Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à ***ma nouvelle adresse*** : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

98-1 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Montrer que pour tout entier positif n on peut mettre $\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ sous la forme $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ où m est un entier positif.

98-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Quels sont les triangles qui peuvent être partagés en 3 triangles isocèles ?

98-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Les $2n + 1$ points, notés $A_1, \ldots, A_{2n+1}$, sont situés sur un même demi-cercle de centre O et de rayon 1. Soit B le point défini par $\overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^{i=2n+1} \overrightarrow{OA_i}$. Montrer que $\mathrm{OB} \geq 1$.

98-4 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

La population d'un village se réunit un jour de fête. Chaque personne serre la main d'un certain nombre d'autres personnes (0 ou 1 ou 2 ou …).
Le nombre de personnes ayant serré la main d'un nombre impair de personnes est pair. Pourquoi ?

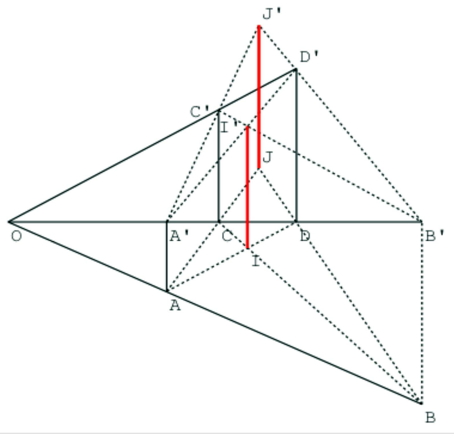
98-5 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

D'après « Premiers éléments de géométrie » par C. Vaquant et A. Macé de Lépinay, Masson, 1914, p. 113.
Démontrer que, dans un triangle, les droites qui joignent les pieds des hauteurs sont respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent les sommets au centre du cercle circonscrit au triangle.

Des solutions

96-2 *de Serge Parpay* : DESSIN 1 SP

Deux trapèzes : (ABB'A') de bases (AA'), (BB'), rectangle en A' et B' ; (CDD'C') de bases (CC'), (DD'), rectangle en C et D. (AB) et (C'D') se coupent en O. Les points A', C, D, B' sont, dans cet ordre, sur une demi-droite d'origine O, les trapèzes étant situés de part et d'autre de cette demi-droite (voir figure). (AD) et (BC) se coupent en I, (A'D') et (B'C') se coupent en I', (AC) et (BD) se coupent en J, (A'C') et (B'D') se coupent en J'. Montrer que (II') et (JJ') sont parallèles aux bases des trapèzes.



Solution de Serge Parpay

La figure peut être interprétée comme une figure de géométrie descriptive. (AA') définit un point a, (BB') définit un point b, (CC') définit un point c et (DD') définit un point d. (a, b) est un droite du plan horizontal, (c, d) est une droite du plan frontal. Ces deux droites se coupent en O. Le quadrilatère (a, b, c, d) est donc plan. (a, d) et (b, c) se coupent en i qui correspond au couple (I, I'). (a, c) et (b, d) se coupent en j qui correspond au couple (J, J'). (II') est perpendiculaire à la ligne de terre (OB'), de même que (JJ'), donc (II') et (JJ') sont parallèles et parallèles aux bases (AA'), (BB'), (CC') et (DD') des trapèzes (ABB'A') et (CDD'C').

Commentaire

« *Cet exercice est artificiel, trafiqué, presque malhonnête (!), en tout cas, au minimum, tricheur et déloyal. Le théorème de Thalès est bien loin ! Une chance (II') et (JJ') jouent des rôles relativement indépendants, et on les fait jouer ensemble ! Bon, il est dans Corol'aire, mille excuses… Il faut bien que vieillesse se passe !* ». (S. P.)

Rappel éventuel

Enseignée autrefois en classe de terminale (math-élem), la géométrie descriptive était utile pour mieux « comprendre » certaines propriétés géométriques. Le principe en est simple.
À la figure 1) correspond la figure 2) et réciproquement. Les plans (H) (horizontal) et (V) (vertical) se coupent en *xy* (la ligne de terre). Le plan (H) de la figure 1) est ramené dans la position (H) de la figure 2) par une rotation de 90° d'axe *xy*. Chaque point, par exemple A, est repéré par ses projections orthogonales, a et a', sur les plans (H) et (V). (aa'') et (a'a'') sont les lignes de rappel du point A. (aa'') et (a'a'') sont perpendiculaires sur la figure 1) dans l'espace et confondues sur la figure 2). Un point M de (AB) est parfaitement défini par le couple (m, m') dans la figure 1) comme dans la figure 2), m se trouvant sur (ab) projection horizontale de (AB) et m' se trouvant sur (a'b') projection verticale de (AB), dans la figure 2), (mm') est évidemment perpendiculaire à (*xy*).

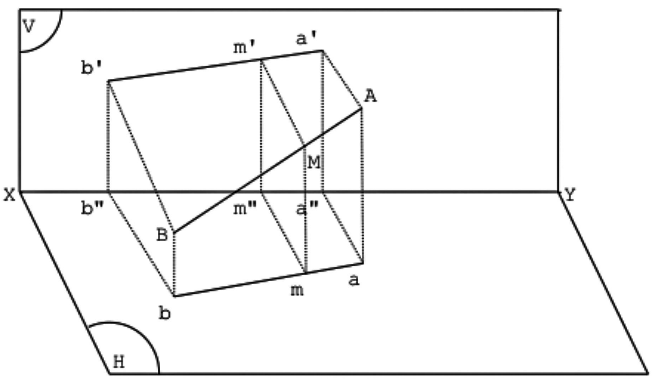


Figure 1)

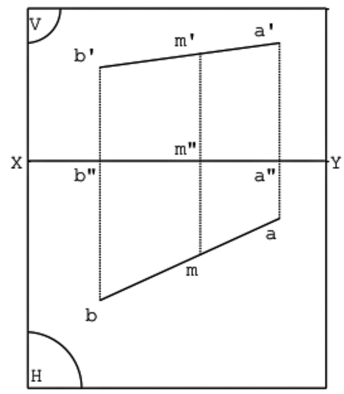
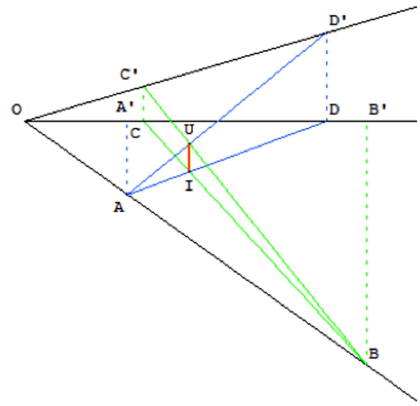
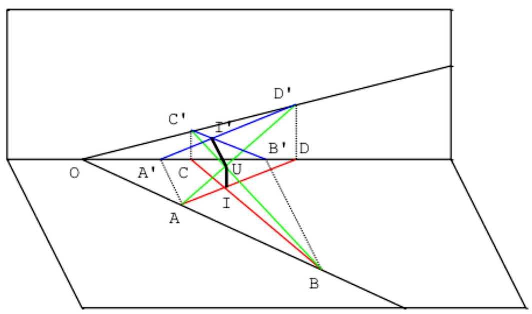


Figure 2)

Solution de Jacques Chayé

Extrayons de la figure les éléments ci-contre. Soit h_1 l'homothétie de centre A qui transforme D en I et D' en un point U. Soit h_2 l'homothétie de centre B qui transforme I en C ; elle transforme U en C', car $h_2 \circ h_1$ transforme [DD'] en [CC'] et D' en C'. Par conséquent, (IU) est parallèle aux bases des trapèzes.
On établit la même propriété pour (I'U), ce qui prouve l'alignement des trois points I, I' et U et le parallélisme de (II') avec les bases des trapèzes. Enfin, on démontrerait un résultat analogue pour (JJ').





Complément

La situation peut s'étendre à l'espace (cf figure ci-contre), si on suppose les trapèzes de l'énoncé situés, l'un dans un plan « horizontal », l'autre dans un plan « vertical ». Les plans (ADD') et (BCC') sont perpendiculaires au plan horizontal car ils contiennent chacune une droite perpendiculaire à ce plan. Leur intersection (UI) est donc elle aussi perpendiculaire à ce plan horizontal. De même (UI') serait perpendiculaire au plan vertical et par suite (II') serait orthogonale à (OC).

96-3 *de Jean-Christophe Laugier* :

Montrer que quels que soient les entiers naturels m et n, avec m impair, $2^m - 1$ et $2^n + 1$ sont premiers entre eux.

Solution de Claude Morin

Supposons qu'un nombre premier p (nécessairement impair) divise $2^m - 1$ et $2^n + 1$. De $2^m \equiv 1$ modulo p on déduit que l'ordre de 2 modulo p divise m donc est un entier impair. De $2^n \equiv -1$ modulo p on déduit $2^{2n} \equiv 1$ donc l'ordre de 2 modulo p divise $2n$ donc divise n (puisqu'il est impair).
On a donc $2^n \equiv 1$ modulo p ce qui contredit $2^n \equiv -1$ modulo p. Par conséquent $2^m - 1$ et $2^n + 1$ sont premiers entre eux.

96-5 *de Louis Rivoallan* :

Pour i allant de 1 à n, on considère les nombres positifs a_i. Montrer que : $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=i}^{n} a_j} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2 a_i}$.

Solution de Claude Morin

Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire en introduisant les vecteurs $X_k = (0,\ldots,0,\sqrt{a_k},\ldots,\sqrt{a_n})$.

De $\|X_1 + \ldots + X_n\| \leq \|X_1\| + \ldots + \|X_n\|$ on déduit $\sqrt{a_1 + 2^2 a_2 + \ldots + n^2 a_n} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k + \ldots + a_n}$.

97-3 *de Louis Rivoallan* :
Quel est le plus petit nombre de 2014 chiffres dont la somme des chiffres est 2014 ?

Solution de Jean Fromentin

Notre numération de position impose que le nombre commence par le plus petit chiffre non nul, donc 1, et que celui-ci soit suivi par un nombre maximum de zéros. Il faut donc que le nombre de chiffres non nuls à partir de celui des unités soit le plus petit possible et qu'il y ait donc un nombre maximum de 9.
2013 = 223 × 9 + 6, et 2013 – 224 = 1789 (c'est la Révolution !). Le nombre cherché est donc composé d'un 1 suivi de 1789 zéros, du chiffre 6 et de 223 chiffres 9.

Solution de Louis-Marie Bonneval

Appelons E l'ensemble des nombres naturels qui s'écrivent avec 2014 chiffres de somme 2014.
Le nombre dont l'écriture comporte 2014 fois le chiffre 1 appartient à E.
Gardons le chiffre 1 le plus à gauche, qui est nécessairement le premier chiffre du nombre cherché. Remplaçons les huit chiffres 1 suivants par des 0, et pour garder inchangée la somme des chiffres remplaçons le 1 des unités par un 9 : le nombre obtenu est (nettement) plus petit que le précédent, tout en étant dans E.
Recommençons : remplaçons les huit chiffres 1 suivants par des 0, et remplaçons le chiffre 1 des dizaines par un 9 : le nombre obtenu est plus petit que le précédent, tout en étant dans E.
On peut itérer cette opération n fois, à condition que 9n reste inférieur à 2013. En effet à chaque opération on modifie 9 chiffres (huit à gauche et un à droite). Donc n ne peut dépasser 223.
Après 223 itérations, on a traité 223 × 9 = 2007 chiffres, dont 223 × 8 = 1784 à gauche (après le premier 1) et 223 à droite. Il reste donc 6 chiffres à traiter : on remplace les cinq premiers par des 0 et le dernier par un 6.
Le nombre obtenu s'écrit donc : 1, suivi de 1789 fois le chiffre 0, suivi d'un 6, puis de 223 fois le chiffre 9.
C'est clairement le plus petit élément de E, car pour en trouver un plus petit il faudrait diminuer un chiffre à gauche et en augmenter un à droite, ce qui n'est plus possible.

C'est donc le nombre $10^{2013}+6\times10^{223}+10^{223}-1$ soit $10^{2013}+7\times10^{223}-1$.

Remarque : une méthode analogue permettrait de trouver le plus grand élément de E. Il est constitué de 223 fois le chiffre 9, suivi du chiffre 7, puis de 1790 fois le chiffre 0. Autrement dit, c'est le nombre $\left(10\left(10^{223}-1\right)+7\right)\times10^{1790}$, soit $10^{2014}-3\times10^{1790}$.

Variations de Claude Morin

Puisque 2014 = 9 × 223 + 7 le plus petit nombre dont la somme des chiffres est égale à 2014 est N = 7999…999 avec 223 fois le chiffre 9.
Quel est le plus petit nombre qui est divisible par 2014 et dont la somme des chiffres est 2014 ?

Le nombre devant être pair, on essaie $9...989...98=10^{224}-10^{k}-2$ qui doit être divisible par 2014. Maple donne une unique valeur de k inférieure à 224, k = 115 d'où N' = 9…989…98 avec 108 fois le chiffre 9 à gauche du premier 8 et 114 fois le chiffre 9 entre les deux 8.

97-5 *de Frédéric de Ligt* :

À chercher à l'ombre du parasol
Le carré SATOR est un carré magique contenant le palindrome latin SATOR AREPO TENET OPERA ROTAS. Le carré figure dans plusieurs inscriptions latines, la plus ancienne connue qui a été trouvée à Pompéi ne pouvant être postérieure à l'an 79. Les lettres de la phrase sont inscrites dans un carré de 5 cases sur 5 de telle façon qu'elle puisse être lue de haut en bas, de bas en haut, de gauche à droite et de droite à gauche. Wikipedia.
Sauriez-vous trouver un carré semblable en français, c'est-à-dire de dimensions 5x5 et constitué de cinq mots (ne formant pas nécessairement une phrase) qui peuvent être lus toujours dans le même ordre de haut en bas et de gauche à droite (en commençant par le coin supérieur gauche), de bas en haut et de droite à gauche (en commençant par le coin inférieur droit) ?
Les mots autorisés sont ceux que l'on peut utiliser au scrabble, donc pas de nom propre, contrairement au carré SATOR (AREPO est sans doute un nom propre).

Solutions identiques de Claude Morin et de Louis-Marie Bonneval

Une solution formée avec deux palindromes :

E T E T E
T A T A T
E T E T E
T A T A T
E T E T E

Solution de l'auteur

Deux solutions formées chacune de cinq mots différents (4 mots anacycliques et un mot palindrome) trouvées parmi les 75 mots anacycliques et les 18 mots palindromes acceptés au jeu de scrabble.

E T R E S   A S S E C
T R A C E   S E I M E
R A D A R   S I D I S
E C A R T   E M I E S
S E R T E   C E S S A