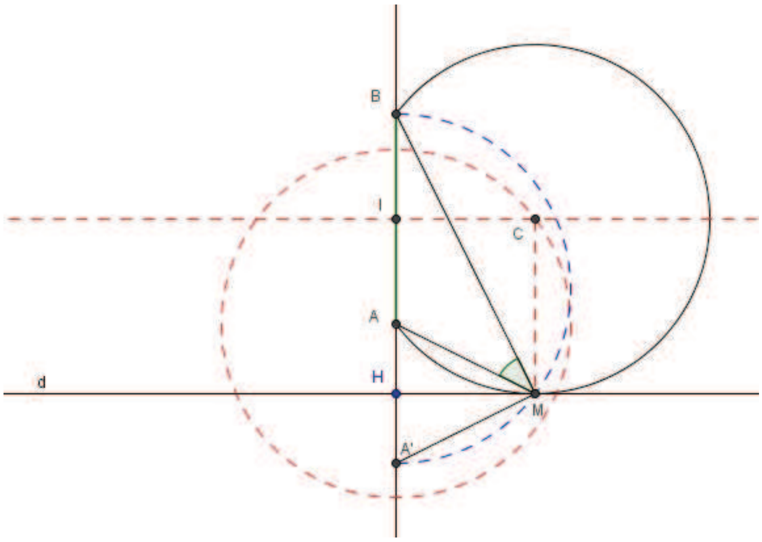
Remarque :
Dans le cas où ABC est acutangle, le triangle KLM joignant les pieds des trois hauteurs est le *triangle orthique* de ABC. Il a quelques propriétés curieuses :

- le centre de son cercle inscrit est l'orthocentre de ABC (autrement dit les hauteurs de ABC sont les bissectrices de KLM),
- c'est le triangle de périmètre minimal inscrit dans le triangle ABC (théorème de Fagnano).

99-1 *de Jacques Chayé* :
Soit un segment [AB]. Une droite d est perpendiculaire en H à la droite (AB), le point H étant en dehors du segment [AB]. Soit M un point variable de d situé dans *P*, l'un des deux demi-plans limités par (AB).
Où le point M doit-il se situer pour que l'angle $\widehat{AMB}$ soit maximum ?

Solution de Louis-Marie Bonneval

Solution géométrique



L'ensemble des points M de *P* d'où on voit le segment [AB] sous un angle α est un arc de cercle limité par A et B (arc capable). Son rayon est d'autant plus petit que α est grand. Si on veut α maximum il faut donc trouver le plus petit cercle passant par A et B et ayant au moins un point sur d : c'est celui qui est tangent à d. Le point M cherché est le point de contact de ce cercle avec d.

Pour construire M, on peut remarquer que le centre C du cercle est sur la médiatrice de [AB]. De plus il vérifie CA = CM = IH, où I est le milieu de [AB]. Le point C est donc l'intersection avec la médiatrice de [AB] du demi-cercle de centre A et de rayon IH situé sur *P*. M est le projeté orthogonal de C sur d. On peut remarquer en écrivant de deux façons la puissance de H par rapport au cercle AMB, que $HM^2 = HA.HB$, d'où $HM=\sqrt{HA.HB}$. On en déduit que si A' est le symétrique de A par rapport à d, $HM^2 = HA'.HB$, donc l'angle $\widehat{A'MB}$ est droit.
Cela fournit une autre construction de M : c'est l'intersection avec d du demi-cercle de diamètre [BA'] situé sur *P*.

Solution analytique

Prenons un repère orthonormé d'origine H, dont le premier axe est d. Les points A et B sont sur l'axe des ordonnées, appelons a et b leurs ordonnées respectives ; nous pouvons supposer $0 < a < b$. Prenons pour *P* l'ensemble des points d'abscisse positive. Un point M de d situé dans *P* est repéré par son abscisse positive x. Maximiser l'angle $\widehat{AMB}$ (nécessairement aigu) revient à maximiser sa tangente.

Or $\tan\left(\widehat{AMB}\right) = \tan\left(\widehat{HMB} - \widehat{HMA}\right) = \dfrac{\tan(\widehat{HMB}) - \tan(\widehat{HMA})}{1+\tan(\widehat{HMB})\tan(\widehat{HMA})} = \dfrac{\frac{b}{x}-\frac{a}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}} = \dfrac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}$.

Cette quantité est maximale quand $x + ab/x$ est minimal, c'est-à-dire quand $x=\sqrt{ab}$. On retrouve $HM = \sqrt{HA.HB}$. L'angle maximal est alors $\operatorname{atan}\left(\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}\right) = \operatorname{atan}\left(\dfrac{AB}{2\sqrt{HA.HB}}\right)$.

100-2 *de Frédéric de Ligt* :

Placer dans une grille 3x3 les 9 diviseurs de 100 pour que le produit de chaque ligne, de chaque colonne et des deux grandes diagonales soit toujours le même.

Solution de l'auteur

C'était facile ! Pourquoi pas pour renouveler dans les petites classes du collège l'étude du classique carré magique 3 x 3 ?

5	100	2
4	10	25
50	1	20

100-4 *de Frédéric de Ligt* :
Montrer que cos100°, sin100° et tan100° sont irrationnels.

Solution de l'auteur
On va plutôt chercher à établir l'irrationalité de sin10°, cos10° et tan10°.
Comme cos100° = -sin10°, sin100° = cos10° et tan100° = -1/tan10°, le problème proposé sera résolu.

On rappelle la formule de Moivre :

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

En la particularisant pour $n = 3$ et $x = 10°$ puis en développant le premier membre on obtient :

$$\cos 30° = \cos^3 10° - 3\cos 10° \sin^2 10° = 4\cos^3 10° - 3\cos 10° \ (1)$$

$$\sin 30° = 3\cos^2 10° \sin 10° - \sin^3 10° = -4\sin^3 10° + 3\sin 10° \ (2)$$

Mais $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est un nombre irrationnel, ce qui entraîne, en raisonnant par l'absurde dans (1), que cos10° en est un aussi.

Pour assurer l'irrationalité de sin10°, on va encore raisonner par l'absurde mais il va falloir aller chercher un peu plus loin la contradiction.

On utilise maintenant la relation (2) et on va supposer que sin10° est un nombre rationnel qui peut s'exprimer sous la forme d'une fraction irréductible a/b. Comme $\sin 30° = \frac{1}{2}$ cela donne l'équation en nombres entiers :

$$b^3 = -8a^3 + 6ab^2 \ (3).$$

L'entier b doit être pair, on peut donc l'écrire sous la forme $2b'$. Comme a et b sont supposés premiers entre eux, il en va de même pour a et b'.

L'équation (3) devient :

$$a^3 + b'^3 = 3ab'^2 \ (4)$$

où ni a ni b' ne sont des multiples de 3. Il n'y a alors que deux possibilités.

Soit $a = 3k + 1$ et $b' = 3k' + 2$ et l'équation (4) se récrit :

$$(3k + 1)^3 + (3k' + 2)^3 = 9(3k^3 + 3k^2 + k + 1 + 3k'^3 + 6k'^2 + 4k') = 3(3k + 1)(3k' + 2)$$

Il n'y a pas de solution à cette équation car le membre de droite n'est pas divisible par 9.

Soit $a = 3k + 2$ et $b' = 3k' + 1$ et l'équation (4) se récrit :

$$(3k + 2)^3 + (3k' + 1)^3 = 9(3k^3 + 6k^2 + 4k + 1 + 3k'^3 + 3k'^2 + k') = 3(3k + 2)(3k' + 1)$$

On conclut de la même façon que précédemment.

Il reste à montrer que tan10° est irrationnel.

$$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{3\cos^2 10° \sin 10° - \sin^3 10°}{\cos^3 10° - 3\cos 10° \sin^2 10°} = \tan 10° \frac{3\cos^2 10° - \sin^2 10°}{\cos^2 10° - 3\sin^2 10°} = \tan 10° \frac{3 - \tan^2 10°}{1 - 3\tan^2 10°}$$

On raisonne ensuite comme on l'a fait avec cos10° pour conclure à l'irrationalité de tan10°.