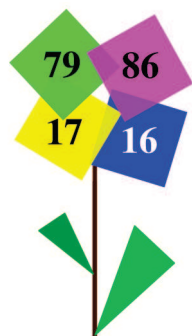




Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l'Enseignement
Public



Régionale de
Poitou-Charentes

Corol'aire

Juin 2015

n°101

Avez-vous remarqué ?

Sébastien Dassule-Debertonne

Peut-être vous demandez-vous ce qu'il faudrait avoir remarqué. Et pourtant, c'est flagrant. Tendez les bras si vous avez la version papier ou dé-zoommez un peu sur votre écran. Ca y est, vous avez détecté ce changement ?

Effectivement, votre Corol'aire trimestriel change de look. Ce numéro 101 ouvre une nouvelle centaine, alors c'est l'occasion de faire peau neuve. Enfin, ça c'est la version officielle. Mais puisque vous patientez depuis trois mois, je vais vous raconter le fin mot de l'histoire.

Tout commence lors de la parution du numéro 100. C'est un nombre qui se fête tout de même, et puis quand on fabrique un périodique (bénévolement) ça rend un peu fier. Alors au comité de mars, tout le monde en parle, évoque les différentes rubriques et les différents auteurs et remercie Jean Fromentin du travail qu'il fournit pour mettre Corol'aire en page. Et croyez-moi, ce n'est pas une mince affaire. Ces auteurs qui ne respectent pas les différentes espaces*, ce texte qui ne veut décidément pas rentrer dans la place qu'on lui octroie, cette image qu'il faut retoucher et toutes ces coquilles qu'il faut corriger. Cela en fait du boulot. Mais le pire, et dans ce cas on se maudit d'avoir fait des mathématiques, ce sont ces fichues

formules qui ne veulent pas rester à leur place (ou qui se transforment miraculeusement) quand on réalise le document final que vous recevez en pdf. Jean est donc chaleureusement remercié. A-t-il mal compris ? Se croit-il remercié ? Toujours est-il qu'il décide d'arrêter sur ce nombre rond qu'est 100. Stupeur ! Sa décision est liée à ses trop nombreuses implications à l'APMEP régionale et nationale. Mais qui va bien pouvoir faire tout ce travail ? Les retraités du comité font déjà beaucoup de choses et les actifs le sont suffisamment. La décision est renvoyée au mois de juin.

Trois mois passent, et toujours assez peu de volontaires. Est-ce du fait que je suis le dernier arrivé que mon nom sort du chapeau ? Je crois que les Picto-charentais ont décidé de bizuter le Francilo-lorrain que je suis. Las ! Ils ne m'auront pas. Julien Michel et Philippe Rugeon se joignent à moi et une petite équipe commence à réfléchir sur le Corol'aire à venir. Voilà pourquoi Corol'aire a mué.

Il a fallu faire vite. Alors ce numéro 101 a certainement beaucoup de défauts. Et cette nouvelle maquette sera peut-être unique. Mais vous retrouverez vos rubriques habituelles.

* en typographie espace est un mot féminin

Sommaire

Edito	p.1
Rallye	p.2
Journée de la Régionale	p.3
Comité.....	p.4
Histoire de prix	p.6
Rubricollage	p.8
On nous écrit	p.14

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Chantal Gobin

Le Rallye 2015 s'est terminé en beauté avec la remise des prix le 3 juin dernier dans un amphi de la faculté des Sciences économiques de Poitiers. Le palmarès, le bilan, le diaporama des morceaux choisis et les photos des classes lauréates sont sur le site de la Régionale



APMEP de Poitou-Charentes (<http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article238>).

Les cinq classes qui ont obtenu les meilleurs scores à chaque niveau, sauf en lycées professionnels où seulement deux classes ont été primées compte tenu du faible nombre de classes participantes, ainsi que la classe de seconde qui a obtenu le prix spécial du jury, ont été invitées à cette remise des prix. Sur les 28 classes concernées, 21 étaient représentées par les professeurs et quelques élèves, et 2 classes entières nous ont fait le plaisir de se déplacer, soit une assistance de près de 280 personnes.



Après l'ouverture de la cérémonie par les officiels, la remise des prix s'est poursuivie par une conférence de Marie-Noëlle Racine, membre de la commission Inter-IREM « Histoire des mathématiques » et du groupe « Mathématiques et Art » de l'IREM de Dijon sur « Le temps des maths et des arts ». Elle nous a régales de morceaux choisis sur les calendriers, sur les cadrans solaires et les méridiennes. Les élèves se souviendront longtemps du calendrier pataphysique, on peut dire très « original », de 13 mois. Nous remercions vivement Marie-Noëlle Racine pour cette conférence.

La remise des prix elle-même est toujours un moment fort, chaque classe étant ap-



pelée pour recevoir les lots de nos partenaires Casio, Texas Instrument, Kangourou, Tangente, MAIF, CLÉA, Casden, les conseils départementaux et bien sûr l'IREM. Après la pro-

jection du diaporama des morceaux choisis, le goûter a clôturé la cérémonie de façon très conviviale.

Rendez-vous maintenant le mardi 15 mars 2016 pour la future épreuve du Rallye qui aura pour thème :

« Les pliages mathématiques ».

L'équipe APMEP du Rallye travaille dès maintenant à cette nouvelle édition.

6^e journée de la Régionale

Mercredi 14 octobre 2015

Lycée professionnel Blaise Pascal,

11 rue Dampierre, **Saint Jean d'Angély**

8 h 45 - Accueil

9 h 15 - Présentation de la journée

par Frédéric de Ligt (Président de la Régionale Poitou-Charentes)

Intervention de l'Inspection Pédagogique Régionale

9 h 30 - Conférence : « La machine de TURING »

Par Marc Raynaud (professeur de mathématiques à la retraite).

11 h 15 - Débats

Bilan et échanges sur l'enseignement de l'algorithmique au lycée, (animé par S. Dassule-D.)

Echanges sur les nouveaux programmes de collège, (animé par Frédéric de Ligt)

12 h 45 - Repas au restaurant scolaire de l'établissement

13 h 45 - Assemblée générale de la Régionale

Rapport d'activité, rapport financier et renouvellement du comité régional

14 h 45 - Ateliers en parallèles

 Des pistes pour l'algorithmique au collège
animé par Thierry Bacle et Corinne Parcelier

 Faire des mathématiques avec des puzzles (de la 6e à la Terminale)
(en marge de la future exposition de l'APMEP Poitou-Charentes) animé par Dominique Gaud

 Utilisation de tablettes en cours de mathématiques (collège et lycée)
animé par Claudia Grillet

16 h 30 - Fin de la journée de la Régionale

ATTENTION : il y a nécessité d'une DOUBLE INSCRIPTION à la Journée de la Régionale pour les enseignants actifs :

- au PAF avant la clôture administrative des inscriptions en septembre sur le site académique pour obtenir un OM sans frais,
- une inscription directement auprès de la Régionale à renvoyer par courriel avant la même date à cyrille.kirch@wanadoo.fr.

Cette inscription est indépendante de celle du PAF mais nécessaire pour l'organisation des repas et des ateliers, y compris pour les collègues retraités. Un bulletin d'inscription est disponible sur le site de la régionale à l'adresse :

<http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article239>

Compte rendu du Comité de la Régionale APMEP Poitou-Charentes du 10 juin 2015

Points sur la réforme du collège

Position sur la réforme

L'enthousiasme de l'APMEP nationale nous inquiète. Quel volume horaire va nous être attribué ?

La place laissée aux mathématiques ne nous paraît pas garantie. En effet les heures retirées aux disciplines sont devenues « modulables » et rien ne dit qu'elles seront réaffectées sous une autre forme aux mathématiques. Nous avons déjà vécu ça avec les IDD, les TPE et plus récemment l'AP.

L'Enseignement des Pratiques Interdisciplinaires risque fort de nous échapper pour des questions d'équilibre de service (toutes matières confondues). De plus, l'interdisciplinarité ne se décrète pas, on ne peut l'imposer. Elle ne fonctionne que si les enseignants sont volontaires et ont choisi ce type d'engagement.

Cet enseignement pose le problème de la formation des enseignants : pour certains d'entre eux, c'est le manque de culture scientifique qui les empêche de se lancer dans ce type de projet et elle n'existe pas en formation.

Nathalie évoque la nécessité d'endroits ressources pour se former et d'un appui institutionnel. Julien pose la question de la place de l'IREM dans cet accompagnement à la formation. Nos IPR sont-ils en retrait dans ce type de proposition de formation en raison de la présence des IREM ?

Concernant les programmes

Frédéric expose les conditions dans lesquelles les programmes ont été élaborés. De toute évidence, si les

propositions pour le cycle 3 semblent travaillées, ce n'est pas le cas du cycle 4. On y relève des coquilles, des incohérences... Julien s'interroge sur les remontées de la consultation électronique sur les programmes initiée par le ministère. Frédéric précise que d'une part elle n'est pas terminée (jusqu'au 12 juin) et que d'autre part, n'importe qui peut répondre. On ne sait pas qui est chargé du traitement des réponses ni de leur comptabilisation. Julien pense que les avis des organismes institutionnels pourront faire évoluer certains points.

Thierry nous a fait part, dans un mail, des interrogations de la commission nationale collège de l'APMEP. Dans le document présenté, les objectifs sont fixés à l'issue des 3 années du cycle 4 mais il n'y a pas de déclinaison par année. Outre les difficultés de suivi (d'une année sur l'autre par des enseignants différents, mobilité des élèves), cela aura pour conséquence la disparition d'un cadre national. La commission s'est positionnée pour qu'une progression annuelle soit précisée.

Pour ce qui est des contenus, des questions se posent sur le rôle attribué à la démonstration. Quelles propriétés des figures sont conservées ? La géométrie semble évacuée. L'algorithmique apparaît sous un angle très lié à l'informatique. Là aussi, des ressources sont nécessaires. Julien rappelle l'existence du site [culturemaths](http://culturemaths.fr) qui devrait pouvoir remplir une fonction de centre de ressources. Dominique pose la question de l'ancrage des maths dans la vie réelle avec un tel programme. La question de la formation est, là encore, centrale.

Si les positions de l'APMEP nationale évoquent ces points négatifs, elles expriment très clairement le soutien à cette réforme alors que les membres de la commission collège sont très partagés et que des voix discordantes se sont déjà fait entendre. Les documents de la CII sont d'ailleurs plus critiques. Nous sommes nous aussi beaucoup plus circonspects sur les conséquences de cette réforme pour l'enseignement des mathématiques que nous défendons.

La régionale a exprimé au national nos inquiétudes sur les points suivants :

- Des programmes trop flous, les contenus doivent être plus clairs et sans implicite ;
- Une graduation annuelle est nécessaire ;
- La formation des enseignants.

Exposition « Puzzle »

Dominique Gaud et Jean-Paul Guichard travaillent encore pour réduire les coûts, en particulier avec le LP de Surgères. Certaines prestations initialement prévues doivent être abandonnées, la peinture de certaines pièces par exemple.

Il reste encore la brochure à rédiger et mettre en forme, et un gros travail à mener sur le catalogue de l'exposition. Pour réaliser la documentation pédagogique, une réunion se tiendra le mercredi 1er juillet.

Concernant les frais, Frédéric rappelle qu'ils sont à l'heure actuelle pris en charge par la Régionale et qu'il faudra renégocier le contrat de location de l'exposition avec l'Espace Mendès France pour récupérer systématiquement la totalité du montant de la location de la version itinérante.

Rallye

Vous avez pu lire le bilan auparavant.

Le point de mécontentement est l'absence de tous les inspecteurs : étaient pourtant invités les 4 IEN, les IPR, l'inspecteur de lycée professionnel. Vis à vis du travail effectué par l'équipe du rallye, de l'engagement des collègues qui ont fait participer leur classe, c'est un sentiment de grande déception, pour les participants comme pour les organisateurs.

Le nombre d'inscrits entraîne une charge de travail importante qu'il faudra chercher à répartir. L'équipe du rallye recrute donc. Avis aux intéressés, contactez Chantal Gobin.

Corol'aire

Pour le supplément au numéro 100 Jean manque de temps. Ce corol'aire sortira plus tard sous la forme d'un numéro spécial.

Nous discutons des moyens dont nous disposons pour continuer à faire vivre notre publication. De l'avis de plusieurs, l'utilisation de LaTeX simplifierait grandement le problème de l'écriture des formules mathématiques. Ici aussi, les bonnes âmes peuvent se joindre à nous : contactez Sébastien Dassule-Debertonne sdassule.apmep@gmail.com

Conférence

Des conférences de Frédéric Testard ou de Guy Wallet devraient être organisées.

Calendrier

Le prochain comité régional est fixé au mercredi 23 septembre à 15h à l'IREM.

Épisode 3 : prix en Mésopotamie

*Ur-Nammu (assis)
sur un sceau-
cylindre de
Khashkhamer, patesi
de Ishkun-Sin son
vassal (vers -2100)*



Ur-Nammu, soucieux de justice, promulgue le plus ancien code de lois connu : l'étalon monétaire (mine et sicle d'argent), les poids et mesures (*silâ*) sont standardisés.

GÚ  talent (30kg) = 60 ma-na  mine = 60 GÍN  sicle = 180 ŠE  grain

Voici un éventail de situations mettant en jeu échanges et prix en Mésopotamie et Assyrie.

Achat ou location

- 1) Location de maison par Ardi-Bêl a Nergal-ina-teši-êtir pour 20 sicles (166 g) d'argent par an.
- 2) Vente d'une terre agricole près de la porte d'Uraš par Kalbaia à Marduk-nâsir-apli pour 9 mines 30 sicles (4,75 kg) d'argent.
- 3) Vente d'une maison près de la porte de Zababa pour 1 mine et 10 sicles (583 g) d'argent par lqîša-Marduk et Bêl-êtir à Iddin-Nabû.
- 4) Location de maison par Itti-Marduk-balatu à Nasir pour 50 sicles (416,5 g) d'argent par an.
- 5) Échange de terres agricoles entre Marduk-nâsir-apli et sa tante paternelle Suqa'îtu : il lui cède 2 gur (3 ha) de palmeraie près de la porte Ebišu de Dilbat et 4 mines (2 kg d'argent) contre 6 gur (9 ha) de palmeraie a la Porte d'Enlil à Babylone.

- 6) Contrat de fermage d'une terre agricole de 3 gur (environ 4,5 ha) entre Marduk-nâsir-apli et Sîn-ibni contre un versement annuel de 7 gur (1260 litres) d'orge avec les prestations annexes.

Reconnaissance de dettes

Reconnaissance de dette de 14 mines et 49 sicles (7,4 kg) d'argent de Marduk-nâsir-apli à la charge de son serviteur Nabû-aialu, avec un intérêt de 20 % par an. [14 2/3 ma-na 9 gín kù-babbar...]

On remarquera que dans ces populations les échanges de grains de métal (cuivre, étain, argent, or) sont faits par les marchands, les scribes, les orfèvres, que tout est scrupuleusement noté, comme chez les notaires, et que tout est prêt pour une normalisation des échanges par des objets indépendants des utilisateurs : la monnaie frappée.

Denrées

- 1) Fourniture de 10044 gur (1 807 920 litres) d'orge sur ordre du gouverneur de Babylonie aux autorités de Sippar.
- 2) Vente de cruches de vinaigre par l'Ebabbar à 4 personnes pour 3 sicles (25 g) d'argent chacune.
- 3) Contrat Camb 331

1 mine d'argent, prix de 50 jarres de bière de bonne qualité, avec leur cruche-hasbattu ; 2/3 de mine d'argent, prix de 60 kur de dattes ; 22 sicles d'argent, prix de 2 marmites-mušahhinu en bronze, dont le poids est de 7 mines 1/2, 7 coupes en bronze et 3 bols-batu en bronze, ainsi que 4 kur de sel de céleri qui sont entreposés dans la maison.

Total : 2 mines 2 sicles d'argent, appartenant à Itti-Marduk-balātu, fils de Nabû-ahhê-iddin, descendant d'Egibi, sont à la disposition de Ishunnatu, l'esclave d'Itti-Marduk-balatu. Jusqu'à la fin du mois x, elle versera un intérêt.

Non compris : 5 lits, 10 chaises, 1 marmite-mušahhinu, 1 cuve-šiddatu, 1 ingurinnu, 3 ciseaux, 1 bêche en fer, 1 hâche, 2 pots à fermentation, 1 pot à décantation, 1 support pour les pots à fermentation, 2 maššanu.

Témoins (les mêmes qu'en Camb 330).
Hursagkalamma, 11-ix-Cambyse 6

Le contrat Camb 331 a pour but de récapituler cet investissement, en prévoyant qu'elle devra verser un intérêt pendant un peu plus d'un mois et demi pour la valeur en argent de tous ces éléments, soit 2 mines 2 sicles. Le taux de cet intérêt n'est pas précisé, mais s'il s'agit du taux habituel de 20% par an : elle devrait reverser à Itti-Marduk-balatu environ 3 sicles d'argent. À partir du mois xi, il est vraisemblable qu'Itti-Marduk-balatu sera remboursé par une participation directe aux bénéfices.

Échange de « monnaie » de référence d'une région à l'autre :

Une tablette indique que 840 mines anatoliennes équivalent à 760 mines assyriennes. Cela signifie que la mine assyrienne pèse 10 % de plus que la mine locale.

Salaires

C'est à Uruk IV, vers 3300 av. J.-C., qu'apparaissent les premières tablettes d'argile qui sont pour la plupart des pièces de comptabilité ou d'inventaire.

« Ainsi la ration d'orge, salaire journalier des ouvriers, est figurée par la représentation d'un épi devant une tête stylisée symbolisant un individu ; à côté est tracée l'image d'une écuelle semblable à celles, en terre grossière, qui ont été retrouvées sur le site d'Uruk et qui servaient à contenir la quantité de nourriture allouée à chacun (environ 0,8 litre d'orge). »

Pesée de monnaies

- 1) 2 mines 57 sicles d'or, (poids de 2 bols-m. et de 3 feuilles, rentrées royales, à vérifier, chez Bel-ibni et Istar-sum-ibni, les orfèvres. (Pesé) avec les 3 mines de bronze du nasbatu, et l'unité de 3 sicles du côté de l'or.

Le texte montre comment on arrive au poids de 2 mines 57 sicles en plaçant un poids de 3 mines, sous forme de nasbatu, et en réalisant l'équilibre par un poids de 3 sicles mis sur l'autre plateau.

- 2) 5 mines d'or-liqtum à raison de 15 sicles (d'argent) le sicle (d'or), son (prix) en argent (est d') 1 talent 15 mines.
- 3) 14 mines d'or à raison de 5 ½ sicles (d'argent) le sicle (d'or) sa (valeur) en argent (est de) 1 talent 17 mines.



Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à **ma nouvelle adresse** : frederic.deligt2@gmail.com

Voici l'étude annoncée dans la précédente rubrique envoyée par **Jean-Christophe Laugier**.

Un problème de poids

La nuit est propice à la réflexion mathématique. Bien des matheux partagent cet avis ! Voici le résultat, certainement classique, de cogitations nocturnes, qu'un travail diurne a permis de clarifier et de mettre en forme. Je me suis posé le problème suivant que l'on peut présenter sous une forme imagée, en termes physiques :

Est-il possible de constituer une boîte de poids de manière que l'on puisse peser toute masse inférieure à la masse totale des poids, la pesée s'effectuant de la manière habituelle avec une balance à double plateau ?

La masse m à peser est placée sur le plateau de droite par exemple et on place sur le plateau de gauche successivement, les plus grands poids possibles jusqu'à atteindre l'équilibre si possible, auquel cas la pesée est terminée. On remarque que les poids doivent être en nombre infini, sinon on ne pourrait peser qu'un nombre fini de masses. On peut donc représenter la boîte de poids par une suite $(p_n)_{n \geq 1}$ de réels strictement positifs décroissante au sens large. Il est clair d'autre part que l'on doit avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$ car si $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \alpha$ avec $\alpha > 0$, on ne peut peser aucune masse inférieure à α .

Soit m une masse à peser, $0 < m < s$, s étant la masse totale des poids, $s = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n$, $0 < s \leq +\infty$.

La pesée est décrite par la suite $(n_k)_{k \geq 1}$ finie ou infinie définie par induction de la manière suivante : n_1 est le plus petit des entiers n tels que $p_n \leq m$, qui existe puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$. Si $p_{n_1} = m$ alors la pesée est terminée et la suite $(n_k)_{k \geq 1}$ se réduit à son seul terme n_1 . Sinon, supposons définis $n_1, n_2, \dots, n_k$, $k \geq 1$, tels que $p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_k} < m$; soit n_{k+1} le plus petit des entiers $n > n_k$ tels que $p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_k} + p_n \leq m$, qui existe également puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$.

Si $p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_k} + p_{n_{k+1}} = m$ alors la suite $(n_k)_{k \geq 1}$ est finie et égale à $n_1, n_2, \dots, n_{k+1}$ et la pesée est terminée.

La suite $(n_k)_{k \geq 1}$ est générée par l'algorithme suivant :

$n := 1$; $p := 0$; $k := 0$; { p est le poids cumulé sur le plateau de gauche, k le nombre de poids placés sur ce plateau}

répéter

$p := p + p_n$;

tant que $p > m$ faire

début

$p := p - p_n$;

$n := n + 1$;

$p := p + p_n$;

fin ;

$k := k + 1$;

$n_k := n$;

$n := n + 1$

jusqu'à $p = m$

Si la suite $(n_k)_{k \geq 1}$ engendrée est finie, on a évidemment $m = \sum_k p_{n_k}$. Mais qu'en est-il dans le cas où la suite est infinie ?

On a alors pour tout $k \geq 1$, $p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_k} < m$ d'où $\sum_k p_{n_k} \leq m$. A quelle condition a-t-on l'égalité ?

Une condition nécessaire pour que l'égalité $\sum_k p_{n_k} = m$ ait lieu pour tout m , $0 < m < s$, lorsque la suite $(n_k)_{k \geq 1}$ est infinie est :

Pour tout $i \geq 1$, $p_i \leq \sum_{n=i+1}^{+\infty} p_n$ (C).

En effet, s'il existe $i \geq 1$ tel que $p_i > \sum_{n=i+1}^{+\infty} p_n$, soit m tel que $\sum_{n=i+1}^{+\infty} p_n < m < p_i$; supposons que $\sum_k p_{n_k} = m$. Alors

puisque $m < p_i$, on doit avoir $n_i \geq i+1$ d'où $m \leq \sum_{n=i+1}^{+\infty} p_n$ ce qui est contradictoire. Montrons que la condition (C)

est suffisante pour avoir l'égalité $\sum_k p_{n_k} = m$ dans le cas où la suite $(n_k)_{k \geq 1}$ est infinie.

Prouvons que l'on a $p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_k} < m < p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_k} + p_{n_{k+1}}$, c'est-à-dire $n_{k+1} > n_k + 1$, pour une infinité de valeurs de k . S'il n'en est pas ainsi, soit k_0 tel que $n_{k+1} = n_k + 1$ pour tout $k \geq k_0$, avec k_0 minimal.

Si $k_0 > 1$ alors $p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_{k_0}} + p_{n_{k_0}+1} + \dots + p_{n_{k_0}+u} < m < p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_{k_0}-1}$ pour tout $u \geq 1$; d'où $p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_{k_0}-1} \leq m < p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_{k_0}-1}$ en vertu de (C) ce qui est absurde.

Si $k_0 = 1$ et $n_1 > 1$ alors $p_{n_1} + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_1+u} < m < p_{n_1-1}$ pour tout $u \geq 1$ d'où $p_{n_1-1} \leq m < p_{n_1-1}$ en vertu de (C) ce qui est absurde.

Enfin si $k_0 = 1$ et $n_1 = 1$ alors $p_1 + p_2 + \dots + p_{1+u} < m < s$ pour tout $u \geq 1$ d'où $s \leq m < s$ ce qui est absurde.

Puisque $p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_k} < m < p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_k} + p_{n_{k+1}}$ pour une infinité de valeur de k et comme

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p_{n_{k+1}} = 0 \text{ alors } \sum_k p_{n_k} = m.$$

Le problème que nous nous étions posés est donc résolu. Remarquons que la condition (C) est automatiquement satisfaite si $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty$. C'est le cas par exemple si $p_n = 1/n$.

Le lecteur pourra d'ailleurs démontrer qu'avec cette boîte de poids, la pesée décrite ci-dessus, de toute masse m , $0 < m \leq 1$, est finie si et seulement si m est rationnelle. Ceci n'est autre qu'un résultat bien connu relatif aux fractions égyptiennes : toute fraction a/b ($1 \leq a \leq b$), peut s'écrire comme une somme finie de fractions unitaires ou égyptiennes (de numérateurs 1) distinctes.

On a par exemple $\frac{35}{48} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{35} + \frac{1}{1680}$.

La condition (C) est également satisfaite avec la suite de poids bien connue (p_n) définie par $p_n = \frac{1}{2^n}$. Tout nombre réel compris entre 0 et 1 admet un développement binaire.

Un autre problème se pose à présent : l'unicité de la pesée. Pour le formuler correctement, la boîte de poids doit être présentée d'une manière différente. On considère la suite strictement décroissante de poids distincts de la boîte. Celle-ci est représentée par une suite de couples $(p_n, k_n)_{n \geq 1}$, $(p_n)_{n \geq 1}$ étant une suite de réels strictement positifs, strictement décroissante, de limite 0, et $(k_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 1 (k_n est le nombre de poids de la boîte égaux à p_n). On suppose que la condition (C) est satisfaite, qui s'écrit à présent :

pour tout $i \geq 1$, $p_i \leq \sum_{n=i+1}^{+\infty} k_n p_n$. On sait d'après ce qui précède qu'il existe alors pour tout m tel que $0 < m < s = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n p_n$

une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'entiers telle que $0 \leq x_n \leq k_n$ vérifiant $m = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n p_n$. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est-elle unique ?

Supposons qu'il existe i tel que $p_i < \sum_{n=i+1}^{+\infty} k_n p_n$ et soit x tel que $p_i < x < \sum_{n=i+1}^{+\infty} k_n p_n$. Alors d'après ce qui précède,

on peut écrire d'une part $x = p_i + \sum_{n=i+1}^{+\infty} x_n p_n$ et d'autre part $x = \sum_{n=i+1}^{+\infty} x'_n p_n$, x_n et x'_n étant des entiers compris entre

0 et k_n . x est donc pesé d'au moins deux manières différentes. Si l'on veut que la pesée de chaque x appartenant à $]0 ; s[$ sauf peut-être une quantité dénombrable d'entre eux, soit unique, il est nécessaire que pour tout $i \geq 1$,

$p_i = \sum_{n=i+1}^{+\infty} k_n p_n$ (C'). On est en mesure à présent de décrire précisément toutes les suites $(p_n, k_n)_{n \geq 1}$ vérifiant la

condition (C'). Tout d'abord, d'après (C'), $s = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n p_n < +\infty$. Quitte à remplacer p_n par p_n/s , on peut supposer

que $s = 1$. On a donc $k_1 p_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} k_n p_n = k_1 p_1 + p_1 = 1$ d'où $p_1 = \frac{1}{k_1 + 1}$.

Il vient ensuite $k_2 p_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} k_n p_n = k_2 p_2 + p_2 = \frac{1}{k_1 + 1}$ d'où $p_2 = \frac{1}{(k_1 + 1)(k_2 + 1)}$. Et l'on montre aisément que

d'une manière générale $p_n = \frac{1}{(k_1 + 1) \dots (k_n + 1)}$. Pour constituer une boîte de poids de masse totale 1, vérifiant la condition (C'), on se donne une suite $(k_n)_{n \geq 1}$ d'entiers supérieurs ou égaux à 1 : pour tout $n \geq 1$, la boîte comporte k_n poids p_n avec $p_n = \frac{1}{(k_1 + 1) \dots (k_n + 1)}$.

Le lecteur pourra prouver, si le cœur lui en dit, qu'effectivement une telle boîte permet de peser de manière unique toutes les masses inférieures à 1 qui ne sont pas de la forme $\frac{N}{(k_1 + 1) \dots (k_n + 1)}$, $N \geq 1$, celles-ci pouvant

être pesées de deux manières différentes, l'une finie et l'autre infinie, à préciser.

Le problème de l'unicité est donc résolu. Nous avons déterminé toutes les boîtes de poids qui permettent de peser de manière unique toutes les masses inférieures à la masse totale des poids à l'exception d'une infinité dénombrable d'entre elles.

Remarquons pour terminer que si $k_n = 9$ pour tout $n \geq 1$, alors on retrouve une boîte de poids bien familière. La « pesée » de tout réel x compris entre 0 et 1 n'est autre que son développement décimal habituel, unique si x n'est pas de la forme $\frac{N}{10^n}$, c'est-à-dire décimal.

Des problèmes :

101-1 de Frédéric de Ligt (Montguyon) :

Si la fraction p/q est strictement comprise entre les fractions 2014/2015 et 2015/2016, quelle est alors la valeur minimale de la somme $p + q$?

101-2 de Frédéric de Ligt (Montguyon) :

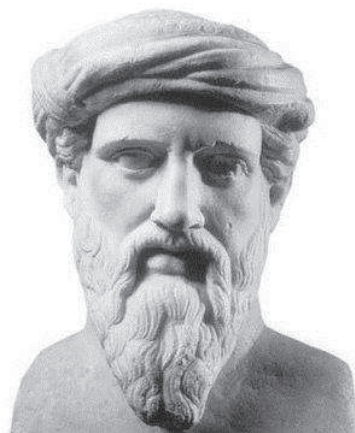
Métempsychose

« Un jour, passant près de quelqu'un qui maltraitait son chien, on raconte qu'il [Pythagore] fut pris de compassion et qu'il adressa à l'individu ces paroles : "Arrête et ne frappe plus, car c'est l'âme d'un homme qui était mon ami, et je l'ai reconnu en entendant le son de sa voix" » (Diogène Laërce, *Vies et doctrines des philosophes illustres*, VIII, 36).

Depuis le temps de Pythagore, la science a fait bien des progrès. On dispose maintenant de statistiques.

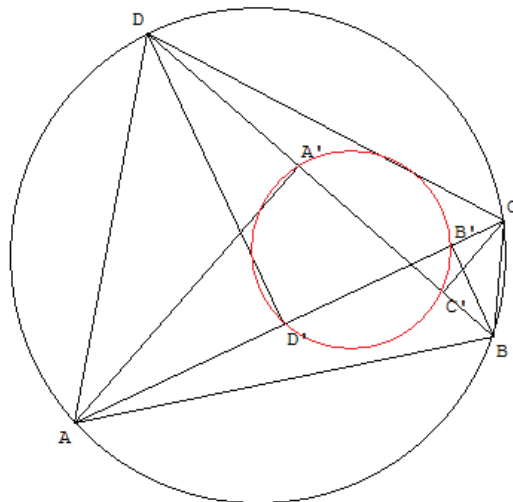
Il est établi qu'un humain a deux fois plus de chances de se réincarner en animal plutôt qu'en humain et de même un animal a deux fois plus de chances de se réincarner en humain plutôt qu'en animal.

Si la quatrième réincarnation d'un humain est encore un humain, quelle est la probabilité qu'il soit resté humain après sa première réincarnation ?



Soit ABCD un quadrilatère inscriptible. On projette orthogonalement A en A' et C en C' sur (BD), B en B' et D en D' sur (AC).

Démontrer que A', B', C' et D' sont cocycliques.



Des solutions :

98-5 de Jacques Chayé :

D'après « Premiers éléments de géométrie » par C. Vaquant et A. Macé de Lépinay, Masson, 1914, p.113. Démontrer que, dans un triangle, les droites qui joignent les pieds des hauteurs sont respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent les sommets au centre du cercle circonscrit au triangle.

Solution de Louis-Marie Bonneval

Soit ABC un triangle, appelons K et L les pieds des hauteurs issues de A et B, O le centre du cercle circonscrit, B' le milieu de [AC]. Raisonnons en angles de droites (*i.e.* modulo π) pour englober tous les cas de figure.

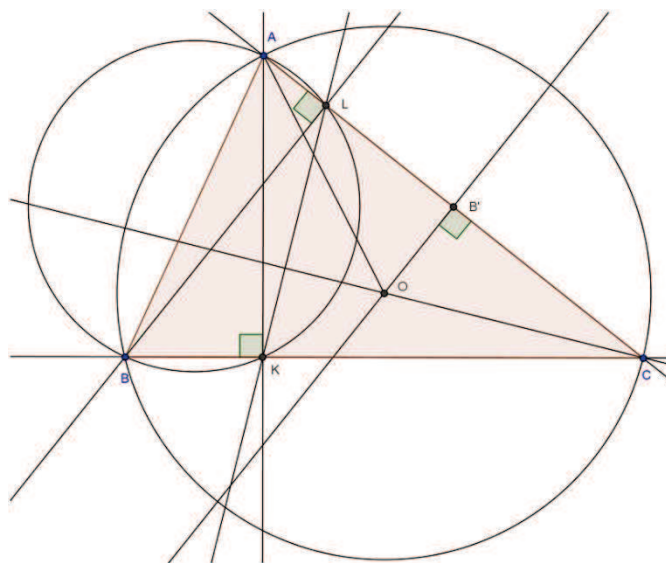
$(OC, LK) = (OC, OB') + (OB', LB) + (LB, LK)$.

Or

- $(OC, OB') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = (BC, BA)$ car (OB') est la médiatrice de [AC], et O est le centre du cercle circonscrit à ABC ;
- $(OB', LB) = 0$ car (OB') et (LB) sont perpendiculaires à (AC) ;
- $(LB, LK) = (AB, AK)$ car A, B, K, L sont cocycliques.

On en déduit que :

$$(OC, LK) = (BC, BA) + (AB, AK) = (BC, AK) = \frac{\pi}{2}.$$



Remarque :

Dans le cas où ABC est acutangle, le triangle KLM joignant les pieds des trois hauteurs est le *triangle orthique* de ABC. Il a quelques propriétés curieuses :

- le centre de son cercle inscrit est l'orthocentre de ABC (autrement dit les hauteurs de ABC sont les bissectrices de KLM),
- c'est le triangle de périmètre minimal inscrit dans le triangle ABC (théorème de Fagnano).

99-1 de Jacques Chayé :

Soit un segment [AB]. Une droite d est perpendiculaire en H à la droite (AB), le point H étant en dehors du segment [AB]. Soit M un point variable de d situé dans P, l'un des deux demi-plans limités par (AB).

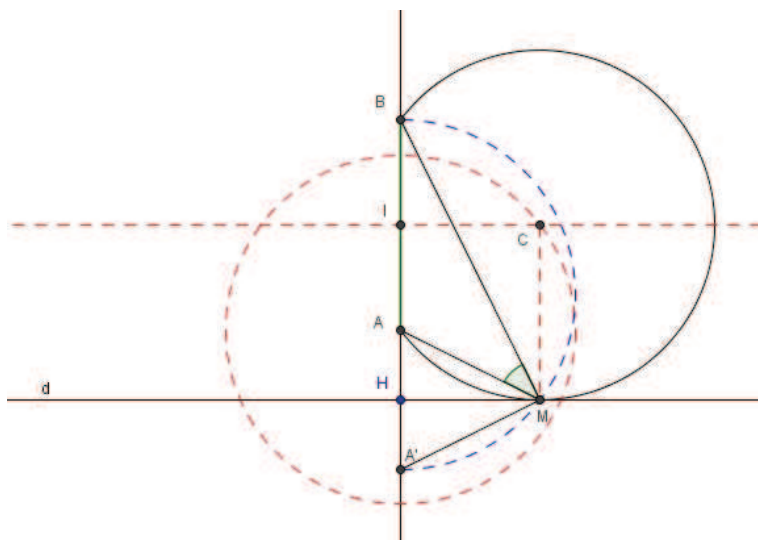
Où le point M doit-il se situer pour que l'angle $\widehat{AMB}$ soit maximum ?

Solution géométrique

L'ensemble des points M de P d'où on voit le segment $[AB]$ sous un angle α est un arc de cercle limité par A et B (arc capable). Son rayon est d'autant plus petit que α est grand. Si on veut α maximum il faut donc trouver le plus petit cercle passant par A et B et ayant au moins un point sur d : c'est celui qui est tangent à d . Le point M cherché est le point de contact de ce cercle avec d .

Pour construire M , on peut remarquer que le centre C du cercle est sur la médiatrice de $[AB]$. De plus il vérifie $CA = CM = IH$, où I est le milieu de $[AB]$. Le point C est donc l'intersection avec la médiatrice de $[AB]$ du demi-cercle de centre A et de rayon IH situé sur P . M est le projeté orthogonal de C sur d . On peut remarquer en écrivant de deux façons la puissance de H par rapport au cercle AMB , que $HM^2 = HA \cdot HB$, d'où $HM = \sqrt{HA \cdot HB}$. On en déduit que si A' est le symétrique de A par rapport à d , $HM^2 = HA' \cdot HB$, donc l'angle $\widehat{A'MB}$ est droit.

Cela fournit une autre construction de M : c'est l'intersection avec d du demi-cercle de diamètre $[BA']$ situé sur P .



Solution analytique

Prenons un repère orthonormé d'origine H , dont le premier axe est d . Les points A et B sont sur l'axe des ordonnées, appelons a et b leurs ordonnées respectives ; nous pouvons supposer $0 < a < b$. Prenons pour P l'ensemble des points d'abscisse positive. Un point M de d situé dans P est repéré par son abscisse positive x . Maximiser l'angle $\widehat{AMB}$ (nécessairement aigu) revient à maximiser sa tangente.

$$\text{Or } \tan(\widehat{AMB}) = \tan(\widehat{HMB} - \widehat{HMA}) = \frac{\tan(\widehat{HMB}) - \tan(\widehat{HMA})}{1 + \tan(\widehat{HMB}) \tan(\widehat{HMA})} = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} = \frac{b-a}{x + \frac{ab}{x}}$$

Cette quantité est maximale quand $x + ab/x$ est minimal, c'est-à-dire quand $x = \sqrt{ab}$. On retrouve $HM = \sqrt{HA \cdot HB}$. L'angle maximal est alors $\text{atan}\left(\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}\right) = \text{atan}\left(\frac{AB}{2\sqrt{HA \cdot HB}}\right)$.

100-2 de Frédéric de Ligt :

Placer dans une grille 3x3 les 9 diviseurs de 100 pour que le produit de chaque ligne, de chaque colonne et des deux grandes diagonales soit toujours le même.

Solution de l'auteur

C'était facile ! Pourquoi pas pour renouveler dans les petites classes du collège l'étude du classique carré magique 3 x 3 ?

5	100	2
4	10	25
50	1	20

100-4 de Frédéric de Ligt :

Montrer que $\cos 100^\circ$, $\sin 100^\circ$ et $\tan 100^\circ$ sont irrationnels.

Solution de l'auteur

On va plutôt chercher à établir l'irrationalité de $\sin 10^\circ$, $\cos 10^\circ$ et $\tan 10^\circ$.

Comme $\cos 100^\circ = -\sin 10^\circ$, $\sin 100^\circ = \cos 10^\circ$ et $\tan 100^\circ = -1/\tan 10^\circ$, le problème proposé sera résolu.

On rappelle la formule de Moivre :

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

En la particulierisant pour $n = 3$ et $x = 10^\circ$ puis en développant le premier membre on obtient :

$$\cos 30^\circ = \cos^3 10^\circ - 3 \cos 10^\circ \sin^2 10^\circ = 4 \cos^3 10^\circ - 3 \cos 10^\circ \quad (1)$$

$$\sin 30^\circ = 3 \cos^2 10^\circ \sin 10^\circ - \sin^3 10^\circ = -4 \sin^3 10^\circ + 3 \sin 10^\circ \quad (2)$$

Mais $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est un nombre irrationnel, ce qui entraîne, en raisonnant par l'absurde dans (1), que $\cos 10^\circ$ en est un aussi.

Pour assurer l'irrationalité de $\sin 10^\circ$, on va encore raisonner par l'absurde mais il va falloir aller chercher un peu plus loin la contradiction.

On utilise maintenant la relation (2) et on va supposer que $\sin 10^\circ$ est un nombre rationnel qui peut s'exprimer sous la forme d'une fraction irréductible a/b . Comme $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ cela donne l'équation en nombres entiers :

$$b^3 = -8a^3 + 6ab^2 \quad (3).$$

L'entier b doit être pair, on peut donc l'écrire sous la forme $2b'$. Comme a et b sont supposés premiers entre eux, il en va de même pour a et b' .

L'équation (3) devient :

$$a^3 + b'^3 = 3ab'^2 \quad (4)$$

où ni a ni b' ne sont des multiples de 3. Il n'y a alors que deux possibilités.

Soit $a = 3k + 1$ et $b' = 3k' + 2$ et l'équation (4) se réécrit :

$$(3k + 1)^3 + (3k' + 2)^3 = 9(3k^3 + 3k^2 + k + 1 + 3k'^3 + 6k'^2 + 4k') = 3(3k + 1)(3k' + 2)$$

Il n'y a pas de solution à cette équation car le membre de droite n'est pas divisible par 9.

Soit $a = 3k + 2$ et $b' = 3k' + 1$ et l'équation (4) se réécrit :

$$(3k + 2)^3 + (3k' + 1)^3 = 9(3k^3 + 6k^2 + 4k + 1 + 3k'^3 + 3k'^2 + k') = 3(3k + 2)(3k' + 1)$$

On conclut de la même façon que précédemment.

Il reste à montrer que $\tan 10^\circ$ est irrationnel.

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{3 \cos^2 10^\circ \sin 10^\circ - \sin^3 10^\circ}{\cos^3 10^\circ - 3 \cos 10^\circ \sin^2 10^\circ} = \tan 10^\circ \frac{3 \cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ}{\cos^2 10^\circ - 3 \sin^2 10^\circ} = \tan 10^\circ \frac{3 - \tan^2 10^\circ}{1 - 3 \tan^2 10^\circ}$$

On raisonne ensuite comme on l'a fait avec $\cos 10^\circ$ pour conclure à l'irrationalité de $\tan 10^\circ$.

On nous écrit

Une des personnes qui travaillent sur le supplément au numéro 100 nous écrit pour faire un bilan partiel de ses recherches. Curieusement, il souhaite rester anonyme. Nous respectons son vœu pour vous faire partager l'estime qu'il porte aux personnes citées.

Le numéro 100 de Corol'aire

Pour le numéro 101, en reprenant les cent numéros précédents (cent car pour des raisons techniques un numéro 0 devait paraître), nous aurions pu choisir de citer des noms, de redonner des articles, des comptes-rendus, des anecdotes et des souvenirs divers, tout ceci d'une manière un peu aléatoire sinon arbitraire. Nous aurions voulu citer tous ceux qui ont aidé à faire vivre Corol'aire, mais nous avons reculé devant cette énorme tâche. Veuillez nous pardonner.

Il est toujours possible de nous demander des extraits des Corol'aire

Il faut remercier spécialement l'I.R.E.M. pour nous avoir continuellement soutenus et hébergés.

Un détail : curieusement, Corol'aire a été muet sur les retraites de Louis-Marie Bonneval, de Jacques Germain, de Jean-Paul Guichard et de Jean Fromentin qui, tous, jouent un grand rôle dans la régionale. Il faut en parler ici.

Jean Fromentin

Corol'aire, tel qu'il a été, a existé grâce à Jean Fromentin. Le travail qu'il a fourni depuis le début, et même avant pour les numéros d' « A.P.M.E.P. Poitou-Charentes », est considérable, assurant la collecte des articles (parfois en rappelant à l'ordre les responsables de rubriques), la mise en page (un vrai travail de spécialiste), le suivi des listes d'adhérents pour l'envoi du journal (étiquettes d'abord, internet maintenant). Il faut ajouter que non content de faire ce boulot, il a écrit des 'éditos', des articles, proposé des exercices ; ne parlons pas du travail énorme fait pour notre rallye. On doit préciser qu'il travaille aussi pour l'A.M.P.E.P. au niveau national (publications et commissions). Il en a d'autant plus de mérite.

Merci Jean !

APMEP, IREM Bâtiment de mathématiques
Téléport 2—BP30179
Bd Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope CHASSENEUIL CEDEX

Site : <http://apmep.free.fr/>

Mél : apmep.poitiers@free.fr

Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication

F. de Ligt

Éditeur

APMEP, Régionale de Poitou-Charentes

Comité de rédaction

F. de Ligt, L.-M. Bonneval, S. Dassule-Debertonne,
J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon, J. Michel

Siège Social

IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie
86962 Chasseneuil CEDEX

Imprimerie

IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie
86962 Chasseneuil CEDEX

Dépôt légal

Juin 2015