

Des problèmes

99-1 de Jacques Chayé (Poitiers) :

Soit un segment $[AB]$. Une droite d est perpendiculaire en H à la droite (AB) , le point H étant en dehors du segment $[AB]$. Soit M un point variable de d situé dans P , l'un des deux demi-plans limités par (AB) . Où le point M doit-il se situer pour que l'angle $\widehat{AMB}$ soit maximum ?

99-2 de Jean-Christophe Laugier (Rochefort) :

Soit a, m, n des entiers tels que $a > 1$ et $m, n > 0$. Déterminer le PGCD de $a^n + 1$ et $a^m - 1$.

99-3 de Louis Rivoallan (Rochefort) :

Soit a, b, c, d quatre nombres positifs. Montrer que :

$$\sqrt{a+b+c+d} + \sqrt{b+c+d} + \sqrt{c+d} + \sqrt{d} \geq \sqrt{a+4b+9c+16d}$$

99-4 de Frédéric de Ligt (Montguyon) :

Soit ABC un triangle acutangle, construire un triangle $A'B'C'$ avec A' sur $[AB]$, B' sur $[BC]$, C' sur $[AC]$ tel que les droites $(A'B')$, $(B'C')$ et $(A'C')$ soient respectivement orthogonales aux droites (AB) , (BC) et (AC) . Que dire du triangle $A'B'C'$?

Des solutions

96-3 de Jean-Christophe Laugier :

Montrer que quels que soient les entiers naturels m et n , avec m impair, $2^m - 1$ et $2^n + 1$ sont premiers entre eux.

Solution de l'auteur :

Claude Morin en a donné une élégante solution dans le Corollaire n° 98 : démonstration par l'absurde qui fait appel à la notion d'ordre d'un élément modulo un nombre premier p . Voici une démonstration plus élémentaire, par récurrence sur l'entier impair m . On notera dans la suite (x, y) le PGCD des entiers naturels x et y . L'énoncé est évidemment vrai pour $m = 1$. Supposons-le établi pour tous les entiers m' impairs tels que $m' < m$, m étant un entier impair supérieur à 1.

Posons $n = mq + r$ avec $0 \leq r < m$.

Si $q = 0$, $2^n + 1 = 2^r + 1$ et $(2^n + 1, 2^m - 1) = (2^r + 1, 2^m - 1)$.

Si $q > 0$, il vient $2^n + 1 = 2^r(2^{mq} - 1) + 2^r + 1$.

$2^{mq} - 1$ étant divisible par $2^m - 1$ on a donc encore $(2^n + 1, 2^m - 1) = (2^r + 1, 2^m - 1)$.

Si $r = 0$, alors $(2^n + 1, 2^m - 1) = (2, 2^m - 1) = 1$. Si $r > 0$, on peut écrire $2^m - 1 = 2^{m-r}(2^r + 1) - (2^{m-r} + 1)$. D'où $(2^n + 1, 2^m - 1) = (2^r + 1, 2^{m-r} + 1)$. Dans le cas où $2r < m$, $2^{m-r} + 1 = 2^{m-2r}(2^r + 1) - (2^{m-2r} - 1)$ et dans le cas où $2r > m$, $2^r + 1 = 2^{2r-m}(2^{m-r} + 1) - (2^{2r-m} - 1)$.

Finalement, sans distinguer les deux cas, on peut écrire $(2^n + 1, 2^m - 1) = (2^r + 1, 2^{|m-2r|} - 1)$.

Puisque $|m - 2r| < m$, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $(2^n + 1, 2^m - 1) = (2^r + 1, 2^{|m-2r|} - 1) = 1$.

97-1 de Jacques Chayé :

Soient C_1 et C_2 deux cercles, de centres respectifs O_1 et O_2 , tangents extérieurement en O . Un point M_1 décrit C_1 et soit M_2 sur C_2 tel que $(\overline{OM_1}, \overline{OM_2}) = \frac{\pi}{2}$ rad

- 1) Démontrer que la droite (M_1M_2) passe par un point fixe.
- 2) Quel est le lieu du milieu I de $[M_1, M_2]$?

Solution de Louis-Marie Bonneval :

Appelons r_1 et r_2 les rayons, supposés distincts (et non nuls), des deux cercles. Il y a deux homothéties h et h' qui transforment C_1 en C_2 :

- h a pour rapport $\frac{r_2}{r_1}$ et pour centre le point C tel que $\overrightarrow{CO_2} = \frac{r_2}{r_1} \overrightarrow{CO_1}$.
- h' a pour rapport $-\frac{r_2}{r_1}$ et pour centre O ;

On peut remarquer que C est le conjugué harmonique de O par rapport à O_1 et O_2 .

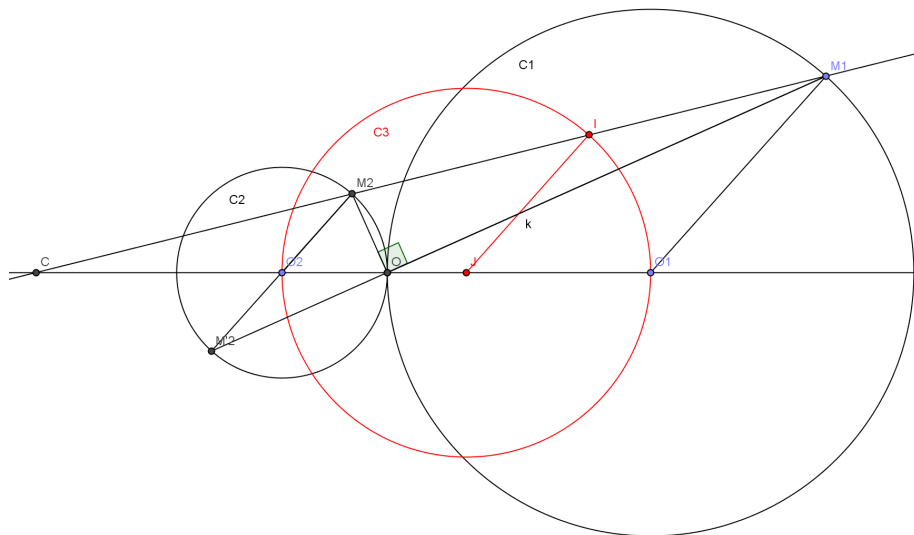
L'image de M_1 par h' est le point M'_2 intersection de (OM_1) avec C_2 . Il vérifie $\overrightarrow{O_2M'_2} = -\frac{r_2}{r_1} \overrightarrow{O_1M_1}$.

L'angle $M_2\widehat{OM'_2}$ étant droit, M_2 est diamétralement opposé à M'_2 sur C_2 , donc $\overrightarrow{O_2M_2} = \frac{r_2}{r_1} \overrightarrow{O_1M_1}$.

M_2 est donc l'image de M_1 par h . Il en résulte que la droite (M_1M_2) passe par C .

Appelons J le milieu de $[O_1O_2]$: (JI) est parallèle à (O_1M_1) et (O_2M_2) . L'homothétie de centre C qui transforme O_1 en J transforme donc M_1 en I . Quand M_1 décrit C_1 , I décrit donc le cercle C_3 transformé de C_1 par cette homothétie.

Remarque : si $r_1 = r_2$, M_2 est l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$, donc la droite (M_1M_2) reste parallèle à (O_1O_2) . Le lieu de I est alors le cercle image de C_1 par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{O_1O_2}$.



Solution de Claude Morin :

Notons A_1 et A_2 les autres points d'intersection des cercles avec la droite (O_1O_2) et supposons que les rayons des deux cercles vérifient $R_1 > R_2$: cela entraîne que la droite (M_1M_2) coupe la droite (O_1O_2) en un point P . De l'égalité des angles $(\overrightarrow{A_2O}, \overrightarrow{A_2M_2})$ et $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OM_1})$ on déduit $(A_2M_2) \parallel (OM_1)$ et $(A_1M_1) \parallel (OM_2)$ d'où $PA_2/PO = PM_2/PM_1 = PO/PA_1 = (PO + 2R_1)/(PO - 2R_2)$ d'où $PO = \frac{2R_1R_2}{R_1 - R_2}$. Le point P est fixe.

Remarque : dans le cas où $R_1 = R_2$ la droite (M_1M_2) reste parallèle à la droite (O_1O_2) .

Si I est le milieu de $[M_1M_2]$ on a $(IO_1) \parallel (OM_2)$ et $(IO_2) \parallel (OM_1)$ donc (IO_1) est perpendiculaire à (IO_2) : le point I appartient au cercle de diamètre $[O_1O_2]$.

Solution de Louis Rivoallan :

Soit C_1 le petit cercle de rayon R_1 et de centre O_1 et C_2 le plus grand de rayon R_2 et de centre O_2 . Soit A le point diamétralement opposé à O dans le cercle C_1 et B le point diamétralement opposé à O dans C_2 . Les triangles AM_1O et OM_2B sont rectangles respectivement en M_1 et M_2 puisqu'ils sont inscrits dans des demi-cercles. L'angle $M_1\widehat{OM_2}$ est droit par hypothèse et par suite les droites (M_1A) et (M_2O) d'une part et (M_1O) et (M_2B) d'autre part sont parallèles. Les triangles AM_1O et OM_2B ont donc leurs trois côtés parallèles et par conséquent, ils sont homothétiques. Soit h cette homothétie qui transforme A en O et O

en B. Elle transforme donc C_1 en C_2 . Son rapport est donc $k = \frac{R_2}{R_1}$ et son centre I est le point défini par $\overrightarrow{AI} = (1 - k)\overrightarrow{AO}$ (c'est le point d'intersection des tangentes communes à C_1 et C_2). Or $\overrightarrow{IM_2} = k\overrightarrow{IM_1}$, donc la droite (M_1M_2) passe par le point fixe I. Soit N le milieu de $[M_1M_2]$.

$$\overrightarrow{IN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{IM_2}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IM_1} + k\overrightarrow{IM_1}) = \frac{(1+k)}{2}\overrightarrow{IM_1}.$$

Cette relation montre que N est l'image de M_1 dans l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1+k}{2}$. Puisque M_1 décrit le cercle C_1 , N décrit l'image de ce cercle par cette dernière homothétie. L'examen des cas particuliers $M_1 = A$ puis $M_1 = O$ permet de voir que le cercle décrit par N a pour diamètre $[O_1O_2]$.

97-2 Concours France-Chine 2014 :

Soient deux entiers naturels a et b qui vérifient l'égalité $9a + 9b = 2ab - 19$. Déterminer toutes les possibilités pour a et b .

Solution de Louis Rivoallan :

Tout d'abord, on peut remarquer la symétrie entre a et b donc si $(a_0 ; b_0)$ est une solution, alors $(b_0 ; a_0)$ est aussi une solution à l'équation $9a + 9b = 2ab - 19$. Examinons d'abord le cas $a \geq 11$ et $b \geq 11$.

Alors $2ab - 19 = ab + ab - 19 > 10a + 10b - 19 > 9a + 9b + 10 + 10 - 19 = 9a + 9b + 1 > 9a + 9b$.

Ce qui montre qu'il n'y a pas de solution à l'équation $9a + 9b = 2ab - 19$ avec $a \geq 11$ et $b \geq 11$.

Pour $a \leq 10$, on teste les 10 cas, et on trouve 2 solutions $(a ; b) = (5 ; 64)$ et $(a ; b) = (8 ; 13)$, et bien sûr pour $b \leq 10$ on va trouver comme solution $(a ; b) = (64 ; 5)$ et $(13 ; 8)$.

Tous les cas ont donc été examinés, et par conséquent, toutes les solutions ont été trouvées.

Solution de Claude Morin :

En multipliant par 2 l'équation $(2a - 9)(2b - 9) = 119$ qui se factorise en $1 \times 119 = 7 \times 17$.

En imposant $a < b$ il y a deux cas :

$2a - 9 = 1$ et $2b - 9 = 119$ qui donne $a = 5$ et $b = 64$ et $2a - 9 = 7$ et $2b - 9 = 17$ qui donne $a = 8$ et $b = 13$.

Solution de Louis-Marie Bonneval :

En rebaptisant x et y les inconnues, on reconnaît dans $9x + 9y = 2xy - 19$ l'équation d'une hyperbole. On en cherche les points à coordonnées entières positives. Isolons y : l'équation s'écrit $y = \frac{9x+19}{2x-9}$. Le dénominateur n'est pas nul puisque x est entier. Mettons sous forme canonique cette fonction homographique : $y = \frac{119}{2(2x-9)} + \frac{9}{2}$.

L'équation équivaut donc à $2y - 9 = \frac{119}{2x-9}$, c'est-à-dire $(2x - 9)(2y - 9) = 119$. Comme $119 = 7 \times 17$, il y a huit possibilités (qu'on pourrait ramener à quatre en remarquant que x et y jouent des rôles symétriques) :

$$\begin{cases} 2x - 9 = 1 \\ 2y - 9 = 119 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 9 = 7 \\ 2y - 9 = 17 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 9 = 17 \\ 2y - 9 = 7 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 9 = 119 \\ 2y - 9 = 1 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 9 = -1 \\ 2y - 9 = -119 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 9 = -7 \\ 2y - 9 = -17 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x - 9 = -17 \\ 2y - 9 = -7 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 9 = -119 \\ 2y - 9 = -1 \end{cases}.$$

Les quatre premiers systèmes fournissent les couples $(5, 64)$; $(8, 13)$; $(13, 8)$; $(64, 5)$. Les quatre derniers systèmes fourniraient $(4, -55)$; $(1, -4)$; $(-4, 1)$; $(-55, 4)$, à exclure puisqu'on cherche des couples d'entiers naturels.

97-5 de Frédéric de Ligt :

Trouver un équivalent en français du carré SATOR.

Solution de Georges Borion :

En complément des solutions données dans le Corollaire n°98 en voici une autre :

S	E	N	E	S
E	P	A	T	E
N	A	N	A	N
E	T	A	P	E
S	E	N	E	S

98-3 de Louis Rivoallan :

Les $2n + 1$ points, notés $A_1, \dots, A_{2n+1}$, sont situés sur un même demi-cercle de centre O et de rayon 1. Soit B le point défini par $\overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^{2n+1} \overrightarrow{OA_i}$. Montrer que $OB \geq 1$.

Solution de l'auteur :

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que les points A_i sont placés dans l'ordre sur le demi-cercle. Soit B défini par $\overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^{2n+1} \overrightarrow{OA_i}$. Pour tout i allant de 1 à n , on définit le point M_i par $\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_{2n+1-i}}$. Alors $\overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^{2n+1} \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{OA_{n+1}}$. Puisque pour tout i , $OA_i = 1$, alors le quadrilatère $OA_i M_i A_{2n+1-i}$ est un losange, et de ce fait les angles $(\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OM_i})$ et $(\overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{OA_{2n+1-i}})$ sont égaux et inférieurs à $\frac{\pi}{2}$. Par suite l'angle $(\overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{OA_{n+1}})$ est aigu. De même les angles $(\overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{OM_j})$ sont aigus.

$OB^2 = \overrightarrow{OB}^2 = (\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{OA_{n+1}})^2 = \overrightarrow{OA_{n+1}}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM_i} \times \overrightarrow{OA_{n+1}} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overrightarrow{OM_i} \times \overrightarrow{OM_j}$. Or, pour tout i et j les différents produits scalaires sont positifs puisque les angles sont aigus. Par suite $OB^2 \geq OA_{n+1}^2 = 1$ et le point B est donc à l'extérieur du demi-cercle.

98-4 de Louis Rivoallan :

La population d'un village se réunit un jour de fête. Chaque personne serre la main d'un certain nombre d'autres personnes (0 ou 1 ou 2 ou ...).

Le nombre de personnes ayant serré la main d'un nombre impair de personnes est pair. Pourquoi ?

Solution de Louis-Marie Bonneval :

Répartissons les personnes en deux catégories : celles qui ont donné un nombre pair de poignées de main, celles qui ont donné un nombre impair de poignées de main. Si on additionne les nombres de poignées de main données par chaque personne du village, on obtient le double du nombre de poignées de main échangées, puisque chacune est comptée deux fois. Ce total est donc un nombre pair. Si on additionne les nombres de poignées de main données par chaque personne de la première catégorie, on obtient un nombre pair puisque c'est une somme de nombres pairs. Donc par différence, la somme des nombres de poignées de main données par chaque personne de la deuxième catégorie est aussi un nombre pair. Si l'effectif de cette deuxième catégorie était impair, cette somme d'un nombre impair de termes impairs serait un nombre impair. Donc l'effectif de la deuxième catégorie est pair ;

Remarque : C'est un résultat classique de la théorie des graphes. Dans tout graphe, le nombre de sommets d'ordre impair est pair.

Solution de Philippe Rogeon :

Numérotions les habitants du village 1, 2, ..., N , et définissons p_k comme le nombre de mains serrées par l'habitant k . La quantité $\sum_{k=1}^N p_k$ est paire, puisque chaque poignée de main est comptée deux fois. On a alors $\sum_{p_k \text{ est pair}} p_k + \sum_{p_k \text{ est impair}} p_k = 2m$ avec m entier, et donc $S_{\text{imp}} = \sum_{p_k \text{ est impair}} p_k$ est également une quantité paire. Comme S_{imp} est une somme d'entiers impairs, ils sont nécessairement en nombre pair.