RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à ***ma nouvelle adresse*** *:* frederic.deligt2@gmail.com

N.d.l.r. Jean-Christophe Laugier a transmis une intéressante étude au sujet d'un problème original de pesée. Faute de place pour la présenter ici, il vous faudra attendre le prochain numéro pour la découvrir.

Les énoncés proposés dans cette rubrique mettent bien sûr 100 à l'honneur.

Des problèmes

100-1

La série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge. Mais qu'en est-il de la série harmonique incomplète $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ où A désigne l'ensemble des entiers naturels qui ne contiennent pas la séquence 100 dans leur écriture décimale ?

100-2

Placer dans la grille ci-contre les 9 diviseurs de 100 pour que le produit de chaque ligne, de chaque colonne et des deux grandes diagonales soit toujours le même.

100-3

Combien de pavés droits différents peut-on former avec 100^{100} cubes identiques ?

100-4

Montrer que cos100°, sin100° et tan100° sont irrationnels.

100-5

Montrer que dans un ensemble de 199 entiers il est toujours possible d'en trouver 100 dont la somme est un multiple de 100.

Des solutions

97-4 *de Jean-Christophe Laugier* :

Un chemin de longueur n à pas unités horizontaux ou verticaux dans le réseau $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ joignant A(a, b) à B(c, d) est une suite de points M_0, M_1, …, M_n telle que M_0 = A, M_n = B et pour tout $i\in\{0,1,...,n-1\}$, $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}=\vec{D}$, $\vec{D}$ étant égal à l'un des vecteurs (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0). Déterminer le nombre de chemins joignant l'origine (0, 0) au point A(a, b).

Solution de Louis-Marie Bonneval :

Rebaptisons (x, y) les coordonnées du point d'arrivée, qu'on supposera positives. Pour chaque chemin de longueur n, notons respectivement b, d, g, h le nombre de pas vers le bas, vers la droite, vers la gauche, vers le haut.

Ces quatre naturels doivent vérifier : $\begin{cases} b+d+g+h=n \\ d-g=x \\ h-b=y \end{cases}$. On en déduit $d = g + x$ et $h = b + y$, d'où $2(b + g) = n - (x + y)$.

Donc, si $n < x + y$, ou si n n'a pas la même parité que $x + y$, il n'y a pas de solution. Supposons donc $n\geq x+y$ et n de même parité que $x + y$, et appelons k le naturel $\frac{n-(x+y)}{2}$. Comme $b + g = k$, il y a $k + 1$ possibilités pour b, donc pour (b, d, g, h) puisque $g = k - b$, $d = g + x$, $h = b + y$. Pour chaque valeur de b entre 0 et k, il y a $\frac{n!}{b!\,d!\,g!\,h!}$ façons d'ordonner les pas successifs. Le nombre de chemins est donc $\sum_{b=0}^{b=k}\frac{n!}{b!d!g!h!}=\sum_{b=0}^{b=k}\frac{n!}{b!\,(k-b+x)!\,(k-b)!\,(b+y)!}$.

Exemple pour aller à A(1, 2) (en écrivant D, G, B, H pour "un pas à droite", "un pas à gauche", "un pas en haut", "un pas en bas") :

* il n'y a aucun chemin de longueur 1 ou 2 ;
* il y a 3 chemins de longueur 3 : DHH, HDH, HHD ;
* il n'y a aucun chemin de longueur 4 ;

* il y a 50 chemins de longueur 5 :

$\dfrac{5!}{0!\,2!\,1!\,2!} = 30$ chemins pour lesquels b = 0, d = 2, g = 1, h = 2 : DDGHH DDHGH DDHHG DGDHH DGHDH DGHHD DHDGH DHDHG DHGDH DHGHD DHHDG DHHGD GDDHH GDHDH GDHHD GHDDH GHDHD GHHDD HDDGH HDDHG HDGDH HDGHD HDHDG HDHGD HGDDH HGDHD HGHDD HHDDG HHDGD HHGDD ;

$\dfrac{5!}{1!\,1!\,0!\,3!} = 20$ chemins pour lesquels b = 1, d = 1, g = 0, h = 3 : BDHHH BHDHH BHHDH BHHHD DBHHH DHBHH DHHBH DHHHB HBDHH HBHDH HBHHD HDBHH HDHBH HDHHB HHBDH HHBHD HHDBH HHDHB HHHBD HHHDB.

Remarques :

1) Si les coordonnées x et y du point d'arrivée ne sont pas toutes les deux positives, le nombre de chemins de longueur n arrivant en (x, y) est égal au nombre de chemins de longueur n arrivant en $\left(|x|,|y|\right)$, ce qui ramène au cas précédent.

2) $\dfrac{n!}{b!\left(k-b+x\right)!\left(k-b\right)!\left(b+y\right)!} = \dfrac{k!}{b!\left(k-b\right)!} \times \dfrac{\left(n-k\right)!}{\left(k-b+x\right)!\left(b+y\right)!} \times \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!} = \dbinom{k}{b}\dbinom{n-k}{b+y}\dbinom{n}{k}$.

Le nombre de chemins peut donc s'écrire $\dbinom{n}{k}\displaystyle\sum_{b=0}^{b=k}\dbinom{k}{b}\dbinom{n-k}{b+y}$.

3) Si $n = x + y$, avec x et y positifs, alors $k = 0$, $b = 0$, $g = 0$, $d = x$, $h = y$, et le nombre de chemins est égal à $\dbinom{n}{x} = \dbinom{n}{y}$: on retrouve une présentation du triangle de Pascal.

Un programme en Algobox pour le calcul :

```
******************************************
Nombre de chemins du réseau ZxZ allant de l'origine à un point de coordonnées (x,y)
******************************************
VARIABLES
x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
c EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
AFFICHER "Abscisse ? "
LIRE x
AFFICHER x
x PREND_LA_VALEUR abs(x)
AFFICHER "Ordonnée ? "
LIRE y
AFFICHER y
y PREND_LA_VALEUR abs(y)
AFFICHER "Longueur ? "
LIRE n
AFFICHER n
c PREND_LA_VALEUR 0
SI (n>=x+y ET (n-x-y)%2==0) ALORS
DEBUT_SI
k PREND_LA_VALEUR (n-x-y)/2
POUR b ALLANT_DE 0 A k
DEBUT_POUR
c PREND_LA_VALEUR c+ALGOBOX_COEFF_BINOMIAL(k,b)*ALGOBOX_COEFF_BINOMIAL(n-k,b+y)
FIN_POUR
c PREND_LA_VALEUR c*ALGOBOX_COEFF_BINOMIAL(n,k)
FIN_SI
AFFICHER "Nombre de chemins : "
AFFICHER c
FIN_ALGORITHME
```

Solution de Claude Morin :

Tout d'abord, par symétries par rapport aux axes, on peut supposer a et b positifs. Un chemin convenable possède k vecteurs (1, 0), $a + k$ vecteurs (1, 0), k' vecteurs (0, -1) et $b + k'$ vecteurs (0, 1). Cela impose $n = a + b + 2(k + k')$ avec k et k' entiers naturels, donc $n = a + b + 2p$ avec p entier naturel ; k peut varier de 0 à p et $k' = p - k$. Pour dénombrer ces chemins il suffit de placer les k vecteurs (-1, 0), les $a + k$ vecteurs (1, 0), les $p - k$ vecteurs (0, -1) et les $b + p - k$ vecteurs (0, 1) dans une liste.

Il y a $\dfrac{n!}{k!\,(a+k)!\,(p-k)!\,(b+p-k)!}$ possibilités d'où le nombre de chemins : $N = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\dfrac{n!}{k!\,(a+k)!\,(p-k)!\,(b+p-k)!}$.

Cela s'écrit encore $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\dbinom{n}{p}\dbinom{p}{p-k}\dbinom{n-p}{a+k}$ qui se simplifie en $\dbinom{n}{p}\dbinom{n}{a+p}$ en utilisant l'identité de Vandermonde.

Cette formule très simple peut s'obtenir directement par un raisonnement astucieux.

À un chemin convenable, formé de k vecteurs (-1, 0), $a + k$ vecteurs (1, 0), $p - k$ vecteurs (0,-1) et $b + p - k$ vecteurs (0, 1), on associe le chemin obtenu en remplaçant les k vecteurs (-1, 0) par k vecteurs (0, 1) et les $p - k$ vecteurs (0, -1) par $p - k$ vecteurs (1, 0).

On obtient ainsi un chemin formé de $a + p$ vecteurs (1, 0) et de $b + p$ vecteurs (0, 1). Le nombre de ces chemins est égal à $\binom{n}{a+p}$ (puisque $n = a + b + 2p$). Mais réciproquement, pour retrouver le chemin de départ à partir du chemin final, il faut choisir p vecteurs et parmi ces vecteurs remplacer (0, 1) par (-1, 0) et (1, 0) par (0, -1). Le nombre k de vecteurs (1, 0) qui ont été remplacés par (0, -1) peut varier de 0 à p. Comme il y a $\binom{n}{p}$ choix de p vecteurs parmi n, on retrouve bien le nombre $\binom{n}{p}\binom{n}{a+p}$.

98-1 *de Frédéric de Ligt* :

Montrer que pour tout entier positif n on peut mettre $\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ sous la forme $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ où m est un entier positif.

Solution de Jacques Chayé :

Calculons les premières valeurs de $u_n = \left(\sqrt{2}-1\right)^n$; $u_1 = \sqrt{2}-1 = \sqrt{2}-\sqrt{1}$; $u_2 = 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}$; $u_3 = 5\sqrt{2}-7 = \sqrt{50}-\sqrt{49}$; $u_4 = 17-12\sqrt{2} = \sqrt{289}-\sqrt{288}$ … Il semble que u_n soit effectivement de la forme $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$, mais aussi alternativement de la forme $a\sqrt{2}-b$, a et b entiers positifs tels que $2a^2 - b^2 = 1$ ou de la forme $a - b\sqrt{2}$, a et b entiers positifs tels que $a^2 - 2b^2 = 1$.
Démontrons ceci par récurrence.

• Le résultat est vrai pour $n = 1$

1°) Si $u_n = a\sqrt{2}-b$ avec a et b entiers positifs tels que $2a^2 - b^2 = 1$, alors

$$u_{n+1} = \left(a\sqrt{2}-b\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = \left(2a+b\right)-\left(a+b\right)\sqrt{2} \text{ et } \left(2a+b\right)^2 - 2\left(a+b\right)^2 = 2a^2-b^2 = 1 .$$

2°) De même, si $u_n = a - b\sqrt{2}$ avec a et b entiers positifs tels que $a^2 - 2b^2 = 1$, alors

$$u_{n+1} = \left(a-b\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = \left(a+b\right)\sqrt{2}-\left(a+2b\right) \text{ et } 2\left(a+b\right)^2 - \left(a+2b\right)^2 = a^2-2b^2 = 1 .$$

• La propriété est donc vraie pour toute valeur de n.

Par ailleurs, dans le cas (1), $u_n = a\sqrt{2}-b = \sqrt{2a^2}-\sqrt{b^2} = \sqrt{2a^2}-\sqrt{2a^2-1}$,

dans le cas (2), $u_n = a-b\sqrt{2} = \sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2} = \sqrt{a^2}-\sqrt{a^2-1}$.

Donc, dans les deux cas : u_n est de la forme $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$.

Prolongement

La propriété s'étend à : $\left(\sqrt{5}-2\right)^n$, à $\left(\sqrt{10}-2\right)^n$, $\left(\sqrt{17}-2\right)^n$, etc. plus généralement à $\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n$.

L'hérédité pour le raisonnement par récurrence s'établit de la même manière.

1°) Si $\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n = a\sqrt{p^2+1}-b$ [a et b entiers positifs tels que $(p^2 + 1)a^2 - b^2 = 1$] alors,

$$\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{n+1} = \left(a\sqrt{p^2+1}-b\right)\left(\sqrt{p^2+1}-p\right) = a\left(p^2+1\right)+bp-\left(ap+b\right)\sqrt{p^2+1} .$$ Et on a :

$$\begin{aligned}\left(a\left(p^2+1\right)+bp\right)^2 - \left(p^2+1\right)\left(ap+b\right)^2 &= a^2\left(p^2+1\right)^2 + b^2p^2 + 2abp\left(p^2+1\right) - \left(p^2+1\right)\left(a^2p^2+2abp+b^2\right)\\ &= \left(1+b^2\right)\left(p^2+1\right)+b^2p^2-\left(1+b^2\right)p^2-b^2\left(p^2+1\right) = 1+b^2+b^2p^2-b^2p^2-b^2 = 1\end{aligned}$$

2°) Si $\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n = a-b\sqrt{p^2+1}$ [a et b entiers positifs tels que $a^2 - (p^2 + 1)b^2 = 1$] alors,

$$\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{n+1} = \left(a-b\sqrt{p^2+1}\right)\left(\sqrt{p^2+1}-p\right) = \left(a+bp\right)\sqrt{p^2+1}-\left(ap+b\left(p^2+1\right)\right).$$

Et on a $$\begin{aligned}\left(p^2+1\right)\left(a+bp\right)^2-\left(ap+b\left(p^2+1\right)\right)^2 &= \left(p^2+1\right)\left(a^2+2abp+b^2p^2\right)-\left(a^2p^2+2abp\left(p^2+1\right)+b^2\left(p^2+1\right)^2\right)\\ &= \left(p^2+1\right)a^2+\left(a^2-1\right)p^2-a^2p^2-\left(a^2-1\right)\left(p^2+1\right) = a^2-p^2-a^2+p^2+1 = 1 .\end{aligned}$$

Par ailleurs, dans le cas (1) $a\sqrt{p^2+1}-b = \sqrt{\left(p^2+1\right)a^2}-\sqrt{b^2} = \sqrt{b^2+1}-\sqrt{b^2}$,

et dans le cas (2) $a-b\sqrt{p^2+1} = \sqrt{a^2}-\sqrt{b^2\left(p^2+1\right)} = \sqrt{a^2}-\sqrt{a^2-1}$. Donc, dans les deux cas, c'est de la forme $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$.

Solution de Louis-Marie Bonneval :

D'une façon générale, $\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ s'écrit $a_n + b_n\sqrt{2}$, avec a_n et b_n entiers, ce qu'on peut établir par récurrence ou en développant selon la formule du binôme. Or, pour tout nombre x de la forme $a+b\sqrt{2}$ où a et b sont entiers, en posant $N(x) = a^2 - 2b^2$, on définit classiquement un homomorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ vers l'anneau $\mathbb{Z}$. Donc $N\left(x^n\right) = N\left(x\right)^n$ pour tout naturel n.

De $N\left(-1+\sqrt{2}\right) = -1$, on déduit donc $N\left(\left(-1+\sqrt{2}\right)^n\right) = \left(-1\right)^n$, soit $a_n^{\ 2} - 2b_n^{\ 2} = \left(-1\right)^n$.

* Si n est pair, $a_n^{\ 2} - 2b_n^{\ 2} = 1$. De plus $a_n \geq 0$ et $b_n \leq 0$, comme on peut le voir en développant $\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ par la formule du binôme. Alors $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} = \sqrt{a_n^{\ 2}} - \sqrt{2b_n^{\ 2}} = \sqrt{a_n^{\ 2}} - \sqrt{a_n^{\ 2}-1}$.

* si n est impair, $a_n^{\ 2} - 2b_n^{\ 2} = -1$. De plus $a_n \leq 0$ *et* $b_n \geq 0$, comme on peut le voir en développant $\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ par la formule du binôme. Alors $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} = -\sqrt{a_n^{\ 2}} + \sqrt{2b_n^{\ 2}} = \sqrt{2b_n^{\ 2}} - \sqrt{2b_n^{\ 2}-1}$.

Remarques :

1) En remarquant que $\left(-1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$, on établit que $a_n = \dfrac{\left(-1+\sqrt{2}\right)^n + \left(-1-\sqrt{2}\right)^n}{2}$ et $b_n = \dfrac{\left(-1+\sqrt{2}\right)^n - \left(-1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$.

Donc $a_n^{\ 2} = \dfrac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^n + \left(3+2\sqrt{2}\right)^n + 2\left(-1\right)^n}{4}$ et $2b_n^{\ 2} = \dfrac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^n + \left(3+2\sqrt{2}\right)^n - 2\left(-1\right)^n}{4}$.

Par conséquent, dans tous les cas, $m = \dfrac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^n + \left(3+2\sqrt{2}\right)^n + 2}{4}$.

2) $\left(\sqrt{2}+1\right)^n = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}$.

Solution de Serge Parpay :

On suppose n entier positif. Posons $A = \sqrt{2}+1$ et $B = \sqrt{2}-1$. On a $AB = 1$ et $A^nB^n = (AB)^n = 1$.

En considérant le binôme de Newton, $\left(a+b\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

1) Si n est pair, on peut calculer les nombres entiers positifs x et y tels que $A^n = x + y\sqrt{2}$ et $B^n = x - y\sqrt{2}$.
On a d'une part $A^nB^n = 1$, d'autre part $A^nB^n = x^2 - 2y^2$, d'où $x^2 - 2y^2 = 1$, soit $2y^2 = x^2 - 1$.
En écrivant $A^n = \sqrt{x^2} + \sqrt{2y^2}$ et $B^n = \sqrt{x^2} - \sqrt{2y^2}$, il vient $A^n = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-1}$ et $B^n = \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2-1}$ (1).

2) Si n est impair, on peut calculer les nombres positifs x et y tels que $A^n = x\sqrt{2} + y$ et $B^n = x\sqrt{2} - y$.
On a d'une part $A^nB^n = 1$, d'autre part $A^nB^n = 2x^2 - y^2$, d'où $2x^2 - y^2 = 1$, soit $y^2 = 2x^2 - 1$.
En écrivant $A^n = \sqrt{2x^2} + \sqrt{y^2}$ et $B^n = \sqrt{2x^2} - \sqrt{y^2}$, il vient $A^n = \sqrt{2x^2} + \sqrt{2x^2-1}$ et $B^n = \sqrt{2x^2} - \sqrt{2x^2-1}$ (2).

3) D'après (1) et (2), n étant un entier positif, $\left(\sqrt{2}+1\right)^n = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}$ et $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ avec m entier positif.

98-2 *de Frédéric de Ligt* :

Quels sont les triangles qui peuvent être partagés en 3 triangles isocèles ?

N.d.l.r. Un cas particulier de ce problème a été proposé aux élèves de troisième dans l'épreuve du rallye 2015.

Solution de Louis-Marie Bonneval :

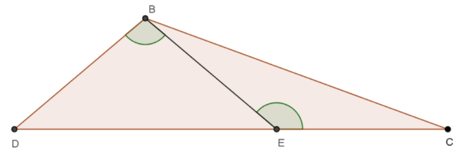
I. Triangles décomposables en deux triangles isocèles

On dira qu'un triangle BCD est *bisécable en B* si une droite passant par B peut le découper en deux triangles isocèles BED et BEC. Posons $\delta = \widehat{\mathrm{BDC}}$ et $\gamma = \widehat{\mathrm{BCD}}$, exprimés en degrés. On va exprimer en fonction de δ (ce qui permet d'exprimer aussi

$\widehat{DBC}$ en fonction de δ puisque $\widehat{DBC} = 180 - \delta - \gamma$.
Dans les figures ci-dessous, on a marqué pour chaque triangle isocèle son angle principal.

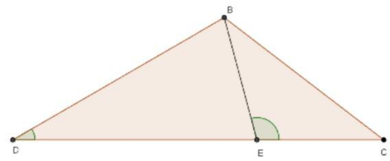
1er cas : DBE est isocèle en B.

Alors BEC ne peut être isocèle qu'en E. En effet $\widehat{BED}$ est aigu, donc $\widehat{BEC}$ est obtus. Alors $\gamma = \dfrac{\delta}{2}$, avec $\delta < 90$.

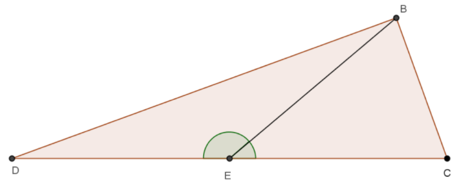


2e cas : DBE est isocèle en D.

Alors BEC ne peut être isocèle qu'en E. En effet $\widehat{BED}$ est aigu, donc $\widehat{BEC}$ est obtus. Alors $\gamma = 45 - \dfrac{\delta}{4}$.



3e cas : DBE est isocèle en E.
* Si BEC est isocèle en B, on se ramène au premier cas en permutant D et C :
$\gamma = 2\delta$ avec $\delta < 45$.
* Si BEC est isocèle en C, on se ramène au deuxième cas en permutant D et C :
$\gamma = 180 - 4\delta$, avec $\delta < 45$.
* Si BEC est isocèle en E : $\gamma = 90 - \delta$, avec $\delta < 90$. DBC est rectangle en B.

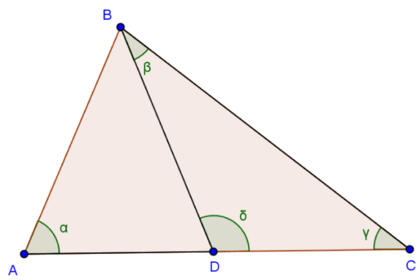


Dans tous les cas, on vérifie, en reconstruisant la figure, que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes.

II. Triangles décomposables en trois triangles isocèles

On dira qu'un triangle ABC est *trisécable* s'il est décomposable en trois triangles isocèles.
Pour le partager en trois triangles, il faut deux coups de ciseau, dont au moins un passe par un sommet. Quitte à changer les noms des sommets, supposons que le premier coup de ciseau passe par B, et coupe [AC] en D.

Posons $\alpha = \widehat{BAC}$, $\gamma = \widehat{ACB}$, $\beta = \widehat{DBC}$, $\delta = \widehat{BDC}$, exprimés en degrés. On va exprimer γ en fonction de α (ce qui permet d'exprimer aussi $\widehat{ABC}$ en fonction de α puisque $\widehat{ABC} = 180 - \alpha - \gamma$.
L'un des deux triangles obtenus doit être isocèle, et l'autre bisécable. Quitte à permuter A et C, supposons ABD isocèle et BCD bisécable.
ABD peut être isocèle en B, en D ou en A. BCD peut être bisécable en B, en D ou en C, soit de 15 façons. Il y a donc a priori 45 cas de figure !

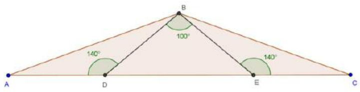


En réalité certaines combinaisons sont impossibles (on les a notées dans les pages suivantes en rouge), du fait que si un triangle isocèle a un angle obtus, c'est nécessairement son angle principal. On constate en construisant les figures qu'il y a dans certains cas des restrictions à apporter aux valeurs de α.

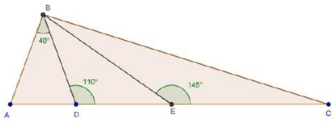
Dans les figures fournies en exemple, on a indiqué dans chaque triangle isocèle l'angle principal.

1) BCD bisécable en B

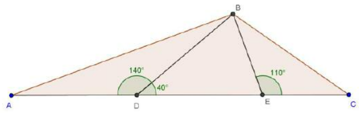
<table>
<tr><td></td><td>ABD isocèle en B
$\delta = 180 - \alpha$
$\beta = 180 - \delta - \gamma = \alpha - \gamma$
$\alpha < 90$</td><td>ABD isocèle en D
$\delta = 2\alpha$
$\beta = 180 - \delta - \gamma = 180 - 2\alpha - \gamma$
$\alpha < 90$</td><td>ABD isocèle en A
$\delta = 90 + \frac{\alpha}{2}$
$\beta = 180 - \delta - \gamma = 90 - \frac{\alpha}{2} - \gamma$</td></tr>
<tr><td>BDE isocèle en B,
BCE isocèle en E
$\gamma = \frac{\delta}{2}$</td><td>$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus</td><td>$\gamma = \alpha$ $(\alpha < 45)$



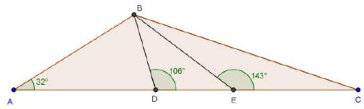
</td><td>$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus</td></tr>
<tr><td>BDE isocèle en D,
BCE isocèle en E
$\gamma = 45 - \frac{\delta}{4}$</td><td>$\gamma = \frac{\alpha}{4}$ $(\alpha < 90)$



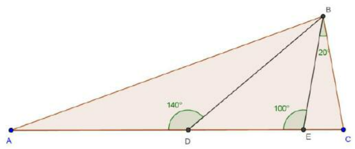
</td><td>$\gamma = 45 - \frac{\alpha}{2}$ $(\alpha < 90)$



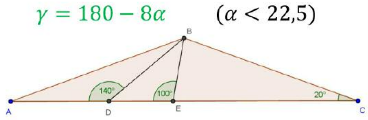
</td><td>$\gamma = 22{,}5 - \frac{\alpha}{8}$



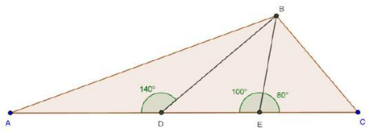
</td></tr>
<tr><td>BDE isocèle en E,
BCE isocèle en B
$\gamma = 2\delta$</td><td>$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus</td><td>$\gamma = 4\alpha$ $(\alpha < 22{,}5)$



</td><td>$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus</td></tr>
<tr><td>BDE isocèle en E,
BCE isocèle en C
$\gamma = 180 - 4\delta$</td><td>$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus</td><td>$\gamma = 180 - 8\alpha$ $(\alpha < 22{,}5)$

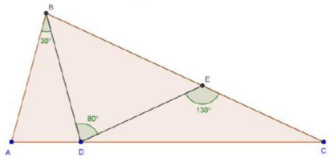
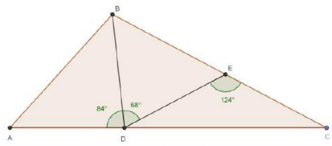
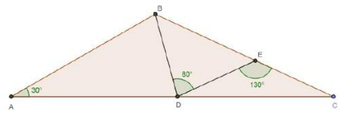
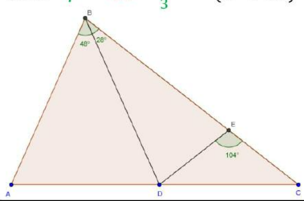
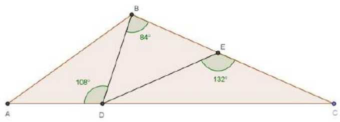
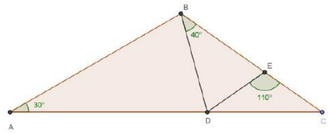
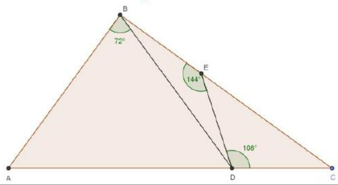
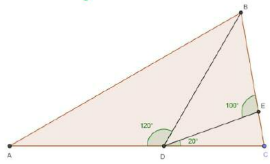
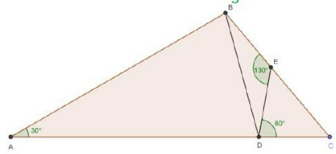
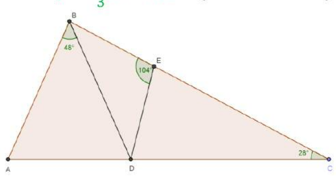
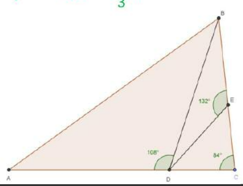
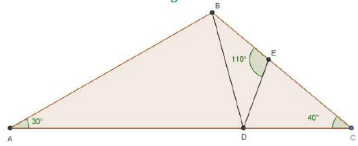
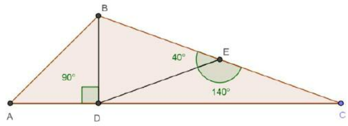


</td><td>$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus</td></tr>
<tr><td>BDE isocèle en E,
BCE isocèle en E
$\gamma = 90 - \delta$</td><td>$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus</td><td>$\gamma = 90 - 2\alpha$ $(\alpha < 45)$

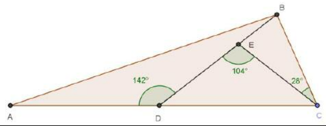
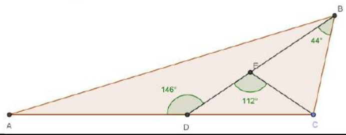
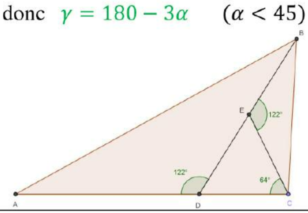
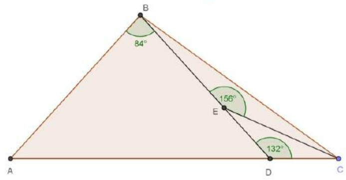
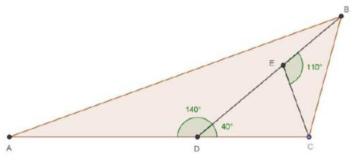
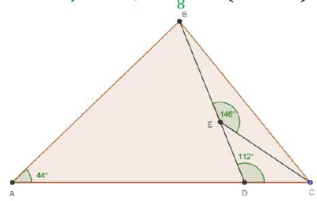
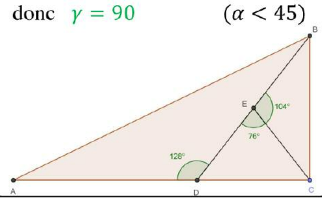


</td><td>$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus</td></tr>
</table>

2) BCD bisécable en D

	ABD isocèle en B $\delta = 180 - \alpha$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = \alpha - \gamma$ $\alpha < 90$	ABD isocèle en D $\delta = 2\alpha$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = 180 - 2\alpha - \gamma$ $\alpha < 90$	ABD isocèle en A $\delta = 90 + \frac{\alpha}{2}$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = 90 - \frac{\alpha}{2} - \gamma$
BDE isocèle en D, CDE isocèle en E $\gamma = \frac{\beta}{2}$	$\gamma = \frac{\alpha-\gamma}{2}$ donc $\gamma = \frac{\alpha}{3}$ $(\alpha < 90)$ 	$\gamma = 90 - \alpha - \frac{\gamma}{2}$ donc $\gamma = 60 - \frac{2\alpha}{3}$ $(67{,}5 < \alpha < 90)$ 	$\gamma = 45 - \frac{\alpha}{4} - \frac{\gamma}{2}$ donc $\gamma = 30 - \frac{\alpha}{6}$ 
BDE isocèle en B, CDE isocèle en E $\gamma = 45 - \frac{\beta}{4}$	$\gamma = 45 - \frac{\alpha-\gamma}{4}$ donc $\gamma = 60 - \frac{\alpha}{3}$ $(\alpha < 90)$ 	$\gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{4}$ donc $\gamma = \frac{2\alpha}{3}$ $(\alpha < 67{,}5)$ 	$\gamma = 22{,}5 + \frac{\alpha}{8} + \frac{\gamma}{4}$ donc $\gamma = 30 + \frac{\alpha}{6}$ $(\alpha < 90)$ 
BED isocèle en E, CDE isocèle en D $\gamma = 2\beta$	$\gamma = 2(\alpha - \gamma)$ donc $\gamma = \frac{2}{3}\alpha$ $(\alpha < 90)$ 	$\gamma = 360 - 4\alpha - 2\gamma$ donc $\gamma = 120 - \frac{4}{3}\alpha$ $(22{,}5 < \alpha < 90)$ 	$\gamma = 180 - \alpha - 2\gamma$ donc $\gamma = 60 - \frac{\alpha}{3}$ 
BDE isocèle en E, CDE isocèle en C $\gamma = 180 - 4\beta$	$\gamma = 180 - 4(\alpha - \gamma)$ donc $\gamma = \frac{4}{3}\alpha - 60$ $(45 < \alpha < 90)$ 	$\gamma = -540 + 8\alpha + 4\gamma$ donc $\gamma = 180 - \frac{8}{3}\alpha$ $\alpha < 67{,}5)$ 	$\gamma = -180 + 2\alpha + 4\gamma$ donc $\gamma = 60 - \frac{2}{3}\alpha$ $(\alpha < 90)$ 
BDE isocèle en E, CDE isocèle en E $\gamma = 90 - \beta$	EB=ED=EC, donc $\widehat{BDC}$ est droit donc $\widehat{BDA}$ est droit	$\gamma = 2\alpha + \gamma - 90$ donc $\alpha = 45$ $(\gamma < 90)$ 	EB=ED=EC, donc $\widehat{BDC}$ est droit donc $\widehat{BDA}$ est droit

3) BCD bisécable en C

	ABD isocèle en B $\delta = 180 - \alpha$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = \alpha - \gamma$ $\alpha < 90$	ABD isocèle en D $\delta = 2\alpha$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = 180 - 2\alpha - \gamma$ $\alpha < 90$	ABD isocèle en A $\delta = 90 + \frac{\alpha}{2}$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = 90 - \frac{\alpha}{2} - \gamma$
BCE isocèle en C, CDE isocèle en E $\delta = \frac{\beta}{2}$	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus	$2\alpha = 90 - \alpha - \frac{\gamma}{2}$ donc $\gamma = 180 - 6\alpha$ $(\alpha < 22{,}5)$ 	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus
BCE isocèle en B, CDE isocèle en E $\delta = 45 - \frac{\beta}{4}$	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus	$2\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{4}$ donc $\gamma = 6\alpha$ $(\alpha < 22{,}5)$ 	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus
BCE isocèle en E, CDE isocèle en C $\delta = 2\beta$	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus	$\alpha = 180 - 2\alpha - \gamma$ donc $\gamma = 180 - 3\alpha$ $(\alpha < 45)$ 	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus
BCE isocèle en E, CDE isocèle en D $\delta = 180 - 4\beta$	$180 - \alpha = 180 - 4(\alpha - \gamma)$ donc $\gamma = \frac{3}{4}\alpha$ 	$2\alpha = -540 + 8\alpha + 4\gamma$ donc $\gamma = 135 - \frac{3}{2}\alpha$ $(\alpha < 90)$ 	$90 + \frac{\alpha}{2} = -180 + 2\alpha + 4\gamma$ donc $\gamma = 67{,}5 - \frac{3}{8}\alpha$ $(\alpha < 90)$ 
BCE isocèle en E, CDE isocèle en E $\delta = 90 - \beta$	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus	$2\alpha = -90 + 2\alpha + \gamma$ donc $\gamma = 90$ $(\alpha < 45)$ 	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus

Je conclus donc : il y a 27 familles de triangles trisécables.

Épilogue

J'ai envoyé l'étude ci-dessus à Frédéric, qui m'a dit : « *Bravo pour ta ténacité ! Mais n'as-tu pas oublié une possibilité avec trois coups de ciseau ?* »
Bon sang, mais c'est bien sûr !
Saurez-vous trouver cette solution ?

99-3 *de Louis Rivoallan* :

Soit a, b, c, d quatre nombres positifs. Montrer que : $\sqrt{a+b+c+d}+\sqrt{b+c+d}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d} \geq \sqrt{a+4b+9c+16d}$.

Solution de Louis-Marie Bonneval :

On va montrer plus généralement que, pour toute famille de n nombres positifs $(u_k)_{1\leq k\leq n}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=k}^{n}u_i} \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}k^2u_k}$.

Raisonnons par récurrence sur n :

L'inégalité est vérifiée pour $n = 1$: $\sqrt{u_1} \geq \sqrt{u_1}$.

Supposons que pour toute famille de n nombres positifs $(u_k)_{1\leq k\leq n}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=k}^{n}u_i} \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}k^2u_k}$;

montrons qu'alors pour toute famille de n+1 nombres positifs $(v_k)_{1\leq k\leq n+1}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{\sum_{i=k}^{n+1}v_i} \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1}k^2v_k}$.

Le premier membre peut s'écrire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=k}^{n+1}v_i}+\sqrt{v_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=k}^{n-1}v_i+(v_n+v_{n+1})}+\sqrt{v_{n+1}}$.

Or d'après l'hypothèse de récurrence : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=k}^{n-1}v_i+(v_n+v_{n+1})} \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}k^2v_k+n^2(v_n+v_{n+1})}$.

Il suffit donc d'établir que $\displaystyle\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}k^2v_k+n^2(v_n+v_{n+1})}+\sqrt{v_{n+1}} \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1}k^2v_k}$; soit $\displaystyle\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k^2v_k+n^2v_{n+1}}+\sqrt{v_{n+1}} \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1}k^2v_k}$.

Les deux membres étant positifs, cela équivaut (par élévation au carré) à

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2v_k+n^2v_{n+1}+v_{n+1}+2\sqrt{v_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2v_k+n^2v_{n+1}\right)} \geq \sum_{k=1}^{n+1}k^2v_k$; soit $\displaystyle(n^2+1)v_{n+1}+2\sqrt{v_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2v_k+n^2v_{n+1}\right)} \geq (n+1)^2\,v_{n+1}$;

autrement dit $\displaystyle\sqrt{v_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2v_k+n^2v_{n+1}\right)} \geq nv_{n+1}$.

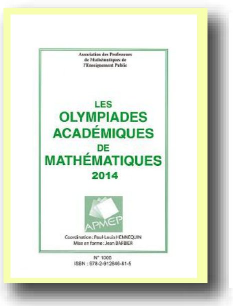
Les deux membres étant positifs, cela équivaut à $\displaystyle v_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2v_k+n^2v_{n+1}\right) \geq n^2{v_{n+1}}^2$;

soit $\displaystyle v_{n+1}\sum_{k=1}^{n}k^2v_k \geq 0$, inégalité manifestement vraie.

Les brochures de l'APMEP

Il a été question, page 5, des brochures « millésimées » réalisées par des Régionales et éditées par l'APMEP. Voici donc les deux autres que nous signalons.

« ***L'algorithmique au lycée*** » (n° 1003) réalisée par la commission Inter-IREM Lycée. Cette imposante brochure de 288 pages au format A4 s'impose aussi dans toutes les bibliothèques des lycées tellement son contenu est précieux pour l'enseignement de l'algorithmique. Toutes les problématiques liées à l'enseignement y sont abordées depuis les expériences de classe jusqu'à la présentation de divers langages de programmation en passant par la formation des enseignants, les activités en classe et l'évaluation. (*Prix public : 25 €, prix adhérent : 16,25 €*)



La brochure « ***Les olympiades mathématiques de première 2014*** » (n° 1005) coordonnée par Paul-Louis Hennequin est téléchargeable *gratuitement* sur le site « marchand » de l'APMEP. Comme celles des années précédentes, elle contient tous les exercices nationaux et académiques, leurs corrigés, et bénéficie de la couleur. C'est une mine d'activités pour la classe, pas uniquement en première, et une excellente préparation aux Olympiades de première 2015.