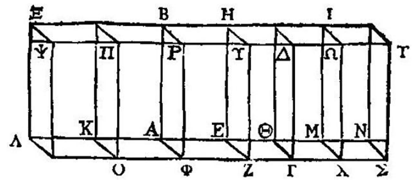
Histoire de volume

Jean-Paul Guichard & Jean-Paul Mercier

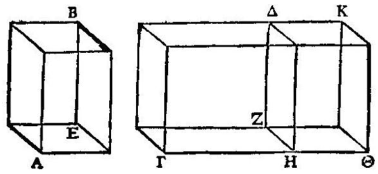
Épisode 4 - La stéréométrie grecque

C'est dans les trois derniers livres des *Éléments* qu'Euclide traite des solides. Le livre XIII est consacré à la construction des polyèdres réguliers et le livre XII concerne le volume des prismes, pyramides, cônes, cylindres et sphères. Quant au livre XI, après des considérations générales sur les relations entre les éléments des solides, ce que nous appellerions les éléments de géométrie dans l'espace, il est consacré à l'étude du volume du parallélépipède quelconque (propositions 24 à 39).

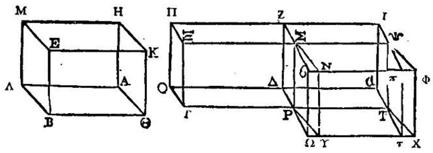
La proposition 25 étudie le rapport des volumes des deux parallélépipèdes obtenus par découpage d'un parallélépipède par un plan parallèle à deux faces parallèles : c'est la comparaison relative des volumes dans le cas du parallélépipède.

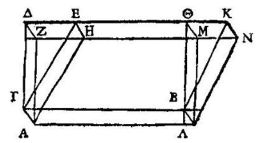

Proposition 25

Le cas général fera l'objet de la proposition 32 : « *Les solides parallélépipédiques qui sont sous la même hauteur sont l'un relativement à l'autre comme leurs bases* ». Bien sûr, quand Euclide compare le rapport des solides à celui de leurs bases, cela veut dire rapport des volumes et rapport des aires.

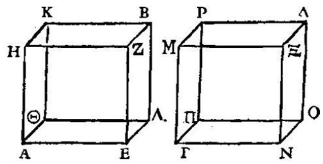

Proposition 32

La proposition 31, préparée par l'étude de cas particuliers dans les deux propositions précédentes, donne l'égalité des volumes de deux parallélépipèdes de même hauteur : « *Les solides parallélépipédiques qui sont sur des bases égales et sous la même hauteur sont égaux l'un à l'autre* ». C'est donc pour deux parallélépipèdes dont les bases ont la même aire que les volumes sont égaux. Euclide qui a étudié l'égalité des aires des parallélogrammes au Livre I (proposition 36), obtient l'égalité des volumes des parallélépipèdes en y rajoutant une dimension : la hauteur.

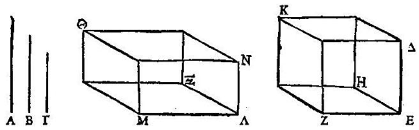

Proposition 31


Proposition 29

La proposition 34 est, dans le langage des proportions, et pour un pavé quelconque, la justification de notre formule : Volume du pavé = Base × Hauteur.
« *Les bases des solides parallélépipédiques égaux sont inversement proportionnelles aux hauteurs ; et parmi les solides parallélépipédiques, ceux dont les bases sont inversement proportionnelles aux hauteurs, ceux-là sont égaux* ».

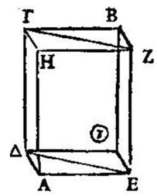

Proposition 34

La proposition 36 donne la construction d'un cube de même volume que celui d'un parallélépipède. Tout solide dont le volume est ramené à celui d'un parallélépipède, peut être « cubé » : la cubature est pour les volumes l'équivalent de la quadrature pour les aires.


Proposition 36

La proposition 28 qui compare les volumes des deux solides obtenus en coupant un parallélépipède par un plan diagonal établit de fait le lien entre le volume du prisme à base triangulaire et celui du parallélépipède.

Quant aux autres propositions, elles sont essentiellement consacrées aux parallélépipèdes semblables : constructions, volumes dans le rapport du cube du rapport de leurs côtés (proposition 33).


Proposition 28

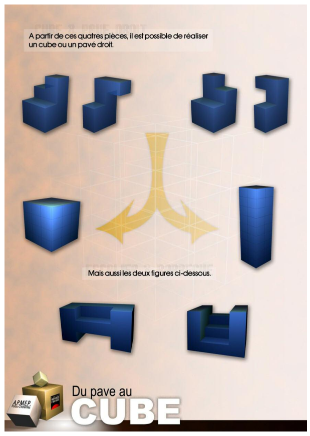
Notons que les trois propositions fondamentales 32, 33 et 34 auront leurs équivalentes au livre XII pour les pyramides, puis pour les cônes et cylindres.

Le parallélépipède est la figure clé du livre X1 des *Éléments*, et pour la classe de 6ème, c'est un cas particulier qui nous intéresse : le parallélépipède rectangle ou pavé droit, que nous abrègerons souvent en pavé.

Pour les volumes, comme pour les aires, il est à remarquer qu'il n'y a aucune formule dans les *Éléments* d'Euclide. On compare uniquement des volumes, les uns par rapport aux autres par un travail géométrique sur les solides eux-mêmes : égalité des volumes des parallélépipèdes de même base et de même hauteur, proportionnalité des volumes des parallélépipèdes de même hauteur avec leurs bases, volume de la pyramide égal au tiers du volume du prisme de même base et même hauteur… Pour cela on ramène le volume d'un solide à celui d'un autre solide connu : volume du prisme à celui du parallélépipède, volume de la pyramide à celui du prisme, volume du cône à celui de la pyramide... Le problème de la comparaison des volumes des solides, sans aucune mesure, parcourt donc les livres de stéréométrie des *Éléments* d'Euclide, mais aussi tout le travail d'Archimède sur la sphère et le cylindre.

Si nous voulons trouver des formules, il faut nous tourner vers des mathématiciens plus engagés dans les applications. Ainsi dans les *Métriques* de Héron, ingénieur et mathématicien d'Alexandrie, la formule *Volume du pavé* = *Base* × *Hauteur* est donnée comme une procédure qui est justifiée en décomposant chacune des dimensions du pavé en unités de longueur et en observant que le nombre de cubes élémentaires contenus dans le pavé est le produit des nombres exprimant les mesures des côtés du pavé. C'est une bonne voie à suivre avec les élèves de sixième.

Toujours trois expositions itinérantes disponibles



Expocube

Beaucoup de matériel à manipuler et une douzaine de panneaux explicatifs sur le thème du cube (plutôt niveau collège).

Comment tu comptes ?

Vingt-deux panneaux et un peu de matériel qui retracent la longue histoire du calcul depuis l'antiquité jusqu'à nos jours (niveau collège et lycée).

Courbes : les maths en pleine forme

Vingt-trois panneaux pour tout savoir sur l'utilisation des courbes dans la vie des hommes (plutôt niveau lycée).

Pour réserver l'une de ces expositions réalisées par la Régionale en partenariat avec l'Espace Mendès France de Poitiers, contactez Frédéric de Ligt à l'adresse :
frederic.deligt2@gmail.com
Vous pouvez consulter notre site : apmep.poitiers.free.fr pour connaître le contenu détaillé de ces expositions.
Tarif de location : 90 € la semaine.

COROL'AIRE est envoyé par courrier électronique aux adhérents et abonnés.

Ceux qui veulent recevoir une version papier (sans la couleur !) peuvent envoyer un chèque de 8 € (abonnement pour un an) à l'ordre de APMEP Poitou-Charentes, à

Jacques CHAYÉ
5 rue Émile Faguet
86000 POITIERS