Édito

De belles perspectives

Le « plan de relance » de l'enseignement mathématique présenté par notre ministre le 4 décembre dernier au Palais de la Découverte et intitulé Stratégie mathématiques (curieuse orthographe) fait chaud au cœur. Après de nombreuses années de dénigrement général, l'importance de notre discipline dans la formation et la culture de tous les citoyens commence à être reconnue. Les mathématiques ne se résument pas à une matière pratique pour sélectionner des candidats à un concours, les mathématiques ne sont pas le latin d'hier. La nécessité vitale pour notre développement économique de trouver les moyens de faire accéder le maximum de personnes à un niveau convenable de compétences mathématiques semble faire son chemin dans les têtes des décideurs. Les pistes avancées sont motivantes pour notre profession et vont dans le sens des propositions de l'APMEP. Le ministère tend clairement la main à notre Association. Il faut saisir cette occasion !

Pour plus de détails sur ce plan, voir :
http://www.education.gouv.fr/cid84398/strategie-mathematiques.html

Bonnes fêtes de fin d'année à tous.

Frédéric de Ligt

SOMMAIRE

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

79 86 17 16

Régionale de Poitou-Charentes

n°99

Décembre 2014

COROL'AIRE

APMEP, IREM, Bâtiment de mathématiques
Téléport 2 - BP 30179,
Bd Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope CHASSENEUIL CEDEX

APMEP : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél : apmep.poitiers@free.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros + Suppléments) : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Frédéric de LIGT
Comité de rédaction …	F. de LIGT, L-M BONNEVAL, J. GERMAIN, J. FROMENTIN
Imprimerie …………..	IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd Marie et Pierre Curie 86962 CHASSENEUIL CEDEX
Éditeur ………………	APMEP Rég. Poitou-Charentes
Siège social ………….	IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd Marie et Pierre Curie 86962 CHASSENEUIL CEDEX
Dépôt légal	Décembre 2014

Vie de l'association

Comité du 1er octobre 2014

Préparation de la Journée de la Régionale
Le Comité s'est penché sur l'organisation de la Journée dans les moindres détails avec définition des tâches de chacun.

Exposition « Puzzle »
Deux lycées ont répondu favorablement pour la fabrication des pièces de puzzles : le LP de Cognac spécialisé dans le travail du plastique et le LP de Thouars spécialisé dans le travail du carton.
Il faut aussi penser aux documents d'accompagnement de l'exposition. Il y aura des documents préparatoires sur le site de l'Espace Mendès France. Un document papier, avec photos, compléments historiques sur les éléments proposés, propositions d'activités, d'applications pédagogiques... pourrait prendre la forme d'une publication IREM.
Des relecteurs extérieurs seront indispensables pour ce travail.

Rallye
L'équipe s'est enrichie d'une nouvelle recrue ! Estelle Charrier nous a rejoints cette année avec son enthousiasme et sa jeunesse !
Nous attendons toujours de Cap'Maths des remboursements de dépenses.
Un Panoramath 6 est en préparation. Notre Rallye y participera.
Nous avons aussi proposé un article pour un dossier du Bulletin Vert sur les Rallyes.

Des nouvelles du site de la Régionale
Après le piratage du mois d'août, Jacques Germain et Louis-Marie Bonneval ont réussi à restaurer le site grâce notamment à une copie de sauvegarde. Ouf et bravo à eux !

Projets de réforme au niveau du collège
Toujours d'actualité, le projet ECLORE. Qu'en est-il au niveau national ?

Corol'aire
C'est bientôt le numéro 100 ! Il faudrait concocter un numéro spécial qui rendrait compte de x années d'existence de la publication : historique, éditos marquants, grandes dates, rallye, expos, Journées Nationales et Régionales, les meilleurs problèmes de la Rubricollage…

Comité du 10 décembre 2014

Élection du nouveau bureau, répartition des tâches
Frédéric de Ligt reste président, mais partagera les tâches avec Sébastien Dassule-Debertonne qui est appelé à se présenter l'an prochain.
Jacques Chayé reste trésorier, Nathalie Chevalarias quitte le secrétariat, Corinne Parcelier la remplace. Nathalie Chevalarias devient « correspondante formation initiale ».
Frédéric de Ligt rappelle qu'il est possible de poser cette année des candidatures individuelles au Comité National (mandat 3 ans).

Retour sur la Journée de la Régionale et les Journées Nationales de Toulouse
Pour la Journée de la Régionale, 69 collègues étaient présents dont 39 non adhérents, mais malheureusement peu d'entre eux ont choisi d'adhérer par la suite. Des étudiants qui préparent le CAPES de mathématiques ont assisté à des ateliers l'après-midi.
Il faudrait pouvoir donner un PLOT et un bulletin d'adhésion à chaque non-adhérent et savoir ce qui les freine : trop de documents ? Peur d'un engagement ?
Nous pouvons essayer d'associer le bulletin d'adhésion à l'inscription au rallye, à la remise des prix, à l'exposition…
Sur notre site, il faut davantage décrire l'action de l'Association pour que les collègues comprennent que des financements sont nécessaires pour mener à bien les actions.
Il faudrait aussi créer un lien pour pouvoir adhérer en ligne (en prévenant l'utilisateur qu'il va être redirigé vers le site national). Pour faciliter l'accès au site, il faudrait aussi que dans les messages envoyés par l'Association, figure dans la signature le lien vers le site et adresse mail de l'APMEP de Poitou-Charentes.
À Toulouse, nous étions nombreux : 40 personnes à l'assemblée et 32 au repas !
Les prochaines Journées Nationales auront lieu à Laon en Picardie, sur le thème « Les mathématiques : quelle histoire !? ». Pour la Journée de la Régionale, nous réfléchissons au lieu. Peut-être Saint-Jean d'Angély ? sur quel thème ?

Retour sur la réunion du Comité National des 15 et 16 novembre
Le problème de la vente en ligne des brochures est soulevé : quel retour peut-il y avoir pour notre Régionale si les ventes se font en ligne. Auparavant, un certain nombre de brochures étant attribuées aux Régionales, leurs ventes rapportaient directement de l'argent. Il faut espérer que ces ventes se maintiendront grâce aux différentes rencontres organisées par notre Régionale.
Suite aux différents partenariats engagés par le National (Canopé, Microsoft, Casio…), en plus des réductions sur les brochures et de la réduction d'impôt sur le montant de l'adhésion, les membres de l'association pourront bientôt bénéficier d'une suite Microsoft Office 2013 gratuite, et d'une utilisation illimitée du logiciel Mapple TA.
Le National cherche des volontaires pour proposer des thèmes, faire des vidéos, réaliser de petites séquences modulables dans le cadre de son action PAP.

Exposition "Puzzle"
La dernière réunion a eu lieu le 24 novembre à l'Espace Mendès France, de nombreux représentants de l'EMF étaient présents, ainsi qu'un représentant des IEN, et une représentante des professeurs d'école maternelle. *(article page XX)*

Rallye
Serge Parpay montre le nouveau projet de trophée. Il faudrait en prévoir sept, à renouveler chaque année car il est difficile de les reprendre chaque année dans les établissements. *(article page XX)*

Le prochain comité aura lieu le 1er avril et celui de la fin d'année scolaire le 10 juin.

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes
17 mars 2015 - Le temps

Les épreuves d'entraînement et l'ensemble des informations concernant le Rallye ont été mis sous enveloppes le 9 décembre. Comme les années précédentes, le Rectorat s'est occupé de l'envoi. Nous l'en remercions vivement. Ces documents ont été adressés à votre chef d'établissement. Si vous ne les avez toujours pas ou si l'envoi est incomplet, vous pouvez vous procurer ces documents sur notre site régional. L'affiche du Rallye ci-contre est disponible aussi sur notre site http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article223

L'inscription est maintenue à 5 € par classe. Bien sûr, nous comptons sur de nombreuses inscriptions, les dépenses spécifiques au Rallye étant toujours plus grandes : frais de déplacements pour les réunions, pour la remise des prix, trophées, lots…

La date limite d'inscription est fixée au 12 janvier. **Cette année, vous pouvez effectuer ces inscriptions en ligne** :

http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article226

Une centaine de classes sont déjà inscrites.

L'équipe continue son travail et n'a plus qu'un mois pour peaufiner les épreuves finales.

La remise des prix aura lieu le mercredi 3 juin 2015 en partenariat, cette année, avec l'Université de Poitiers.

Expo sur les puzzles avec l'Espace Mendès France

Après *Comment tu comptes ?* et *Courbes, les maths en pleine forme*, un groupe d'une quinzaine de collègues (APMEP, IREM) travaille sur la prochaine exposition « Maths » avec pour thème les puzzles, ou plus précisément les mathématiques que l'on peut faire ou enseigner à partir des puzzles.

Cette exposition sera finalisée comme par le passé par le centre scientifique Mendès France de Poitiers, et une version itinérante, comme pour les précédentes expositions, sera réalisée et pourra être empruntée à votre Régionale (voir http://apmep.poitiers.free.fr/).

Nous l'avons voulue accessible à des enfants à partir de 3 ans et que chacun, suivant son niveau (pouvant aller au-delà du bac), puisse y trouver de l'intérêt.

Afin de mener à bien ce projet nous avons suscité d'autres collaborations (avec un accord enthousiaste !) dans des domaines qui n'étaient pas représentés dans notre équipe :

- l'**AGEEM** (association des enseignants dans les écoles maternelles) très intéressée pour montrer qu'il est possible d'enseigner les mathématiques de manière récréative,
- des **Lycées Professionnels** qui vont monter dans leurs établissements des projets pédagogiques qui déboucheront sur la fabrication du matériel nécessaire aux manipulations lors de l'exposition,
- l'**ESPE** : les futurs enseignants pourront être partie prenante pour animer, voire utiliser cette exposition pour préparer un mémoire,
- les **corps d'inspection** (primaire, IEN, et secondaire, IPR) qui pourront en assurer la promotion.

De nombreuses réunions de travail ont déjà eu lieu et ont débouché sur l'organisation suivante.

- Visite autour de ***sept pôles*** :
  - Pôle 1 : Tangrams
  - Pôle 2 : Paradoxes et preuves
  - Pôle 3 : Avec des carrés faire un carré
  - Pôle 4 : Découpages : aires et volumes
  - Pôle 5 : Puzzles articulés
  - Pôle 6 : Polyminos et polycubes
  - Pôle 7 : Puzzles par juxtaposition.
- Un *bar à casse-tête* où les visiteurs (élèves ou non) pourront se prendre la tête sur des puzzles tout en faisant des mathématiques.
- Un *coin atelier* où les visiteurs pourront construire leur puzzle.
- Un *objet central* : un cube Soma « géant »
- Un *coin bibliothèque* pour ceux qui veulent en savoir plus.

Cette exposition débutera en septembre 2016 à l'Espace Mendès France et sera visible durant toute l'année scolaire 2016 - 2017. Nous avons débuté notre travail tôt mais les projets des LP doivent être prévus sur une année scolaire !

Pour le plaisir, une friandise distribuée au bar pour vous donner l'envie de venir avec vos élèves :

On dispose de 9 carrés ayant respectivement pour côté : 1 ; 4 ; 7 ; 8 ; 10 ; 14 ; 15 ; 17 ; 18 (unité 2cm). Avec ces 9 pièces, il est possible de faire un rectangle. Proposez une solution.

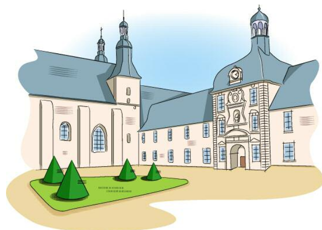
Dominique Gaud & Jean-Paul Guichard

COROL'AIRE est envoyé par courrier électronique aux adhérents et abonnés.

Ceux qui veulent recevoir une version papier (sans la couleur !) peuvent envoyer un chèque de 8 € (abonnement pour un an) à l'ordre de APMEP Poitou-Charentes, à

Jacques CHAYÉ - 5 rue Émile Faguet - 86000 POITIERS

Collège Henri IV de Poitiers,
le fonds de livres scientifiques anciens s'enrichit



Entre 2007 et 2010, une équipe de la Régionale APMEP a exhumé, rangé et répertorié une importante quantité de livres scientifiques anciens (du XVIIe au XXe siècle) appartenant au collège Henri IV de Poitiers, qui a aménagé une salle spéciale pour les accueillir.
Ce fonds vient d'être augmenté de 39 ouvrages, essentiellement de mathématiques (Darboux, Jordan, Cartan, Legendre, Julia, Picard ...), mais aussi de physique (Becquerel, De Broglie ...).
Il s'agit d'un legs de M. Roger PIEDVACHE, qui fut professeur de mathématiques dans cet établissement (alors lycée), en mathématiques supérieures de 1933 à 1941, en mathématiques spéciales de 1949 à 1957.
Ce legs a été transmis par son neveu Norbert MEUSNIER, lui-même ancien élève du lycée Henri IV de 1949 à 1961, à son ami Jacques CHAYÉ, élève de 1948 à 1956.
Ces livres ont été rangés dans la salle d'ouvrages anciens du collège, et inclus dans le répertoire. Vous pouvez télécharger ce fichier Excel en ouvrant l'article "Ouvrages scientifiques anciens du collège Henri IV" sur le site de la Régionale (rubrique "Livres et brochures").
Rappelons que pour consulter ces livres, les adhérents de l'APMEP doivent s'adresser au secrétariat du collège, qui leur prêtera une clé de la salle en échange d'une pièce d'identité. Sauf demande écrite à Mme la Principale, les ouvrages ne peuvent être empruntés.

Louis-Marie BONNEVAL

La Régionale de Poitou-Charentes
aux Journées Nationales à Toulouse

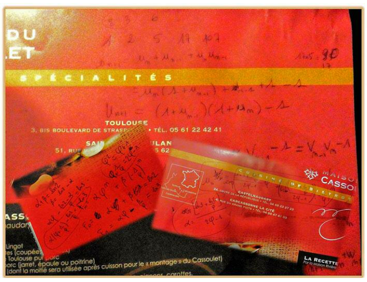
Forte participation de notre Régionale aux Journées Nationales à Toulouse.
Vous avez pu voir le reportage photographique sur ces Journées dans le dernier BGV n° 179. Une des photos mettait Jean-Paul Mercier à l'honneur avec tout son matériel de démonstration mathématique. Le voici à nouveau mais, cette fois, en plein démonstration.

Le stand de l'IREM de Poitiers a eu azussi un franc succès avec la collection de brochures : « **Enseigner les mathématiques à partir des grandeurs** ». Jacqueline, Matthieu et Delphine veillent à la caisse ! Les affiches y sont toujours à l'honneur et attirent les clients.

En parallèle au banquet des Journées, la Régionale a organisé le sien. Rendez-vous est pris à la Maison du Cassoulet : cela va de soi !

Mais que font-ils ? Ce sont des profs de maths ! Et la passion du métier reste très présente !

La preuve ci-contre !!



Merci à Jacqueline et à Nathalie pour les photos.

Journée de la Régionale du 15 octobre 2014

Cette journée a eu lieu sur le site du Futuroscope, dans les locaux de la faculté des sciences. Nous étions environ quatre-vingt enseignants (dont une petite moitié non adhérente à l'APMEP) à avoir fait le déplacement, en provenance des quatre départements de l'académie.
Nous pouvons remercier tous les protagonistes, membre du bureau ou enseignants à la faculté, sans oublié notre IPR François LAFONTAINE et le conférencier Robert PIECHON, pour leur contribution à la réussite de cette journée.
Suite à un accueil chaleureux, avec thé ou café et petits gâteaux à volonté, nous nous sommes rendus en salle de conférence. Cette demi-heure de prélude à la journée est toujours riche de retrouvailles et d'échanges informels, souvent très constructifs.
Le temps, pour notre président, d'accueillir Monsieur PIECHON, François LAFONTAINE nous renseigne sur les résultats d'une expérience menée par un chercheur à propos de : « *l'influence de la manière de présenter un travail de recherche à nos élèves* ». Son exposé est clair et concis, mais malheureusement, par respect pour notre conférencier, nous n'avons pas pris le temps d'échanger sur ce riche sujet.
Durant une heure et demie, Robert PIECHON, ingénieur chargé de formation chez Vinci, nous captive en nous exposant les nombreux domaines des mathématiques utilisés dans la construction de la LGV.
Sans entrer dans les détails, et en donnant des ordres de grandeur impressionnant, nous côtoyons la géométrie dans de multiples facettes, les statistiques et les probabilités, les suites numériques et les fonctions, sans oublié l'algorithmique.
Il est temps pour nous tous de nous rejoindre pour le repas de midi. C'est de nouveau un moment de partage entre enseignant des quatre coins de l'académie, moment que nous prolongeons devant les stands de brochures de l'APMEP et de L'IREM, toujours en appréciant thé ou café servis par nos indispensables retraités.

C'est l'heure de retourner au travail, durant une et demie, en ce bel après-midi d'octobre. En effet, trois ateliers, aussi riches les uns que les autres nous sont proposés : « *Faire des mathématiques avec des jeux du commerce* » animé par Jean Fromentin, « *Géotortue* » animé par Thierry Bacle et « *Histoire et mathématiques* » animé par Nathalie Chevalérias.

Heureux d'avoir ainsi enrichi notre formation, nous nous retrouvons pour le dernier moment de cette Journée de la Régionale : l'Assemblée Générale. Les membres du Bureau nous exposent les apports d'activités et financiers. Appel est fait à venir rejoindre l'équipe du Comité régional.
Tous heureux de ces moments de convivialités tout au long de cette journée, nous nous quittons après avoir écouté les remerciements de notre formidable et dévoué président Frédéric de Light.

Pierre-Jean Robin

Assemblée Générale de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes
Rapport d'activité 2014

Adhérents

La Régionale compte 147 adhérents dont 14 nouveaux adhérents.

Sources de financement

Les ressources de l'association proviennent de quatre directions. La partie des adhésions que nous reverse le National, la participation des classes au Rallye, la location des expositions, et la vente des brochures.

Conférence

La Régionale a organisé une conférence de Louis-Marie Bonneval à Angoulême le 12 février 2014 dont le titre était « **Les chaînes de Markov par les problèmes** ».

Expositions

Les versions itinérantes des trois expositions « **Expocube** », « **Comment tu comptes ?** » et « **Courbes** » réalisées en partenariat avec l'EMF et l'IREM de Poitiers sont sous la respon-

sabilité de la Régionale qui en assurent la circulation. Elles sont régulièrement empruntées par les établissements. Le tarif de location unique est inchangé à savoir 90 € par semaine.
Une quatrième exposition est en prépartion, toujours avec les mêmes partenaires, sur le thème des puzzles. Elle visera un public plus large « de la maternelle à l'université ». Des contacts ont été pris avec des IEN et des représentants de l'AGEEM.

Journée de la Régionale

La cinquième Journée de la Régionale s'est déroulée le mercredi 15 octobre dans le locaux de l'IFMI sur le site du Futuroscope.64 collègues dont 39 non adhérents à l'APMEP sont venus assister à la conférence de Robert Piechon et participer aux 3 ateliers proposés. Des étudiants de M1 sont venus assister aux ateliers l'après-midi. L'organisation et le programme proposé ont satisfait tous les participants.

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Près de 13 000 collégiens et lycéens se sont engagés le 18 mars 2014, pendant la semaine des mathématiques, dans le Rallye dont le thème était celui des puzzles. Le rallye est réalisé avec le concours de l'IREM et des IPR. La remise des prix s'est déroulée à l'université de La Rochelle le mercredi 4 juin, et a rassemblé près de 400 personnes. André Deledicq, créateur du concours Kangourou, a présenté à cette occasion une conférence sur le thème des puzzles.
Trois nouveautés cette année. Les lycées professionnels ont participé au Rallye avec une épreuve spécifique. Des épreuves de type Rallye ont été proposées au niveau CM en laissant aux collègues qui le souhaitaient organiser cette épreuve. Une autre épreuve intitulée Interm@th en Poitou-Charentes a été proposée aux collèges pour une animation dans le cadre de la liaison écoles-collèges.
Une parenthèse. Une nouvelle brochure éditée par l'APMEP nationale et réalisée par notre Régionale à vue le jour cette année. Il s'agit des « **Problèmes du prof Ila Ransor** » réalisée par Jean Fromentin à partir d'une cinquantaine d'énoncés de problèmes que Serge Parpay a fourni depuis une vingtaine d'année à notre Rallye.

Corol'aire

Il a continué à paraître régulièrement : 4 numéros et un supplément. Il est envoyé en version électronique aux adhérents de la Régionale, ce qui permet de faire des économies et de le présenter en couleur.

Site de la Régionale

Son responsable est Jacques Germain qui le tient régulièrement à jour. Toutes les actions de l'Association y sont présentées.

Fond scientifique du collège Henri IV

Un beau fond d'ouvrages scientifiques possédé par le collège Henri IV a été restauré et classé par des membres de la Régionale. Ces livres sont consultables par les adhérents sur place, sur présentation d'une pièce d'identité. Un don d'une trentaine d'ouvrages fait par Mr Meusnier est venu l'enrichir.

Liens avec le National

Frédéric de Ligt est représentant au Comité National de l'APMEP. Pierre-Jean Robin, membre du comité de notre Régionale a présenté sa candidature individuellement et fait aussi partie du Comité national. Plusieurs membres du comité sont aussi des responsables nationaux de l'APMEP.

Partenariats

Avec l'IREM la collaboration est toujours étroite.
Avec les IPR les relations sont cordiales. Ainsi nos annonces sont diffusées sur le site académique et sur la liste de diffusion des professeurs de mathématiques. Le Rectorat nous aide dans la diffusion aux établissements des documents du Rallye et a participé au frais de déplacement des membres organisateurs du Rallye encore en activité. La Journée de la Régionale et les Journées Nationales à Marseille ont pu être inscrites au PAF.

Le rapport d'activité présenté par Frédéric de Ligt, président de l'Association, et le rapport financier présenté par Jacques Chayé, trésorier de l'Association, sont approuvés à l'unanimité moins une abstention par les adhérents présents lors de l'Assemblée Générale.

Perspectives pour 2015

Adhésions

Faire remonter le nombre des adhérents.

Sources de financement

La vente des brochures par la Régionale risque de baisser avec la vente en ligne mise en place par le National. Le montant de la participation au Rallye n'augmentera pas. Les expositions devraient continuer à tourner avec la même fréquence. Un léger déficit de même hauteur que cette année est prévisible mais n'affectera pas notre trésorerie.

Journée de la Régionale

Renouveler la Journée de la Régionale qui est un moyen convivial et efficace de faire connaître l'Association.

Conférences

Le cycle des conférences proposées par la Régionale devrait se poursuivre en 2015. Frédéric Testard s'est proposé pour présenter plusieurs sujets de conférence.

Corol'aire

Le numéro 100 devrait sortir en 2015. Ce sera sans doute l'occasion d'un numéro spécial.

Rallye

Le Rallye se déroulera le mardi 17 mars pendant la Semaine Nationale des Mathématiques. Le thème retenu cette année est celui du temps. Les trois extensions entamées l'an passé seront poursuivies. La remise des prix se déroulera à Poitiers en un lieu restant encore à définir.

Prochaine exposition de 2016

Le thème retenu pour la prochaine exposition réalisée en partenariat avec l'IREM et l'EMF est celui des puzzles.

Présentation de la Régionale aux stagiaires

Il faudra prendre contact avec l'ESPE pour présenter notre Association aux jeunes stagiaires au moment où ils sont tous réunis et pas encore trop chargés de travail.

Histoire de prix

IREM de Poitiers, groupe collège

La première question qui s'est posée à nous est celle de la définition de toute grandeur : comment faire pour comparer la valeur marchande de deux produits ? Cela nous a amenés à enquêter pour savoir comment les hommes s'y étaient pris. Nous sommes allés voir les choix faits par diverses civilisations et comment ceux-ci ont évolué jusqu'à ce que nous connaissons actuellement, à savoir l'utilisation d'une monnaie faite de pièces et de billets. C'est une recherche riche et passionnante, où les mathématiques puisent leurs origines et sont fortement impliquées. Nous vous en livrons quelques éléments.

Épisode 1 : Du troc à la monnaie

Depuis les temps les plus anciens l'homme a eu le besoin et le désir d'acquérir des biens. La façon pacifique de le faire est d'échanger d'autres biens en sa possession contre les biens convoités : c'est le principe du troc, qui a traversé l'histoire et qui vit encore dans notre monde contemporain. Ce principe implique, plus ou moins explicitement, d'attribuer une valeur à ces différents biens pour pouvoir les comparer afin que l'échange soit équitable. C'est leur prix. Cette valeur se définit à partir de rapports établis : échanger 2 moutons contre 3 chèvres veut dire que le prix de 2 moutons est égal à celui de 3 chèvres. Et si le prix d'un bœuf est celui de 20 moutons, 30 chèvres pourront être échangées contre 1 bœuf, ce qui veut dire que le prix de la chèvre est le trentième de celui du bœuf. Des objets divers peuvent ainsi avoir le même prix par décret ou par calcul. On voit que l'on peut ainsi fixer un prix pour chaque bien grâce à une arithmétique des multiples et diviseurs.

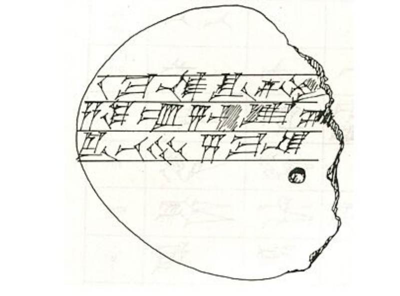
Mais plus la population concernée devient importante et organisée, plus le commerce se développe, et plus ces échanges ont besoin d'être codifiés. Comme pour toute grandeur, une façon de pouvoir facilement comparer les prix entre eux est de choisir un objet dont le prix sera l'unité. C'est ce qu'ont fait toutes les civilisations : une mesure d'orge déterminée, puis une masse d'argent, la mine, en Mésopotamie, une spirale de cuivre de poids fixé, le uten, en Égypte, un bœuf dans la Grèce d'Homère. C'est à partir de cette unité, comparable à notre unité monétaire, qu'étaient établis les prix de toutes les marchandises, permettant ainsi aux marchands de commercer et aux États d'évaluer avec précision la valeur des biens de leurs habitants et de calculer les impôts à payer, le tout consigné sur des registres. Mais cela suppose de savoir convertir la valeur des biens et marchandises dans cette unité, ce qui demande des compétences en calcul importantes comme le laisse apparaître la tablette paléo-assyrienne transcrite ci-contre.

Calculs marchands

« Kukkulānum a apporté 30 mines d'argent - droits d'entrée en sus sous notre sceau. Nous avons contrôlé l'argent, et il manquait 2/3 mine d'argent. Là-dessus : 114 étoffes-*kutānum* dont le prix est de 7 1/2 mines 4 ¼ sicles d'argent ; 2 talents 15 mines d'étain scellé, au taux de 13 ¼ sicles (d'étain) par (sicle d'argent) ; 40 mines d'étain scellé, en outre 8 mines d'étain scellé au taux de 13 sicles (d'étain) par (sicle d'argent) : leur prix est de 13 5/6 mines 2 5/6 sicles d'argent ; 6 ânes noirs ont coûté 2 mines 8 sicles d'argent avec leur fourrage, 16 sicles d'argent leur harnachement ; 37 mines d'étain pour les dépenses courantes au taux de 13 sicles (d'étain) par (sicle d'argent) : leur prix est de 2 5/6 mines 2 1/6 sicles ; 1 mine d'argent : capital d'exploitation des deux fréteurs, 4 sicles : leurs vêtements… »

Calculer chez les marchands assyriens au début du IIe millénaire av. J.-C., Cécile Michel (Culturemath)

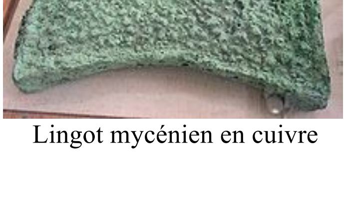
Dans ces sociétés, les calculs de certains prix, comme les impôts, les parts d'héritages, la valeur des terrains, vont devenir complexes et relever alors de calculateurs professionnels. En Mésopotamie ce seront les scribes. Mais les futurs marchands ont aussi besoin de se former au calcul : par exemple ils doivent savoir calculer le poids d'argent nécessaire à l'achat d'un poids d'un autre métal donné (voir la tablette paléo-assyrienne ci-contre).
Les impôts étant payés en nature, il fallait à nouveau calculer le prix des marchandises fournies par le contribuable pour s'acquitter de l'impôt.



10 mines d'or pur à raison de 5 1/2 sicles (d'argent) le sicle (d'or) : sa (valeur) en argent (est de) 55 mines.

Par contre, en l'absence de monnaie circulante, le commerce entre les habitants relevait du troc, mais la valeur des marchandises les unes par rapport aux autres pouvait être établie par le calcul à partir de leurs prix respectifs dans le système monétaire constitué à partir de l'unité choisie comme référence. Même dans des pays possédant une monnaie, on peut retrouver la pratique du troc comme en témoigne le texte sur les trocs donné en encadré.

Mais la pratique du troc fait des deux protagonistes à la fois des acheteurs et des vendeurs : cela suppose donc que la marchandise de l'un intéresse l'autre et réciproquement. On voit tout de suite les limitations que cela impose, et donc on conçoit très bien comment dans des grandes civilisations a émergé l'idée d'avoir un médium concret représentant matériellement le prix des marchandises qu'on appelle la monnaie : le vendeur accepte en échange de sa marchandise ou de son bien de la monnaie, qui lui permettra à son tour d'être acheteur de la marchandise ou du bien désiré. L'intérêt de la monnaie est qu'elle peut être échangée contre n'importe quel bien. Quelle forme concrète va prendre cette monnaie ? Différents objets ont été utilisés (coquillages, minéraux, fèves de cacao,…) mais ce sont les métaux qui vont s'imposer, la monnaie métallique : or, argent, bronze à Babylone, barres de cuivre dans la vallée de l'Indus, lingots de fer chez les Hittites, plaques de bronze à Mycènes et en Chine…



Lingot mycénien en cuivre

<u>Les trocs</u>

« Parce que c'est chose très nécessaire dans l'art mercantile de troquer une marchandise contre une autre… », ainsi commence le chapitre sur les trocs, montrant qu'en Catalogne ce type d'échange commercial était très usité, car il évitait l'utilisation de la monnaie.

Le troc simple, se présente de la façon suivante : deux marchands veulent échanger leurs marchandises respectives. L'un propose une certaine quantité de son produit (poivre, étoffe, safran, miel, sucre...) et annonce la valeur à laquelle il la vend, ou plutôt l'échange (prix au quintal, à la canne, etc.). Le deuxième marchand estime que le prix annoncé est trop élevé, car il estime sa valeur réelle à tant. Il ne va pas dire au premier marchand que son produit est trop cher, mais va surestimer son propre produit de façon à donner « à chacun justement son droit ». Et c'est en fonction de ce prix surestimé qu'il va calculer la quantité de son produit qu'il va troquer : « Celui du drap demande de combien il surévaluera chaque canne de drap, de façon que ni l'un ni l'autre ne soit trompé, et combien de drap il lui donnera pour le quintal de poivre, pour que les deux soient justement contents, et que ni l'un ni l'autre n'aient rien à rendre en deniers comptants ». Dans ce type d'exercice, aucun échange de monnaie n'a lieu, le calcul ne servant qu'à déterminer la quantité de marchandise que le second marchand va troquer en fonction de l'offre du premier marchand.

Commerce et mathématiques du Moyen Âge à la Renaissance, autour de la Méditerranée (CIHSO Toulouse 2001)

RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à ***ma nouvelle adresse*** *:* frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

99-1 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :
Soit un segment [AB]. Une droite d est perpendiculaire en H à la droite (AB), le point H étant en dehors du segment [AB]. Soit M un point variable de d situé dans P, l'un des deux demi-plans limités par (AB). Où le point M doit-il se situer pour que l'angle $\widehat{AMB}$ soit maximum ?

99-2 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Soit a, m, n des entiers tels que $a > 1$ et $m, n > 0$. Déterminer le PGCD de $a^n + 1$ et $a^m - 1$.

99-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Soit a, b, c, d quatre nombres positifs. Montrer que :
$$\sqrt{a+b+c+d}+\sqrt{b+c+d}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d}\geq\sqrt{a+4b+9c+16d}$$

99-4 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Soit ABC un triangle acutangle, construire un triangle A'B'C' avec A' sur [AB], B' sur [BC], C' sur [AC] tel que les droites (A'B'), (B'C') et (A'C') soient respectivement orthogonales aux droites (AB), (BC) et (AC). Que dire du triangle A'B'C' ?

Des solutions

96-3 *de Jean-Christophe Laugier* :

Montrer que quels que soient les entiers naturels m et n, avec m impair, $2^m - 1$ et $2^n + 1$ sont premiers entre eux.

Solution de l'auteur :
Claude Morin en a donné une élégante solution dans le Corol'aire n° 98 : démonstration par l'absurde qui fait appel à la notion d'ordre d'un élément modulo un nombre premier p. Voici une démonstration plus élémentaire, par récurrence sur l'entier impair m. On notera dans la suite (x, y) le PGCD des entiers naturels x et y. L'énoncé est évidemment vrai pour $m = 1$. Supposons-le établi pour tous les entiers m' impairs tels que $m' < m$, m étant un entier impair supérieur à 1.
Posons $n = mq + r$ avec $0 \leq r < m$.
Si q = 0, $2^n + 1 = 2^r + 1$ et $(2^n + 1, 2^m - 1) = (2^r + 1, 2^m - 1)$.
Si $q > 0$, il vient $2^n + 1 = 2^r(2^{mq} - 1) + 2^r + 1$.
$2^{mq} - 1$ étant divisible par $2^m - 1$ on a donc encore $(2^n + 1, 2^m - 1) = (2^r + 1, 2^m - 1)$.
Si $r = 0$, alors $(2^n + 1, 2^m - 1) = (2, 2^m - 1) = 1$. Si $r > 0$, on peut écrire $2^m - 1 = 2^{m-r}(2^r + 1) - (2^{m-r} + 1)$.
D'où $(2^n + 1, 2^m - 1) = (2^r + 1, 2^{m-r} + 1)$. Dans le cas où $2r < m$, $2^{m-r} + 1 = 2^{m-2r}(2^r + 1) - (2^{m-2r} - 1)$ et dans le cas où $2r > m$, $2^r + 1 = 2^{2r-m}(2^{m-r} + 1) - (2^{2r-m} - 1)$.
Finalement, sans distinguer les deux cas, on peut écrire $(2^n + 1, 2^m - 1) = (2^r + 1, 2^{|m-2r|} - 1)$.
Puisque $|m - 2r| < m$, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $(2^n + 1, 2^m - 1) = (2^r + 1, 2^{|m-2r|} - 1) = 1$.

97-1 *de Jacques Chayé* :

Soient C_1 et C_2 deux cercles, de centres respectifs O_1 et O_2, tangents extérieurement en O. Un point M_1 décrit C_1 et soit M_2 sur C_2 tel que $(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2})=\frac{\pi}{2}\text{rad}$

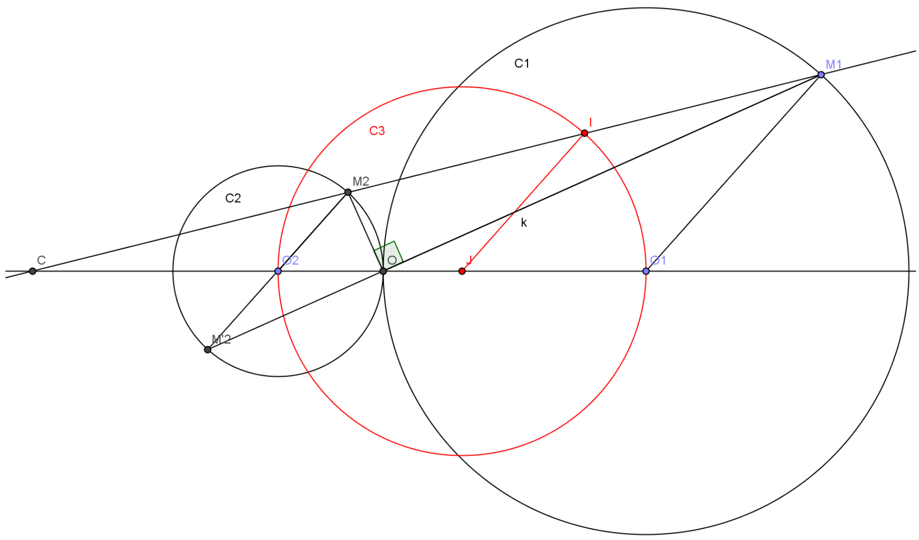
1) Démontrer que la droite (M_1M_2) passe par un point fixe.
2) Quel est le lieu du milieu I de [M_1,M_2] ?

Solution de Louis-Marie Bonneval :

Appelons r_1 et r_2 les rayons, supposés distincts (et non nuls), des deux cercles. Il y a deux homothéties h et h' qui transforment C_1 en C_2 :

- h a pour rapport $\frac{r_2}{r_1}$ et pour centre le point C tel que $\overrightarrow{CO_2} = \frac{r_2}{r_1}\overrightarrow{CO_1}$.
- h' a pour rapport $-\frac{r_2}{r_1}$ et pour centre O ;

On peut remarquer que C est le conjugué harmonique de O par rapport à O_1 et O_2.
L'image de M_1 par h' est le point M'_2 intersection de (OM_1) avec C_2. Il vérifie $\overrightarrow{O_2M'_2} = -\frac{r_2}{r_1}\overrightarrow{O_1M_1}$.
L'angle $\widehat{M_2OM'_2}$ étant droit, M_2 est diamétralement opposé à M'_2 sur C_2, donc $\overrightarrow{O_2M_2} = \frac{r_2}{r_1}\overrightarrow{O_1M_1}$.
M_2 est donc l'image de M_1 par h. Il en résulte que la droite (M_1M_2) passe par C.
Appelons J le milieu de [O_1O_2] : (JI) est parallèle à (O_1M_1) et (O_2M_2). L'homothétie de centre C qui transforme O_1 en J transforme donc M_1 en I. Quand M_1 décrit C_1, I décrit donc le cercle C_3 transformé de C_1 par cette homothétie.
Remarque : si $r_1 = r_2$, M_2 est l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$, donc la droite (M_1M_2) reste parallèle à (O_1O_2). Le lieu de I est alors le cercle image de C_1 par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{O_1O_2}$.



Solution de Claude Morin :

Notons A_1 et A_2 les autres points d'intersection des cercles avec la droite (O_1O_2) et supposons que les rayons des deux cercles vérifient $R_1 > R_2$: cela entraine que la droite (M_1M_2) coupe la droite (O_1O_2) en un point P. De l'égalité des angles $(\overrightarrow{A_2O},\overrightarrow{A_2M_2})$ et $(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OM_1})$ on déduit (A_2M_2) ∥ (OM_1) et (A_1M_1)∥(OM_2) d'où $PA_2/PO = PM_2/PM_1 = PO/PA_1 = (PO + 2R_1)(PO - 2R_2)$ d'où $PO = \frac{2R_1R_2}{R_1 - R_2}$. Le point P est fixe. Remarque : dans le cas où $R_1 = R_2$ la droite (M_1M_2) reste parallèle à la droite (O_1O_2).
Si I est le milieu de [M_1M_2] on a (IO_1)∥(OM_2) et (IO_2)∥(OM_1) donc (IO_1) est perpendiculaire à (IO_2) : le point I appartient au cercle de diamètre [O_1O_2].

Solution de Louis Rivoallan :

Soit C_1 le petit cercle de rayon R_1 et de centre O_1 et C_2 le plus grand de rayon R_2 et de centre O_2. Soit A le point diamétralement opposé à O dans le cercle C_1 et B le point diamétralement opposé à O dans C_2. Les triangles AM_1O et OM_2B sont rectangles respectivement en M_1 et M_2 puisqu'ils sont inscrits dans des demi-cercles. L'angle $\widehat{M_1OM_2}$ est droit par hypothèse et par suite les droites (M_1A) et (M_2O) d'une part et (M_1O) et (M_2B) d'autre part sont parallèles. Les triangles AM_1O et OM_2B ont donc leurs trois côtés parallèles et par conséquent, ils sont homothétiques. Soit h cette homothétie qui transforme A en O et O en B. Elle transforme donc C_1 en C_2. Son rapport est donc $k=\frac{R_2}{R_1}$ et son centre I est le point défini par $\overrightarrow{AI}=(1-k)\overrightarrow{AO}$ (c'est le point d'intersection des tangentes communes à C_1 et C_2). Or $\overrightarrow{IM_2}=k\overrightarrow{IM_1}$, donc la droite (M_1M_2) passe par le point fixe I. Soit N le milieu de $[M_1M_2]$.

$$\overrightarrow{IN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{IM_1}+\overrightarrow{IM_2})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{IM_1}+k\overrightarrow{IM_1})=\frac{(1+k)}{2}\overrightarrow{IM_1}.$$

Cette relation montre que N est l'image de M_1 dans l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1+k}{2}$. Puisque M_1 décrit le cercle C_1, N décrit l'image de ce cercle par cette dernière homothétie. L'examen des cas particuliers $M_1 = A$ puis $M_1 = O$ permet de voir que le cercle décrit par N a pour diamètre $[O_1O_2]$.

97-2 *Concours France-Chine 2014* :

Soient deux entiers naturels a et b qui vérifient l'égalité $9a + 9b = 2ab - 19$. Déterminer toutes les possibilités pour a et b.

Solution de Louis Rivoallan :

Tout d'abord, on peut remarquer la symétrie entre a et b donc si $(a_0 ; b_0)$ est une solution, alors $(b_0 ; a_0)$ est aussi une solution à l'équation $9a + 9b = 2ab - 19$. Examinons d'abord le cas $a \geq 11$ et $b \geq 11$.
Alors $2ab - 19 = ab + ab - 19 > 10a + 10b - 19 > 9a + 9b + 10 + 10 - 19 = 9a + 9b + 1 > 9a + 9b$.
Ce qui montre qu'il n'y a pas de solution à l'équation $9a + 9b = 2ab - 19$ avec $a \geq 11$ et $b \geq 11$.
Pour $a \leq 10$, on teste les 10 cas, et on trouve 2 solutions $(a ; b) = (5 ; 64)$ et $(a ; b) = (8 ; 13)$, et bien sûr pour $b \leq 10$ on va trouver comme solution $(a ; b) = (64 ; 5)$ et $(13 ; 8)$.
Tous les cas ont donc été examinés, et par conséquent, toutes les solutions ont été trouvées.

Solution de Claude Morin :

En multipliant par 2 l'équation $(2a - 9)(2b - 9) = 119$ qui se factorise en $1\times119 = 7\times17$.
En imposant $a < b$ il y a deux cas :
$2a - 9 = 1$ et $2b - 9 = 119$ qui donne $a = 5$ et $b = 64$ et $2a - 9 = 7$ et $2b - 9 = 17$ qui donne $a = 8$ et $b = 13$.

Solution de Louis-Marie Bonneval :

En rebaptisant x et y les inconnues, on reconnaît dans $9x + 9y = 2xy - 19$ l'équation d'une hyperbole. On en cherche les points à coordonnées entières positives. Isolons y : l'équation s'écrit $y=\frac{9x+19}{2x-9}$. Le dénominateur n'est pas nul puisque x est entier. Mettons sous forme canonique cette fonction homographique : $y=\frac{119}{2(2x-9)}+\frac{9}{2}$.
L'équation équivaut donc à $2y-9=\frac{119}{2x-9}$, c'est-à-dire $(2x - 9)(2y - 9) = 119$. Comme $119 = 7\times17$, il y a huit possibilités (qu'on pourrait ramener à quatre en remarquant que x et y jouent des rôles symétriques) :

$$\begin{cases}2x-9=1\\2y-9=119\end{cases};\begin{cases}2x-9=7\\2y-9=17\end{cases};\begin{cases}2x-9=17\\2y-9=7\end{cases};\begin{cases}2x-9=119\\2y-9=1\end{cases};\begin{cases}2x-9=-1\\2y-9=-119\end{cases};\begin{cases}2x-9=-7\\2y-9=-17\end{cases};$$

$$\begin{cases}2x-9=-17\\2y-9=-7\end{cases};\begin{cases}2x-9=-119\\2y-9=-1\end{cases}.$$

Les quatre premiers systèmes fournissent les couples (5,64) ; (8,13) ; (13,8) ; (64,5). Les quatre derniers systèmes fourniraient (4,-55) ; (1,-4) ; (-4,1) ; (-55,4), à exclure puisqu'on cherche des couples d'entiers naturels.

97-5 *de Frédéric de Ligt* :
Trouver un équivalent en français du carré SATOR.

Solution de Georges Borion :
En complément des solutions données dans le Corol'aire n°98 en voici une autre :

S	E	N	E	S
E	P	A	T	E
N	A	N	A	N
E	T	A	P	E
S	E	N	E	S

98-3 *de Louis Rivoallan* :
Les $2n + 1$ points, notés A_1, …, A_{2n+1}, sont situés sur un même demi-cercle de centre O et de rayon 1. Soit B le point défini par $\overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^{i=2n+1} \overrightarrow{OA_i}$. Montrer que OB ≥ 1.

Solution de l'auteur :
Sans nuire à la généralité, on peut supposer que les points A_i sont placés dans l'ordre sur le demi-cercle. Soit B défini par $\overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^{i=2n+1} \overrightarrow{OA_i}$. Pour tout i allant de 1 à n, on définit le point M_i par $\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_{2n+1-i}}$. Alors $\overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^{i=2n+1} \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{OA_{n+1}}$. Puisque pour tout i ; $OA_i = 1$, alors le quadrilatère $OA_iM_iA_{2n+1-i}$ est un losange, et de ce fait les angles $(\overrightarrow{OA_i} ; \overrightarrow{OM_i})$ et $(\overrightarrow{OM_i} ; \overrightarrow{OA_{2n+1-i}})$ sont égaux et inférieurs à $\frac{\pi}{2}$. Par suite l'angle $(\overrightarrow{OM_i} ; \overrightarrow{OA_{n+1}})$est aigu. De même les angles $(\overrightarrow{OM_i} ; \overrightarrow{OM_j})$ sont aigus.
$OB^2 = \overrightarrow{OB}^2 = (\sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{OA_{n+1}})^2 = \overrightarrow{OA_{n+1}}^2 + 2\sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{OM_i} \times \overrightarrow{OA_{n+1}} + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \overrightarrow{OM_i} \times \overrightarrow{OM_j}$. Or, pour tout i et j les différents produits scalaires sont positifs puisque les angles sont aigus. Par suite $OB^2 \geq OA_{n+1}^2 = 1$ et le point B est donc à l'extérieur du demi-cercle.

98-4 *de Louis Rivoallan* :
La population d'un village se réunit un jour de fête. Chaque personne serre la main d'un certain nombre d'autres personnes (0 ou 1 ou 2 ou …).
Le nombre de personnes ayant serré la main d'un nombre impair de personnes est pair. Pourquoi ?

Solution de Louis-Marie Bonneval :
Répartissons les personnes en deux catégories : celles qui ont donné un nombre pair de poignées de main, celles qui ont donné un nombre impair de poignées de main. Si on additionne les nombres de poignées de main données par chaque personne du village, on obtient le double du nombre de poignées de main échangées, puisque chacune est comptée deux fois. Ce total est donc un nombre pair. Si on additionne les nombres de poignées de main données par chaque personne de la première catégorie, on obtient un nombre pair puisque c'est une somme de nombres pairs. Donc par différence, la somme des nombres de poignées de main données par chaque personne de la deuxième catégorie est aussi un nombre pair. Si l'effectif de cette deuxième catégorie était impair, cette somme d'un nombre impair de termes impairs serait un nombre impair. Donc l'effectif de la deuxième catégorie est pair ;
Remarque : C'est un résultat classique de la théorie des graphes. Dans tout graphe, le nombre de sommets d'ordre impair est pair.

Solution de Philippe Rogeon :
Numérotons les habitants du village 1, 2, …, N, et définissons p_k comme le nombre de mains serrées par l'habitant k. La quantité $\sum_{k=1}^{N} p_k$est paire, puisque chaque poignée de main est comptée deux fois. On a alors $\sum_{p_k est\ pair} p_k + \sum_{p_k est\ impair} p_k = 2m$ avec m entier, et donc $S_{imp} = \sum_{p_k est\ impair} p_k$ est également une quantité paire. Comme S_{imp} est une somme d'entiers impairs, ils sont nécessairement en nombre pair.