Édito

Après le numéro 100 il faudra faire sans !

Sans vraiment s'en rendre compte, les numéros du Corol'aire se sont succédés et voilà qu'aujourd'hui celui-ci affiche un numéro cent. Vingt-cinq années d'existence. Bon sang ! Une paye !

C'est ce moment très symbolique qu'a choisi le principal artisan de la publication, Jean Fromentin, pour nous annoncer qu'il s'en va du comité de rédaction (mais, heureusement, pas du tout du Comité de la Régionale), appelé par tant d'autres tâches au sein de l'APMEP.

Toute la rédaction est sens dessus dessous, chacun sent bien qu'une page se tourne pour le Corol'aire. C'en est fini de se reposer sur lui pour veiller au grain, tout coordonner et tout bien présenter. Il va falloir se montrer à la hauteur pour conserver le même niveau de qualité. Mais avant de passer la main, Jean tient à mettre en page un supplément exceptionnel… Mais je sens que j'en ai déjà trop dit.

Merci Jean !

Frédéric de Ligt

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

Régionale de Poitou-Charentes

n° 100

Mars 2015

COROL'AIRE

APMEP, IREM, Bâtiment de mathématiques
Téléport 2 - BP 30179,
Bd Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope CHASSENEUIL CEDEX

APMEP : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél : apmep.poitiers@free.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros + Suppléments) : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

SOMMAIRE

Directeur de la publication	Frédéric de LIGT
Comité de rédaction …	F. de LIGT, L-M BONNEVAL J. GERMAIN, J. FROMENTIN
Imprimerie …………..	IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd Marie et Pierre Curie 86962 CHASSENEUIL CEDEX
Éditeur ………………	APMEP Rég. Poitou-Charentes
Siège social ………….	IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd Marie et Pierre Curie 86962 CHASSENEUIL CEDEX
Dépôt légal	Mars 2015

Vie de l'association

Comité de la Régionale Poitou-Charentes du 01 avril 2015

Compte-rendu du Comité national des 28 et 29 mars

Pierre-Jean Robin a représenté la Régionale.
L'association nationale accuse cette année un déficit de 46 000 € sur un budget total de 350 000 €. Deux causes : la réception fréquente (on ne peut que s'en réjouir) des responsables de l'APMEP par le ministère et la mise en place par l'APMEP de la Plateforme d'Accompagne-ment Pédagogique (PAP).
Cette PAP rencontre l'hostilité de certains adhérents qui craignent une récupération de travail par l'Institution, mais aussi reçoit l'assentiment d'autres adhérents. Si vous êtes intéressés pour produire des séquences d'enseignement dans ce cadre, vous aurez la possibilité de bénéficier gratuitement de logiciels comme Microsoft Office ou Maple.
Le national souhaiterait l'avis des adhérents pour faire évoluer son site Internet (www.apmep.fr).
Dans le cadre des entrevues avec le ministère, il faut savoir que celui-ci écoute les associations représentatives. Aussi, tout vote lors des bilans moral et financier accroît celle-ci. N'oubliez pas de voter (et de faire adhérer) !
Les nouveaux programmes du collège sont sur le point d'être finalisés. Ils seront à l'expérimentation en 2015 et entreront en vigueur à la rentrée 2016. L'APMEP demande une révision tous les deux ans. L'enseignement de l'algorithmique fera son entrée au collège. La Régionale axera sa Journée sur ce thème (voir plus bas).

Journée de la Régionale

La date est fixée au mercredi 14 octobre 2015 et cette journée devrait se dérouler au Lycée Professionnel Blaise Pascal à Saint-Jean d'Angély. Un programme détaillé vous sera communiqué prochainement mais pour vous mettre l'eau à la bouche, prévoyez de voir fonctionner une machine de Turing et de discuter (et de vous former) autour de l'algorithmique. Nous ne manquerons pas d'évoquer les nouveaux programmes du collège.

Rallye

549 dossiers ont été répartis pour les corrections : encore une belle réussite. Le palmarès sera connu le 13 mai prochain et la remise des prix aura lieu le 3 juin à Poitiers dans l'amphi 501 de la faculté de droit. La conférence sera animée par Marie-Noëlle Racine, membre de la Commission « Histoire des Mathématiques » de l'APMEP.

En plus des lots, chaque classe recevra un trophée qu'elle pourra fièrement exposer dans son établissement.
Les membres du comité ont été informés du prochain thème, mais ont signé une clause de non révélation avant le 3 juin prochain. Suspense...

Exposition « Puzzle »

La conception de la nouvelle exposition avance à grands pas. Le matériel est presque défini (bien que les finances nous contraignent à revoir nos attentes). Des lycées professionnels et le concepteur de « Fractionnary » sont consultés.
Le catalogue de l'exposition est à l'étude, sa structure est définie, il ne reste plus qu'à l'écrire... Des documents pédagogiques seront aussi proposés. Une réunion est programmée le 15 avril prochain.

Corol'aire

Vous avez dans les mains le numéro 100. Jean Fromentin et Serge Parpay préparent également un numéro spécial pour fêter cet anniversaire. Ici encore, la clause de non révélation s'applique. Il vous faudra patienter.
Jean Fromentin annonce qu'il ne peut plus continuer à assumer la charge de la publication sous sa forme actuelle compte tenu de ses autres charges au sein de l'APMEP nationale et régionale. Il propose que la Régionale fasse évoluer Corol'aire vers une version disponible sur le site qui ne nécessiterait pas un travail de mise en page aussi chronophage.
Nous avons tous conscience du travail important réalisé par Jean pour élaborer ce journal quatre fois par an. Même s'il nous a pris un petit peu de court, nous comptons bien lui faire savoir toute l'estime que nous avons de son travail en essayant de donner une nouvelle vie à Corol'aire.

Des nouvelles du site de la Régionale

Après le piratage du mois d'août, c'est à une invasion de spams que Jacques Germain et Louis-Marie Bonneval ont dû faire face au début de l'année. Ils ont eu énormément de mal à résoudre le problème en particulier du fait qu'il n'y a pas d'assistance technique pour la maintenance d'un site chez un hébergeur gratuit. La question se pose donc de se tourner vers un hébergeur payant (<100 euros par an).
Ils profitent de l'occasion pour passer une annonce : ils auraient besoin de développer l'équipe pour la monter à 4 ou 5 personnes. Promis : on n'obligera personne à entrer au comité (puisqu'avec internet, tout peut se faire à distance). Si vous êtes intéressé, n'hésitez pas à envoyer un mail à <apmep.poitiers@free.fr>. À bon entendeur ...

Le prochain Comité de la Régional est fixé au mercredi 10 juin à 15 h dans les locaux de l'IREM sur le site du Futuroscope.

Corinne Parcelier – Sébastien Dassule-Debertonne

Tri des dossiers par une partie de l'équipe « Rallye ».

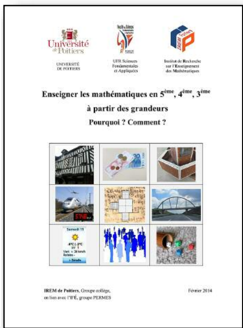
Rallye Mathématique de Poitou-Charentes
17 mars 2015 - Le temps des maths

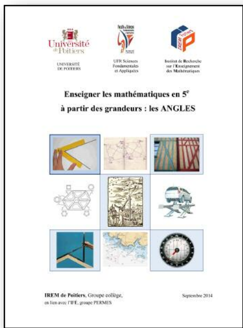
Le mardi 17 mars 2015, environ 14 000 élèves prenaient le ***temps*** de participer au Rallye Mathématique Poitou-Charentes. Un grand merci à eux et à leurs enseignants de faire de cette journée un véritable succès. En effet, en 2013, ils étaient un peu plus de 9 000 élèves, en 2014, environ 13 000 et maintenant 14 000 ! Il est vrai que depuis deux ans, le Rallye se déroule pendant la Semaine Nationale des Mathématiques.
Le thème de cette année « ***Le temps des maths*** » a permis aux élèves de réaliser des horloges bizarres, de « tuer le ***temps*** » de façon humoristique, de s'intéresser aux divers calendriers ou de découvrir des clepsydres. Les quelques réponses à un courrier envoyé aux coordonnateurs du rallye montrent que les élèves ont pris plaisir à faire cette épreuve. Nous espérons bien sûr d'autres réponses pour affiner cette appréciation.
Le mercredi 25 mars, l'équipe du Rallye s'est répartie les dossiers pour les corriger avec la joie de découvrir tous ces travaux qu'elle vous montrera à la remise des prix avec le diaporama des morceaux choisis.
Examiner environ 550 dossiers nécessite un peu de ***temps*** ; c'est donc à la mi-mai que se fera la délibération puis l'envoi du palmarès.
La remise des prix aura lieu le mercredi 3 juin à Poitiers dans un amphi de la faculté de droit, avenue du Recteur Pineau à Poitiers. Nous aurons le plaisir d'accueillir Marie-Noëlle Racine pour une conférence sur les calendriers et le temps.
Si votre établissement n'a pas participé au Rallye, vous pouvez télécharger les épreuves sur le site de la Régionale à l'adresse suivante : http://ampep.poitiers.free.fr
Les solutions n'y seront mises qu'après l'examen des dossiers et l'établissement du palmarès.

Chantal Gobin

Des nouvelles de l'IREM de Poitiers

L'annonce récente du plan « **Stratégie mathématiques** » par notre ministère de tutelle conforte les choix didactiques proposés dans les recherches et publications de l'IREM de Poitiers. En effet depuis de nombreuses années, en nous basant sur la notion de parcours d'étude et de recherche développée par Yves Chevallard, nous avons travaillé sur une approche de l'enseignement des mathématiques à partir de questions du monde. Ce point de vue nous permet de faire vivre les connaissances mathématiques dans des applications dans le réel mais aussi de montrer l'importance de ce monde réel dans la naissance des concepts et questions mathématiques. Les objectifs de ce plan ministériel mettent en avant *« des situations en lien avec le quotidien, les métiers et les autres disciplines. La perception du sens de l'objet d'apprentissage est essentielle pour les élèves. (...) Il s'agit d'utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes authentiques qui font sens pour les élèves ».*
L'IREM de Poitiers se réjouit de cette inflexion donnée dans l'enseignement des mathématiques vers une approche que nous défendons depuis longtemps !
Conséquence de ces recherches, l'IREM de Poitiers vous propose ses nouvelles brochures pour l'enseignement des mathématiques en collège et lycée.
Tout d'abord, l'IREM vient de publier deux brochures qui font suite aux brochures sur les grandeurs en 6ème parues depuis quelques années :
« **Enseigner les mathématiques en cinquième, quatrième, troisième à partir des grandeurs : Pourquoi ? Comment ?** » (en vente à l'IREM pour 9 € / 12€50 avec frais de port)
« **Enseigner les mathématiques en cinquième à partir des grandeurs : les angles** » (11 € /15 € avec frais de port).





Au niveau du lycée, la nouvelle brochure « Enseigner les mathématiques en première S : trois parcours sur l'analyse et la géométrie analytique » (14 € /19 € avec frais de port) présente des études sur des problèmes aussi variés que le fonctionnement des antennes paraboliques et les tracés de route. Les questionnements soulevés permettent d'introduire les notions usuelles de géométrie des courbes (équations cartésiennes de droites, de cercles…) et de l'analyse (dérivées et tangentes).

Julien Michel, Directeur de l'IREM de Poitiers

Histoire de prix

IREM de Poitiers, groupe collège

Épisode 2 : *la monnaie*

On peut remarquer que, les monnaies métalliques ayant été définies par la nature du métal utilisé et leur poids, leurs dénominations ont souvent été celles des unités principales des poids : mines, sicles, livres… Certaines de nos monnaies actuelles, comme la livre sterling, en gardent encore la trace.

L'avantage d'utiliser des métaux ou des alliages de métaux était que la monnaie était durable, homogène, facilement divisible, non directement disponible, et d'autant plus rare qu'on utilise des métaux précieux. Le mot argent n'est-t-il pas utilisé dans notre langue comme synonyme de monnaie. Mais la forme de ces morceaux de métal était très variée, la qualité et la quantité de métal variables ; ce qui facilitait les contrefaçons et amenait à vérifier le poids du métal et sa nature. Pour éviter ces inconvénients, va apparaitre vers le VII^{e} siècle av. J.-C. en Asie Mineure, chez les rois de Lydie, l'emploi de pièces métalliques frappées, qui va se généraliser. La frappe certifie la valeur de la pièce. Le commerce va ainsi être facilité et fiabilisé. Des systèmes monétaires proches du nôtre s'installent et se diffusent dans tous les grands empires de l'Antiquité : Grèce, Rome, Perse, Chine… Quelles différences avec le nôtre ?

Lingots romains : Aes signatum

La première est le choix des multiples et sous-multiples de l'unité. Suivant les pays ces choix sont très variés, mais tous imposent des calculs plus compliqués qu'avec notre système décimal : nombreuses conversions, utilisation de multiples divers et de fractions. On en trouvera des exemples dans les épisodes suivants.

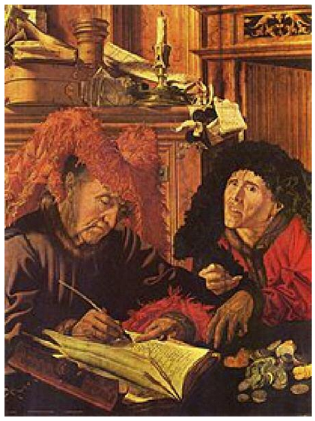
La deuxième est que la valeur de la pièce n'est pas nominale mais réelle : c'est la masse de métal précieux qu'elle contient qui fait sa valeur. Donc pour la fabriquer, comme pour vérifier sa valeur il faut connaître son titre, ou aloi, c'est-à-dire la proportion d'or ou d'argent qu'elle doit contenir. Cela a donné lieu à tout un corpus de problèmes mathématiques sur les alliages que l'on retrouve dans les traités d'arithmétique pratique jusqu'au XIX^{e} siècle. D'autre part des monnaies différentes circulent entre les pays, et même à l'intérieur d'un pays : il faut donc connaître leurs titres pour pouvoir les changer. Par exemple avec la multiplication des foires et l'explosion du commerce à la fin du Moyen Âge en Europe une nouvelle profession va apparaître : celle de changeur, souvent représenté dans les peintures de la Renaissance, et qu'on retrouve dans le nom du Pont-au-Change de Paris. La modification du titre des monnaies a été pratiquée depuis la création de la monnaie : soit par des faussaires, dont le célèbre Diogène le Cynique aurait été, soit par les États contraints de dévaluer leur monnaie pour faire face à la pénurie de métaux précieux et au paiement de leurs dépenses dont les salaires des soldats et des fonctionnaires, ainsi qu'au financement du trésor impérial ou royal.

Statère d'électrum ionien, vers 600-580 av. J.-C.

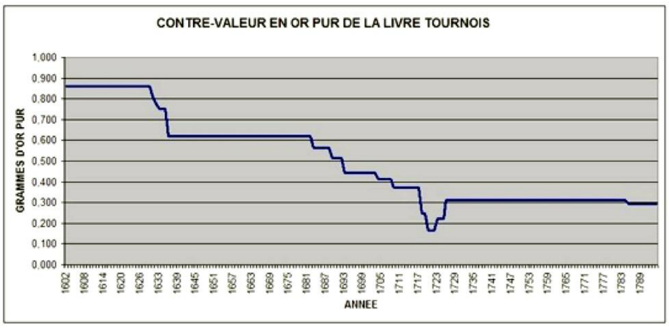
Créséide d'or, 561–546 av. J.-C.

Par exemple si l'on regarde l'évolution du titre de la livre tournois depuis Saint Louis, qui lui donne un cours légal pour tout le royaume de France en 1266, jusqu'à sa disparition lors de la Révolution française, ce titre passe de 8,271 g à 0,29 g d'or fin pour une livre. Ce cours a suivi les aléas de l'économie. Par exemple, l'édit royal du 31 mars 1640 fixe le cours du louis d'or à 1/36,25 marc d'or avec un aloi de 22/24 carats, pour une valeur de 5 livres tournois. Soit un cours légal de la livre tournois (lt) à 1 lt = (1/36,25 × 22/24) × (244,7 / 10) = 0,619 grammes d'or pur. La comparaison avec notre monnaie actuelle n'est pas forcément simple. Une première façon de faire est d'utiliser le cours de l'or actuel ; ainsi, au cours moyen de l'or en avril 2009 (21649 € le kg), on peut établir la valeur transposée de la livre tournois de 1266 à 21649 × 0,008271 ≈ 179,05 €. Une autre façon est d'utiliser comme étalon une marchandise ; ainsi en 1787, une poule coûte 10 sols (d'après un inventaire après décès), et en 2010 elle coûte environ 10 €, donc la livre tournois de 1787 vaudrait 20 € actuels.

Sapèque chinois, 200 av. J.-C.



Le Changeur, Marinus van Reymerswaele (vers 1540)



Face à l'augmentation du commerce et des échanges et à la pénurie de ressources en or et en argent, les marchands italiens vont créer vers 1250 la lettre de change qui vaut reconnaissance de dette, qui permet un paiement différé et qui évite de voyager avec beaucoup de numéraire. C'est l'ancêtre de notre chèque. Apparaissent alors les taux de change entre les différentes places financières et commerciales. À la fin du XIII^e^ siècle sont en place les principaux outils et acteurs de la finance actuelle : banquiers, changeurs, monnaie, chèques, crédit. Il faut signaler toutefois que la lettre de crédit a existé sous des formes très diverses depuis la plus haute Antiquité. Au XVII^e^ siècle apparaissent les billets de banque, anonymes et sans durée de validité, contrairement aux lettres de change, qui vont fonctionner comme la monnaie tout en étant cependant convertibles, au moins au début, en monnaie métallique : c'est le papier monnaie, qui avait fait son apparition en Chine au XI^e^ siècle à cause de la pénurie de métal pour fabriquer la monnaie.

Les deux caractéristiques d'une pièce de monnaie

Une taille (un poids) fixée en marc de poids
(1 marc = 244,7 gr env.)

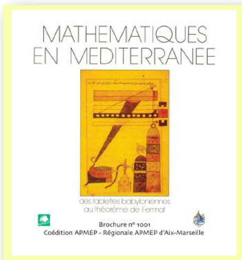
Un aloi (proportion de métal précieux) fixé en carats (1 carat = 1/24$^{\text{ème}}$)

Évolution du titre et des valeurs de l'écu et de la livre en France

1266 : S^{t}-Louis
Un denier à l'écu = 4,13 gr d'or
Une livre Tournois = 8,271 gr d'or fin
1385 : Charles V
L'écu Couronné = 22 sous et 6 deniers
= 4,08 gr d'or fin
1419 : Charles VI
L'écu Heaumé = 5,59 gr d'or fin
= 30 sous
1473 : Louis XI
L'écu = 3,68 gr d'or fin
= 28 sous 4 deniers
1577 :
L'écu = 3,2 gr d'or fin = 60 sous
1602 : Henri IV
L'écu 3,2 gr d'or fin= 65 sous
1615 : Louis XIII
L'écu = 75 sous
1640 : le Louis remplace l'écu
1 Louis d'or = 10 livres
1 Louis d'argent = 25 gr d'argent pur
= 60 sous = 3 livres
1709 : Louis XIV
1 livre = 0,38 gr d'or fin
1720 : Louis XV
1 livre = 0,31 gr d'or fin
1785 : Louis XVI
1 livre tournois = 0,29 gr d'or fin

Louis d'or de Louis XIII

Les brochures de l'APMEP et les Régionales



Le système de numérotation des brochures de l'APMEP a nécessité le passage à 1000. « ***Mathématiques en méditerranée*** », proposée par la Régionale d'Aix-Marseille, a ouvert la nouvelle série avec le n° 1001. Le sous-titre de la brochure : « des tablettes babyloniennes au théorème de Fermat » donne une idée de la richesse du contenu tant au niveau des articles que des illustrations. (*Prix public : 20 €, prix adhérent : 13 €*)

« ***Les problèmes du prof Ila Ransor*** » réalisée par notre Régionale APMEP de Poitou-Charentes a le n° 1002. Riche de cinquante problèmes originaux parmi ceux proposés par le prof Ila Ransor, alias Serge Parpay, pour notre Rallye, et de leurs solutions, cette brochure donne matière à de nombreuses activités à faire en classe en rapport avec les notions rencontrées. Des index de niveaux et de contenus mathématiques sont donnés à cet effet.
(*Prix public : 12 €, prix adhérent : 7,80 €*)

Les brochure n° 1003 et 1005 sont présentées en dernière page de ce Corol'aire.

Les brochures « ***Des Mathématiques dans de bien belles choses*** » (n° 1004) (*Prix public : 20 €, prix adhérent : 13 €*) et « ***Et si on prenait la tangente*** » (n° 1006) (*Prix public : 11 €, prix adhérent : 7,15 €*) ont été réalisées par la Régionale APMEP de Lorraine.

La première, en couleur, du groupe Maths et Art de Lorraine et coordonnée par François Drouin, offre une palette riche de situations reliant l'art et les mathématiques. Des constructions en forme de cercles, d'ellipses, d'ovales ou d'anses de panier, des frises et zelliges trouvés en ornementation, donnent lieu à des activités mathématiques présentées dans la brochure. (*Prix public : 20 €, prix adhérent : 13 €*)

La deuxième, écrite par Jacques Verdier, propose un magnifique voyage du 6$^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C. jusqu'à nos jours avec la notion de tangente vue sous différents aspects (géométrie, analyse, algèbre). Avec cette brochure, le traitement de la tangente en classe ne reposera plus seulement sur des définitions. La tangente prendra vie.

RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.
Frédéric de Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à **ma nouvelle adresse** *:* frederic.deligt2@gmail.com

N.d.l.r. Jean-Christophe Laugier a transmis une intéressante étude au sujet d'un problème original de pesée. Faute de place pour la présenter ici, il vous faudra attendre le prochain numéro pour la découvrir.

Les énoncés proposés dans cette rubrique mettent bien sûr 100 à l'honneur.

Des problèmes

100-1

La série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge. Mais qu'en est-il de la série harmonique incomplète $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ où A désigne l'ensemble des entiers naturels qui ne contiennent pas la séquence 100 dans leur écriture décimale ?

100-2

Placer dans la grille ci-contre les 9 diviseurs de 100 pour que le produit de chaque ligne, de chaque colonne et des deux grandes diagonales soit toujours le même.

100-3

Combien de pavés droits différents peut-on former avec 100^{100} cubes identiques ?

100-4

Montrer que cos100°, sin100° et tan100° sont irrationnels.

100-5

Montrer que dans un ensemble de 199 entiers il est toujours possible d'en trouver 100 dont la somme est un multiple de 100.

Des solutions

97-4 *de Jean-Christophe Laugier* :

Un chemin de longueur n à pas unités horizontaux ou verticaux dans le réseau $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ joignant A(a, b) à B(c, d) est une suite de points M_0, M_1, …, M_n telle que M_0 = A, M_n = B et pour tout $i\in\{0,1,...,n-1\}$, $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}=\vec{D}$, $\vec{D}$ étant égal à l'un des vecteurs (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0). Déterminer le nombre de chemins joignant l'origine (0, 0) au point A(a, b).

Solution de Louis-Marie Bonneval :

Rebaptisons (x, y) les coordonnées du point d'arrivée, qu'on supposera positives. Pour chaque chemin de longueur n, notons respectivement b, d, g, h le nombre de pas vers le bas, vers la droite, vers la gauche, vers le haut.

Ces quatre naturels doivent vérifier : $\begin{cases} b+d+g+h=n \\ d-g=x \\ h-b=y \end{cases}$. On en déduit $d = g + x$ et $h = b + y$, d'où $2(b + g) = n - (x + y)$.

Donc, si $n < x + y$, ou si n n'a pas la même parité que $x + y$, il n'y a pas de solution. Supposons donc $n\geq x+y$ et n de même parité que $x + y$, et appelons k le naturel $\frac{n-(x+y)}{2}$. Comme $b + g = k$, il y a $k + 1$ possibilités pour b, donc pour (b, d, g, h) puisque $g = k - b$, $d = g + x$, $h = b + y$. Pour chaque valeur de b entre 0 et k, il y a $\frac{n!}{b!\,d!\,g!\,h!}$ façons d'ordonner les pas successifs. Le nombre de chemins est donc $\sum_{b=0}^{b=k}\frac{n!}{b!d!g!h!}=\sum_{b=0}^{b=k}\frac{n!}{b!\left(k-b+x\right)!\left(k-b\right)!\left(b+y\right)!}$.

Exemple pour aller à A(1, 2) (en écrivant D, G, B, H pour "un pas à droite", "un pas à gauche", "un pas en haut", "un pas en bas") :

* il n'y a aucun chemin de longueur 1 ou 2 ;
* il y a 3 chemins de longueur 3 : DHH, HDH, HHD ;
* il n'y a aucun chemin de longueur 4 ;

* il y a 50 chemins de longueur 5 :

$\dfrac{5!}{0!\,2!\,1!\,2!} = 30$ chemins pour lesquels b = 0, d = 2, g = 1, h = 2 : DDGHH DDHGH DDHHG DGDHH DGHDH DGHHD DHDGH DHDHG DHGDH DHGHD DHHDG DHHGD GDDHH GDHDH GDHHD GHDDH GHDHD GHHDD HDDGH HDDHG HDGDH HDGHD HDHDG HDHGD HGDDH HGDHD HGHDD HHDDG HHDGD HHGDD ;

$\dfrac{5!}{1!\,1!\,0!\,3!} = 20$ chemins pour lesquels b = 1, d = 1, g = 0, h = 3 : BDHHH BHDHH BHHDH BHHHD DBHHH DHBHH DHHBH DHHHB HBDHH HBHDH HBHHD HDBHH HDHBH HDHHB HHBDH HHBHD HHDBH HHDHB HHHBD HHHDB.

Remarques :

1) Si les coordonnées x et y du point d'arrivée ne sont pas toutes les deux positives, le nombre de chemins de longueur n arrivant en (x, y) est égal au nombre de chemins de longueur n arrivant en $\left(|x|,|y|\right)$, ce qui ramène au cas précédent.

2) $\dfrac{n!}{b!\left(k-b+x\right)!\left(k-b\right)!\left(b+y\right)!} = \dfrac{k!}{b!\left(k-b\right)!} \times \dfrac{\left(n-k\right)!}{\left(k-b+x\right)!\left(b+y\right)!} \times \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!} = \binom{k}{b}\binom{n-k}{b+y}\binom{n}{k}$.

Le nombre de chemins peut donc s'écrire $\binom{n}{k}\sum_{b=0}^{b=k}\binom{k}{b}\binom{n-k}{b+y}$.

3) Si $n = x + y$, avec x et y positifs, alors $k = 0$, $b = 0$, $g = 0$, $d = x$, $h = y$, et le nombre de chemins est égal à $\binom{n}{x} = \binom{n}{y}$: on retrouve une présentation du triangle de Pascal.

Un programme en Algobox pour le calcul :

```
******************************************
Nombre de chemins du réseau ZxZ allant de l'origine à un point de coordonnées (x,y)
******************************************
VARIABLES
x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
c EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
AFFICHER "Abscisse ? "
LIRE x
AFFICHER x
x PREND_LA_VALEUR abs(x)
AFFICHER "Ordonnée ? "
LIRE y
AFFICHER y
y PREND_LA_VALEUR abs(y)
AFFICHER "Longueur ? "
LIRE n
AFFICHER n
c PREND_LA_VALEUR 0
SI (n>=x+y ET (n-x-y)%2==0) ALORS
DEBUT_SI
k PREND_LA_VALEUR (n-x-y)/2
POUR b ALLANT_DE 0 A k
DEBUT_POUR
c PREND_LA_VALEUR c+ALGOBOX_COEFF_BINOMIAL(k,b)*ALGOBOX_COEFF_BINOMIAL(n-k,b+y)
FIN_POUR
c PREND_LA_VALEUR c*ALGOBOX_COEFF_BINOMIAL(n,k)
FIN_SI
AFFICHER "Nombre de chemins : "
AFFICHER c
FIN_ALGORITHME
```

Solution de Claude Morin :

Tout d'abord, par symétries par rapport aux axes, on peut supposer a et b positifs. Un chemin convenable possède k vecteurs (1, 0), $a + k$ vecteurs (1, 0), k' vecteurs (0, -1) et $b + k'$ vecteurs (0, 1). Cela impose $n = a + b + 2(k + k')$ avec k et k' entiers naturels, donc $n = a + b + 2p$ avec p entier naturel ; k peut varier de 0 à p et $k' = p - k$. Pour dénombrer ces chemins il suffit de placer les k vecteurs (-1, 0), les $a + k$ vecteurs (1, 0), les $p - k$ vecteurs (0, -1) et les $b + p - k$ vecteurs (0, 1) dans une liste.

Il y a $\dfrac{n!}{k!\,(a+k)!\,(p-k)!\,(b+p-k)!}$ possibilités d'où le nombre de chemins : $N = \sum_{k=0}^{p}\dfrac{n!}{k!\,(a+k)!\,(p-k)!\,(b+p-k)!}$.

Cela s'écrit encore $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{p-k}\binom{n-p}{a+k}$ qui se simplifie en $\binom{n}{p}\binom{n}{a+p}$ en utilisant l'identité de Vandermonde.

Cette formule très simple peut s'obtenir directement par un raisonnement astucieux.

À un chemin convenable, formé de k vecteurs (-1, 0), $a + k$ vecteurs (1, 0), $p - k$ vecteurs (0,-1) et $b + p - k$ vecteurs (0, 1), on associe le chemin obtenu en remplaçant les k vecteurs (-1, 0) par k vecteurs (0, 1) et les $p - k$ vecteurs (0, -1) par $p - k$ vecteurs (1, 0).

On obtient ainsi un chemin formé de $a + p$ vecteurs (1, 0) et de $b + p$ vecteurs (0, 1). Le nombre de ces chemins est égal à $\binom{n}{a+p}$ (puisque $n = a + b + 2p$). Mais réciproquement, pour retrouver le chemin de départ à partir du chemin final, il faut choisir p vecteurs et parmi ces vecteurs remplacer (0, 1) par (-1, 0) et (1, 0) par (0, -1). Le nombre k de vecteurs (1, 0) qui ont été remplacés par (0, -1) peut varier de 0 à p. Comme il y a $\binom{n}{p}$ choix de p vecteurs parmi n, on retrouve bien le nombre $\binom{n}{p}\binom{n}{a+p}$.

98-1 *de Frédéric de Ligt* :

Montrer que pour tout entier positif n on peut mettre $\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ sous la forme $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ où m est un entier positif.

Solution de Jacques Chayé :

Calculons les premières valeurs de $u_n = \left(\sqrt{2}-1\right)^n$; $u_1 = \sqrt{2}-1 = \sqrt{2}-\sqrt{1}$; $u_2 = 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}$; $u_3 = 5\sqrt{2}-7 = \sqrt{50}-\sqrt{49}$; $u_4 = 17-12\sqrt{2} = \sqrt{289}-\sqrt{288}$ … Il semble que u_n soit effectivement de la forme $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$, mais aussi alternativement de la forme $a\sqrt{2}-b$, a et b entiers positifs tels que $2a^2 - b^2 = 1$ ou de la forme $a-b\sqrt{2}$, a et b entiers positifs tels que $a^2 - 2b^2 = 1$.
Démontrons ceci par récurrence.
• Le résultat est vrai pour $n = 1$
1°) Si $u_n = a\sqrt{2}-b$ avec a et b entiers positifs tels que $2a^2 - b^2 = 1$, alors

$$u_{n+1} = \left(a\sqrt{2}-b\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = (2a+b)-(a+b)\sqrt{2} \text{ et } (2a+b)^2 - 2(a+b)^2 = 2a^2 - b^2 = 1 .$$

2°) De même, si $u_n = a-b\sqrt{2}$ avec a et b entiers positifs tels que $a^2 - 2b^2 = 1$, alors

$$u_{n+1} = \left(a-b\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = (a+b)\sqrt{2}-(a+2b) \text{ et } 2(a+b)^2 - (a+2b)^2 = a^2 - 2b^2 = 1 .$$

• La propriété est donc vraie pour toute valeur de n.
Par ailleurs, dans le cas (1), $u_n = a\sqrt{2}-b = \sqrt{2a^2}-\sqrt{b^2} = \sqrt{2a^2}-\sqrt{2a^2-1}$,

dans le cas (2), $u_n = a-b\sqrt{2} = \sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2} = \sqrt{a^2}-\sqrt{a^2-1}$.

Donc, dans les deux cas : u_n est de la forme $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$.

Prolongement

La propriété s'étend à : $\left(\sqrt{5}-2\right)^n$, à $\left(\sqrt{10}-2\right)^n$, $\left(\sqrt{17}-2\right)^n$, etc. plus généralement à $\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n$.

L'hérédité pour le raisonnement par récurrence s'établit de la même manière.
1°) Si $\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n = a\sqrt{p^2+1}-b$ [a et b entiers positifs tels que $(p^2 + 1)a^2 - b^2 = 1$] alors,

$$\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{n+1} = \left(a\sqrt{p^2+1}-b\right)\left(\sqrt{p^2+1}-p\right) = a\left(p^2+1\right)+bp-(ap+b)\sqrt{p^2+1} .$$ Et on a :

$$\left(a\left(p^2+1\right)+bp\right)^2 - \left(p^2+1\right)(ap+b)^2 = a^2\left(p^2+1\right)^2 + b^2p^2 + 2abp\left(p^2+1\right) - \left(p^2+1\right)\left(a^2p^2+2abp+b^2\right)$$

$$= \left(1+b^2\right)\left(p^2+1\right) + b^2p^2 - \left(1+b^2\right)p^2 - b^2\left(p^2+1\right) = 1 + b^2 + b^2p^2 - b^2p^2 - b^2 = 1$$

2°) Si $\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n = a-b\sqrt{p^2+1}$ [a et b entiers positifs tels que $a^2 - (p^2 + 1)b^2 = 1$] alors,

$$\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{n+1} = \left(a-b\sqrt{p^2+1}\right)\left(\sqrt{p^2+1}-p\right) = (a+bp)\sqrt{p^2+1}-\left(ap+b\left(p^2+1\right)\right) .$$

Et on a $\left(p^2+1\right)(a+bp)^2 - \left(ap+b\left(p^2+1\right)\right)^2 = \left(p^2+1\right)\left(a^2+2abp+b^2p^2\right) - \left(a^2p^2+2abp\left(p^2+1\right)+b^2\left(p^2+1\right)^2\right)$

$$= \left(p^2+1\right)a^2 + \left(a^2-1\right)p^2 - a^2p^2 - \left(a^2-1\right)\left(p^2+1\right) = a^2 - p^2 - a^2 + p^2 + 1 = 1 .$$

Par ailleurs, dans le cas (1) $a\sqrt{p^2+1}-b = \sqrt{\left(p^2+1\right)a^2}-\sqrt{b^2} = \sqrt{b^2+1}-\sqrt{b^2}$,

et dans le cas (2) $a-b\sqrt{p^2+1} = \sqrt{a^2}-\sqrt{b^2\left(p^2+1\right)} = \sqrt{a^2}-\sqrt{a^2-1}$. Donc, dans les deux cas, c'est de la forme $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$.

Solution de Louis-Marie Bonneval :

D'une façon générale, $\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ s'écrit $a_n+b_n\sqrt{2}$, avec a_n et b_n entiers, ce qu'on peut établir par récurrence ou en développant selon la formule du binôme. Or, pour tout nombre x de la forme $a+b\sqrt{2}$ où a et b sont entiers, en posant $N(x)=a^2-2b^2$, on définit classiquement un homomorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ vers l'anneau $\mathbb{Z}$. Donc $N\left(x^n\right)=N\left(x\right)^n$ pour tout naturel n.

De $N\left(-1+\sqrt{2}\right)=-1$, on déduit donc $N\left(\left(-1+\sqrt{2}\right)^n\right)=\left(-1\right)^n$, soit $a_n^{\ 2}-2b_n^{\ 2}=\left(-1\right)^n$.

* Si n est pair, $a_n^{\ 2}-2b_n^{\ 2}=1$. De plus $a_n\geq 0$ et $b_n\leq 0$, comme on peut le voir en développant $\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ par la formule du binôme. Alors $\left(\sqrt{2}-1\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}=\sqrt{a_n^{\ 2}}-\sqrt{2b_n^{\ 2}}=\sqrt{a_n^{\ 2}}-\sqrt{a_n^{\ 2}-1}$.

* si n est impair, $a_n^{\ 2}-2b_n^{\ 2}=-1$. De plus $a_n\leq 0$ *et* $b_n\geq 0$, comme on peut le voir en développant $\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ par la formule du binôme. Alors $\left(\sqrt{2}-1\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}=-\sqrt{a_n^{\ 2}}+\sqrt{2b_n^{\ 2}}=\sqrt{2b_n^{\ 2}}-\sqrt{2b_n^{\ 2}-1}$.

Remarques :

1) En remarquant que $\left(-1-\sqrt{2}\right)^n=a_n-b_n\sqrt{2}$, on établit que $a_n=\dfrac{\left(-1+\sqrt{2}\right)^n+\left(-1-\sqrt{2}\right)^n}{2}$ et $b_n=\dfrac{\left(-1+\sqrt{2}\right)^n-\left(-1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$.

Donc $a_n^{\ 2}=\dfrac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^n+\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+2\left(-1\right)^n}{4}$ et $2b_n^{\ 2}=\dfrac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^n+\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-2\left(-1\right)^n}{4}$.

Par conséquent, dans tous les cas, $m=\dfrac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^n+\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+2}{4}$.

2) $\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\sqrt{m}+\sqrt{m-1}$.

Solution de Serge Parpay :

On suppose n entier positif. Posons $A=\sqrt{2}+1$ et $B=\sqrt{2}-1$. On a $AB=1$ et $A^nB^n=(AB)^n=1$.

En considérant le binôme de Newton, $\left(a+b\right)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$.

1) Si n est pair, on peut calculer les nombres entiers positifs x et y tels que $A^n=x+y\sqrt{2}$ et $B^n=x-y\sqrt{2}$.
On a d'une part $A^nB^n=1$, d'autre part $A^nB^n=x^2-2y^2$, d'où $x^2-2y^2=1$, soit $2y^2=x^2-1$.
En écrivant $A^n=\sqrt{x^2}+\sqrt{2y^2}$ et $B^n=\sqrt{x^2}-\sqrt{2y^2}$, il vient $A^n=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-1}$ et $B^n=\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2-1}$ (1).

2) Si n est impair, on peut calculer les nombres positifs x et y tels que $A^n=x\sqrt{2}+y$ et $B^n=x\sqrt{2}-y$.
On a d'une part $A^nB^n=1$, d'autre part $A^nB^n=2x^2-y^2$, d'où $2x^2-y^2=1$, soit $y^2=2x^2-1$.
En écrivant $A^n=\sqrt{2x^2}+\sqrt{y^2}$ et $B^n=\sqrt{2x^2}-\sqrt{y^2}$, il vient $A^n=\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2-1}$ et $B^n=\sqrt{2x^2}-\sqrt{2x^2-1}$ (2).

3) D'après (1) et (2), n étant un entier positif, $\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\sqrt{m}+\sqrt{m-1}$ et $\left(\sqrt{2}-1\right)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ avec m entier positif.

98-2 *de Frédéric de Ligt* :

Quels sont les triangles qui peuvent être partagés en 3 triangles isocèles ?

N.d.l.r. Un cas particulier de ce problème a été proposé aux élèves de troisième dans l'épreuve du rallye 2015.

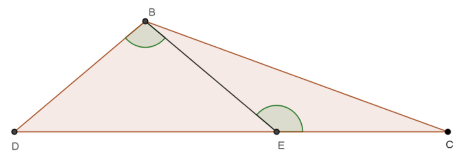
Solution de Louis-Marie Bonneval :

I. Triangles décomposables en deux triangles isocèles

On dira qu'un triangle BCD est *bisécable en B* si une droite passant par B peut le découper en deux triangles isocèles BED et BEC. Posons $\delta=\widehat{\mathrm{BDC}}$ et $\gamma=\widehat{\mathrm{BCD}}$, exprimés en degrés. On va exprimer en fonction de δ (ce qui permet d'exprimer aussi

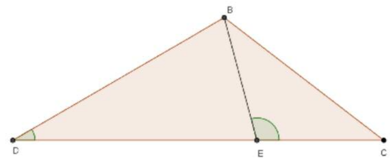
$\widehat{DBC}$ en fonction de δ puisque $\widehat{DBC} = 180 - \delta - \gamma$.
Dans les figures ci-dessous, on a marqué pour chaque triangle isocèle son angle principal.

1er cas : DBE est isocèle en B.



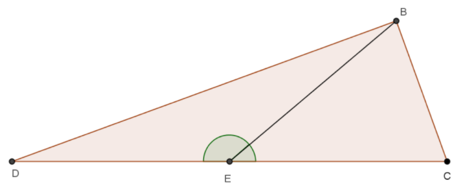
Alors BEC ne peut être isocèle qu'en E. En effet $\widehat{BED}$ est aigu, donc $\widehat{BEC}$ est obtus. Alors $\gamma = \dfrac{\delta}{2}$, avec $\delta < 90$.

2e cas : DBE est isocèle en D.



Alors BEC ne peut être isocèle qu'en E. En effet $\widehat{BED}$ est aigu, donc $\widehat{BEC}$ est obtus. Alors $\gamma = 45 - \dfrac{\delta}{4}$.

3e cas : DBE est isocèle en E.

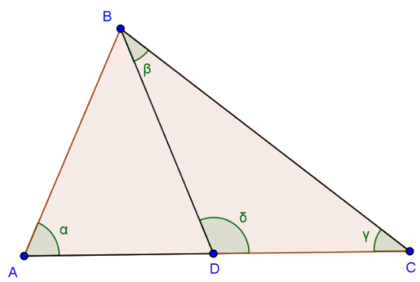


* Si BEC est isocèle en B, on se ramène au premier cas en permutant D et C :
$\gamma = 2\delta$ avec $\delta < 45$.
* Si BEC est isocèle en C, on se ramène au deuxième cas en permutant D et C :
$\gamma = 180 - 4\delta$, avec $\delta < 45$.
* Si BEC est isocèle en E : $\gamma = 90 - \delta$, avec $\delta < 90$. DBC est rectangle en B.

Dans tous les cas, on vérifie, en reconstruisant la figure, que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes.

II. Triangles décomposables en trois triangles isocèles

On dira qu'un triangle ABC est *trisécable* s'il est décomposable en trois triangles isocèles.
Pour le partager en trois triangles, il faut deux coups de ciseau, dont au moins un passe par un sommet. Quitte à changer les noms des sommets, supposons que le premier coup de ciseau passe par B, et coupe [AC] en D.

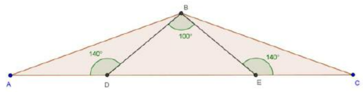
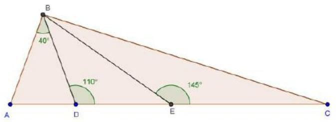
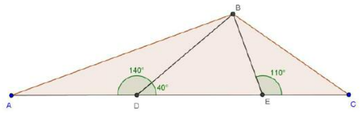
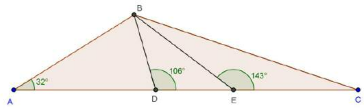
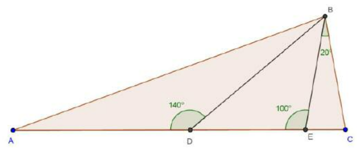
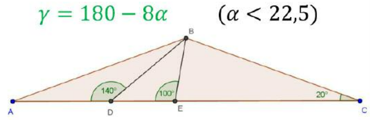
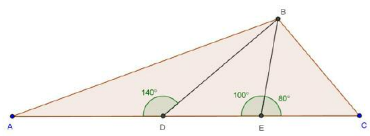


Posons $\alpha = \widehat{BAC}$, $\gamma = \widehat{ACB}$, $\beta = \widehat{DBC}$, $\delta = \widehat{BDC}$, exprimés en degrés. On va exprimer γ en fonction de α (ce qui permet d'exprimer aussi $\widehat{ABC}$ en fonction de α puisque $\widehat{ABC} = 180 - \alpha - \gamma$.
L'un des deux triangles obtenus doit être isocèle, et l'autre bisécable. Quitte à permuter A et C, supposons ABD isocèle et BCD bisécable.
ABD peut être isocèle en B, en D ou en A. BCD peut être bisécable en B, en D ou en C, soit de 15 façons. Il y a donc a priori 45 cas de figure !

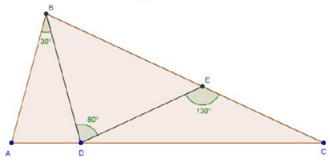
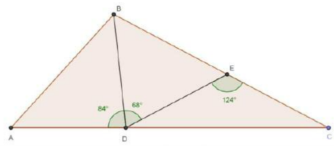
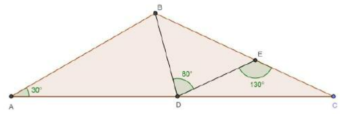
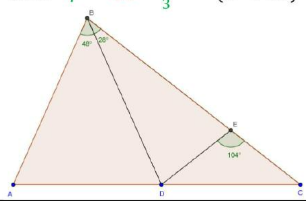
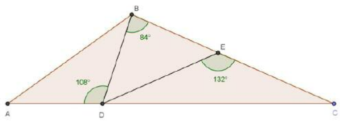
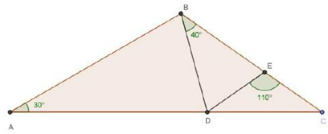
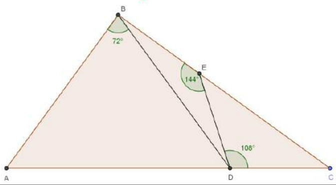
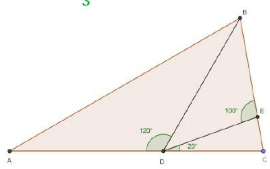
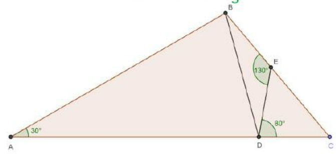
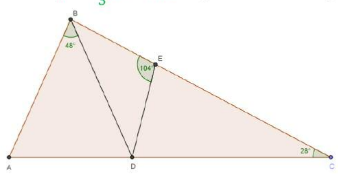
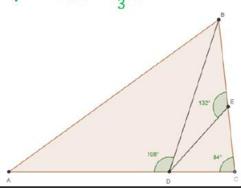
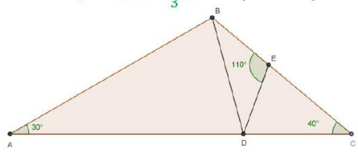
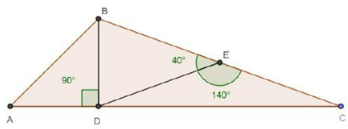
En réalité certaines combinaisons sont impossibles (on les a notées dans les pages suivantes en rouge), du fait que si un triangle isocèle a un angle obtus, c'est nécessairement son angle principal. On constate en construisant les figures qu'il y a dans certains cas des restrictions à apporter aux valeurs de α.

Dans les figures fournies en exemple, on a indiqué dans chaque triangle isocèle l'angle principal.

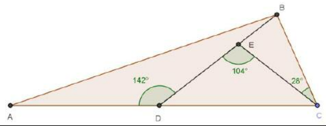
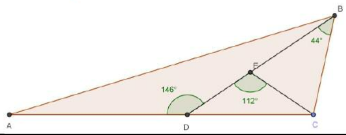
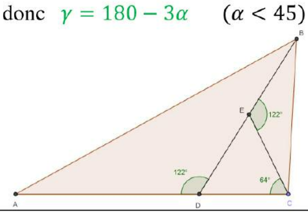
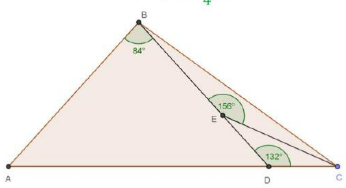
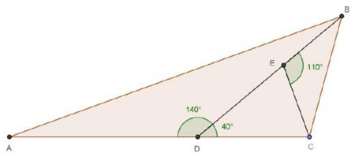
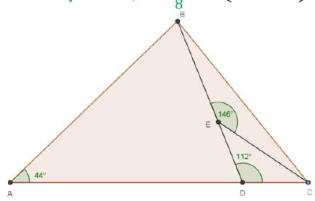
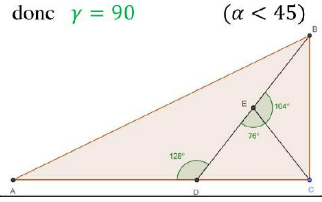
1) BCD bisécable en B

	ABD isocèle en B $\delta = 180 - \alpha$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = \alpha - \gamma$ $\alpha < 90$	ABD isocèle en D $\delta = 2\alpha$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = 180 - 2\alpha - \gamma$ $\alpha < 90$	ABD isocèle en A $\delta = 90 + \frac{\alpha}{2}$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = 90 - \frac{\alpha}{2} - \gamma$
BDE isocèle en B, BCE isocèle en E $\gamma = \frac{\delta}{2}$	$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus	$\gamma = \alpha$ $(\alpha < 45)$ 	$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus
BDE isocèle en D, BCE isocèle en E $\gamma = 45 - \frac{\delta}{4}$	$\gamma = \frac{\alpha}{4}$ $(\alpha < 90)$ 	$\gamma = 45 - \frac{\alpha}{2}$ $(\alpha < 90)$ 	$\gamma = 22{,}5 - \frac{\alpha}{8}$ 
BDE isocèle en E, BCE isocèle en B $\gamma = 2\delta$	$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus	$\gamma = 4\alpha$ $(\alpha < 22{,}5)$ 	$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus
BDE isocèle en E, BCE isocèle en C $\gamma = 180 - 4\delta$	$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus	$\gamma = 180 - 8\alpha$ $(\alpha < 22{,}5)$ 	$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus
BDE isocèle en E, BCE isocèle en E $\gamma = 90 - \delta$	$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus	$\gamma = 90 - 2\alpha$ $(\alpha < 45)$ 	$\widehat{BDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus

2) BCD bisécable en D

	ABD isocèle en B $\delta = 180 - \alpha$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = \alpha - \gamma$ $\alpha < 90$	ABD isocèle en D $\delta = 2\alpha$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = 180 - 2\alpha - \gamma$ $\alpha < 90$	ABD isocèle en A $\delta = 90 + \frac{\alpha}{2}$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = 90 - \frac{\alpha}{2} - \gamma$
BDE isocèle en D, CDE isocèle en E $\gamma = \frac{\beta}{2}$	$\gamma = \frac{\alpha-\gamma}{2}$ donc $\gamma = \frac{\alpha}{3}$ $(\alpha < 90)$ 	$\gamma = 90 - \alpha - \frac{\gamma}{2}$ donc $\gamma = 60 - \frac{2\alpha}{3}$ $(67{,}5 < \alpha < 90)$ 	$\gamma = 45 - \frac{\alpha}{4} - \frac{\gamma}{2}$ donc $\gamma = 30 - \frac{\alpha}{6}$ 
BDE isocèle en B, CDE isocèle en E $\gamma = 45 - \frac{\beta}{4}$	$\gamma = 45 - \frac{\alpha-\gamma}{4}$ donc $\gamma = 60 - \frac{\alpha}{3}$ $(\alpha < 90)$ 	$\gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{4}$ donc $\gamma = \frac{2\alpha}{3}$ $(\alpha < 67{,}5)$ 	$\gamma = 22{,}5 + \frac{\alpha}{8} + \frac{\gamma}{4}$ donc $\gamma = 30 + \frac{\alpha}{6}$ $(\alpha < 90)$ 
BED isocèle en E, CDE isocèle en D $\gamma = 2\beta$	$\gamma = 2(\alpha - \gamma)$ donc $\gamma = \frac{2}{3}\alpha$ $(\alpha < 90)$ 	$\gamma = 360 - 4\alpha - 2\gamma$ donc $\gamma = 120 - \frac{4}{3}\alpha$ $(22{,}5 < \alpha < 90)$ 	$\gamma = 180 - \alpha - 2\gamma$ donc $\gamma = 60 - \frac{\alpha}{3}$ 
BDE isocèle en E, CDE isocèle en C $\gamma = 180 - 4\beta$	$\gamma = 180 - 4(\alpha - \gamma)$ donc $\gamma = \frac{4}{3}\alpha - 60$ $(45 < \alpha < 90)$ 	$\gamma = -540 + 8\alpha + 4\gamma$ donc $\gamma = 180 - \frac{8}{3}\alpha$ $\alpha < 67{,}5)$ 	$\gamma = -180 + 2\alpha + 4\gamma$ donc $\gamma = 60 - \frac{2}{3}\alpha$ $(\alpha < 90)$ 
BDE isocèle en E, CDE isocèle en E $\gamma = 90 - \beta$	EB=ED=EC, donc $\widehat{BDC}$ est droit donc $\widehat{BDA}$ est droit	$\gamma = 2\alpha + \gamma - 90$ donc $\alpha = 45$ $(\gamma < 90)$ 	EB=ED=EC, donc $\widehat{BDC}$ est droit donc $\widehat{BDA}$ est droit

3) BCD bisécable en C

	ABD isocèle en B $\delta = 180 - \alpha$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = \alpha - \gamma$ $\alpha < 90$	ABD isocèle en D $\delta = 2\alpha$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = 180 - 2\alpha - \gamma$ $\alpha < 90$	ABD isocèle en A $\delta = 90 + \frac{\alpha}{2}$ $\beta = 180 - \delta - \gamma = 90 - \frac{\alpha}{2} - \gamma$
BCE isocèle en C, CDE isocèle en E $\delta = \frac{\beta}{2}$	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus	$2\alpha = 90 - \alpha - \frac{\gamma}{2}$ donc $\gamma = 180 - 6\alpha$ $(\alpha < 22{,}5)$ 	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus
BCE isocèle en B, CDE isocèle en E $\delta = 45 - \frac{\beta}{4}$	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus	$2\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{4}$ donc $\gamma = 6\alpha$ $(\alpha < 22{,}5)$ 	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus
BCE isocèle en E, CDE isocèle en C $\delta = 2\beta$	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus	$\alpha = 180 - 2\alpha - \gamma$ donc $\gamma = 180 - 3\alpha$ $(\alpha < 45)$ 	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus
BCE isocèle en E, CDE isocèle en D $\delta = 180 - 4\beta$	$180 - \alpha = 180 - 4(\alpha - \gamma)$ donc $\gamma = \frac{3}{4}\alpha$ 	$2\alpha = -540 + 8\alpha + 4\gamma$ donc $\gamma = 135 - \frac{3}{2}\alpha$ $(\alpha < 90)$ 	$90 + \frac{\alpha}{2} = -180 + 2\alpha + 4\gamma$ donc $\gamma = 67{,}5 - \frac{3}{8}\alpha$ $(\alpha < 90)$ 
BCE isocèle en E, CDE isocèle en E $\delta = 90 - \beta$	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus	$2\alpha = -90 + 2\alpha + \gamma$ donc $\gamma = 90$ $(\alpha < 45)$ 	$\widehat{CDE}$ aigu donc $\widehat{BDA}$ obtus

Je conclus donc : il y a 27 familles de triangles trisécables.

Épilogue

J'ai envoyé l'étude ci-dessus à Frédéric, qui m'a dit : « *Bravo pour ta ténacité ! Mais n'as-tu pas oublié une possibilité avec trois coups de ciseau ?* »
Bon sang, mais c'est bien sûr !
Saurez-vous trouver cette solution ?

99-3 *de Louis Rivoallan* :

Soit a, b, c, d quatre nombres positifs. Montrer que : $\sqrt{a+b+c+d}+\sqrt{b+c+d}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d}\geq\sqrt{a+4b+9c+16d}$.

Solution de Louis-Marie Bonneval :

On va montrer plus généralement que, pour toute famille de n nombres positifs $(u_k)_{1\leq k\leq n}$, $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=k}^{n}u_i}\geq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k^2u_k}$.

Raisonnons par récurrence sur n :

L'inégalité est vérifiée pour $n=1$: $\sqrt{u_1}\geq\sqrt{u_1}$.

Supposons que pour toute famille de n nombres positifs $(u_k)_{1\leq k\leq n}$: $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=k}^{n}u_i}\geq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k^2u_k}$;

montrons qu'alors pour toute famille de n+1 nombres positifs $(v_k)_{1\leq k\leq n+1}$: $\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{\sum_{i=k}^{n+1}v_i}\geq\sqrt{\sum_{k=1}^{n+1}k^2v_k}$.

Le premier membre peut s'écrire : $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=k}^{n+1}v_i}+\sqrt{v_{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=k}^{n-1}v_i+(v_n+v_{n+1})}+\sqrt{v_{n+1}}$.

Or d'après l'hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=k}^{n-1}v_i+(v_n+v_{n+1})}\geq\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}k^2v_k+n^2(v_n+v_{n+1})}$.

Il suffit donc d'établir que $\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}k^2v_k+n^2(v_n+v_{n+1})}+\sqrt{v_{n+1}}\geq\sqrt{\sum_{k=1}^{n+1}k^2v_k}$; soit $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k^2v_k+n^2v_{n+1}}+\sqrt{v_{n+1}}\geq\sqrt{\sum_{k=1}^{n+1}k^2v_k}$.

Les deux membres étant positifs, cela équivaut (par élévation au carré) à

$\sum_{k=1}^{n}k^2v_k+n^2v_{n+1}+v_{n+1}+2\sqrt{v_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2v_k+n^2v_{n+1}\right)}\geq\sum_{k=1}^{n+1}k^2v_k$; soit $(n^2+1)v_{n+1}+2\sqrt{v_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2v_k+n^2v_{n+1}\right)}\geq(n+1)^2v_{n+1}$;

autrement dit $\sqrt{v_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2v_k+n^2v_{n+1}\right)}\geq nv_{n+1}$.

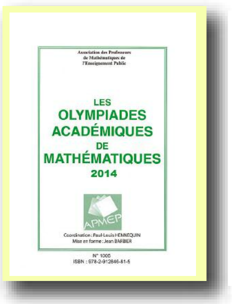
Les deux membres étant positifs, cela équivaut à $v_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2v_k+n^2v_{n+1}\right)\geq n^2v_{n+1}{}^2$;

soit $v_{n+1}\sum_{k=1}^{n}k^2v_k\geq 0$, inégalité manifestement vraie.

Les brochures de l'APMEP

Il a été question, page 5, des brochures « millésimées » réalisées par des Régionales et éditées par l'APMEP. Voici donc les deux autres que nous signalons.

« ***L'algorithmique au lycée*** » (n° 1003) réalisée par la commission Inter-IREM Lycée. Cette imposante brochure de 288 pages au format A4 s'impose aussi dans toutes les bibliothèques des lycées tellement son contenu est précieux pour l'enseignement de l'algorithmique. Toutes les problématiques liées à l'enseignement y sont abordées depuis les expériences de classe jusqu'à la présentation de divers langages de programmation en passant par la formation des enseignants, les activités en classe et l'évaluation. (*Prix public : 25 €, prix adhérent : 16,25 €*)



La brochure « ***Les olympiades mathématiques de première 2014*** » (n° 1005) coordonnée par Paul-Louis Hennequin est téléchargeable *gratuitement* sur le site « marchand » de l'APMEP. Comme celles des années précédentes, elle contient tous les exercices nationaux et académiques, leurs corrigés, et bénéficie de la couleur. C'est une mine d'activités pour la classe, pas uniquement en première, et une excellente préparation aux Olympiades de première 2015.