RU-BRI-COLLAGES

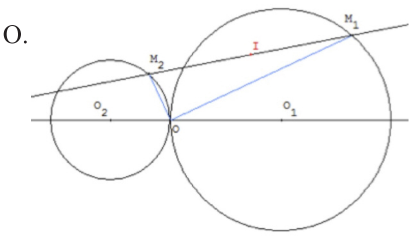
Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.
Frédéric De Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt@gmail.com

Des problèmes

97-1 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

Soient C_1 et C_2 deux cercles, de centres respectifs O_1 et O_2, tangents extérieurement en O.



Un point M_1 décrit C_1 et soit M_2 sur C_2 tel que $(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}) = \frac{\pi}{2}\text{rad}$.

1) Démontrer que la droite (M_1M_2) passe par un point fixe.

2) Quel est le lieu du milieu I de $[M_1,M_2]$?

97-2 *Concours France-Chine 2014* :

Soient deux entiers naturels a et b qui vérifient l'égalité $9a + 9b = 2ab - 19$.
Déterminer toutes les possibilités pour a et b.

97-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

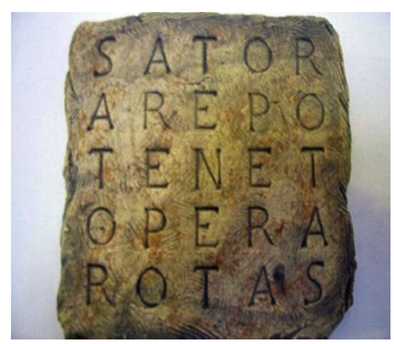
Quel est le plus petit nombre de 2014 chiffres dont la somme des chiffres est 2014 ?

97-4 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

Un chemin de longueur n à pas unités horizontaux ou verticaux dans le réseau $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ joignant A(a, b) à B(c, d) est une suite de points M_0, M_1, …, M_n telle que $M_0 = A$, $M_n = B$ et pour tout $i \in \{0,1,...,n-1\}$, $\overrightarrow{M_iM_{i+1}} = \vec{D}$, $\vec{D}$ étant égal à l'un des vecteurs (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0). Déterminer le nombre de chemins de longueur n joignant l'origine (0, 0) au point A(a, b).

97-5 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

À chercher à l'ombre du parasol



Le carré SATOR est un carré magique contenant le palindrome latin SATOR AREPO TENET OPERA ROTAS. Le carré figure dans plusieurs inscriptions latines, la plus ancienne connue qui a été trouvée à Pompéi ne pouvant être postérieure à l'an 79.
Les lettres de la phrase sont inscrites dans un carré de 5 cases sur 5 de telle façon qu'elle puisse être lue de haut en bas, de bas en haut, de gauche à droite et de droite à gauche.
(Wikipedia)

Sauriez-vous trouver un carré semblable en français, c'est-à-dire de dimensions 5 x 5 et constitué de cinq mots (ne formant pas nécessairement une phrase) qui peuvent être lus toujours dans le même ordre de haut en bas et de gauche à droite (en commençant par le coin supérieur gauche), de bas en haut et de droite à gauche (en commençant par le coin inférieur droit) ?

Les mots autorisés sont ceux que l'on peut utiliser au scrabble, donc pas de nom propre, contrairement au carré SATOR (AREPO est sans doute un nom propre).

Des solutions

94-1 *de Serge Parpay* :

Classique sans doute, mais … on peut toujours s'amuser à le (re)chercher. Une consigne : Internet interdit. Un nombre entier positif peut s'écrire comme somme de 1 ou de 2 (ou inclusif) ; par exemple 3 peut s'écrire de trois façons différentes :
$3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$.

1) Combien de façons pour 1, 2, 3, 4, 5 ?

2) Plus généralement combien de façons pour un nombre entier naturel n quelconque ?

Solution de Louis Rivoallan :

Soit u_n le nombre de décompositions de n en 1 et 2. On a $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$; $u_4 = 5$; $u_5 = 8$. Tiens cela me rappelle quelque chose… Considérons une décomposition quelconque de $n + 2$. Elle se termine par un 1 ou par un 2. Si elle se termine par un 1, alors la somme qui précède est une décomposition quelconque de $(n+1)$ et si elle se termine par un 2, alors la somme qui précède est une décomposition quelconque de n. par conséquent, on a donc $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Les u_n forment donc une suite de Fibonacci.

95-3 *de Louis Rivoallan* :

On écrit une suite de n nombres entiers naturels composée uniquement de 0 et de 1. La règle de simplification est la suivante : si on enlève un 0 et un 1, on les remplace par un 0 et si on enlève deux 0 ou deux 1, on les remplace par un 1. Montrer que le résultat ne dépend pas de la façon dont on procède.

Solution de l'auteur :

À chaque opération on perd un seul nombre 0 ou 1 de la suite et donc le processus ne sera effectué que n - 1 fois. La parité du nombre de 0 reste la même. S'il y a donc un nombre pair de 0 au départ le résultat est 1. Sinon c'est 0.

95-4 *de Louis Rivoallan* :

Montrer que pour tout entier $n > 2$, l'équation $1 = x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1}$ admet toujours une solution en nombres entiers positifs, tous différents.

Solution de Frédéric de Ligt :

Voici une preuve par récurrence.
Pour $n = 3$ on a la solution 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1

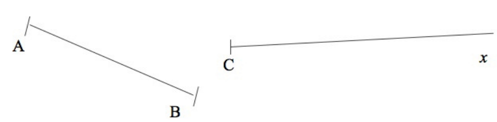
Soit $n > 2$, supposons que les entiers positifs $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ vérifient l'égalité $1 = x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1}$.

On a de façon générale pour les entiers positifs et en particulier pour l'entier x_n : $\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x_n + 1} + \dfrac{1}{x_n(x_n+1)}$.

On pose donc $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$, …, $x'_{n-1} = x_{n-1}$, $x'_n = x_n + 1$, $x'_{n+1} = x_n(x_n + 1)$.

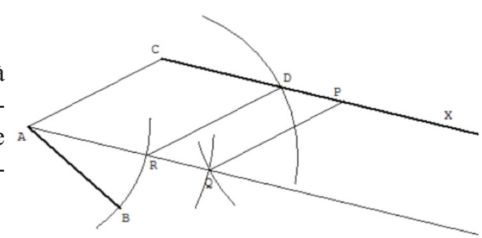
Les entiers positifs $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_{n+1}$ vérifient bien l'égalité $1 = x'^{-1}_1 + x'^{-1}_2 + \ldots + x'^{-1}_{n+1}$.

96-1 *de Serge Parpay* :



Un méchant professeur a tracé un segment [AB] et une demi-droite [Cx) sur une feuille de papier. Il me demande de situer le point D de la demi-droite tel que CD = AB. J'ai une règle non graduée et un compas, mais il m'interdit d'utiliser mon compas pour reporter simplement la longueur AB sur la demi-droite.
Au secours !

Solution de Jacques Chayé :



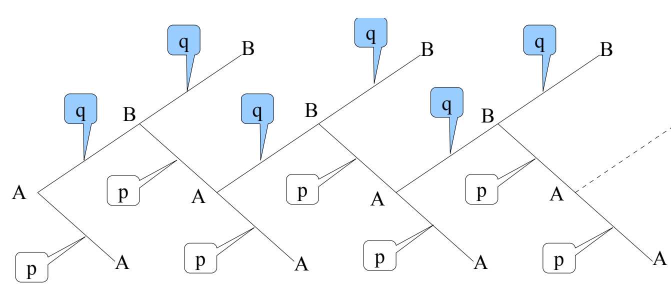
Soit P un point de la demi-droite [Cx). À l'aide d'une ouverture de compas égale à CP, reportée à partir de A et d'une autre égale à CA, reportée à partir de P, on complète le parallélogramme PCAQ. Sur la demi-droite [AQ), une troisième ouverture de compas, égale à AB, permet, à partir de A, d'obtenir le point R. Enfin, une quatrième ouverture de compas, égale à AC, donne, à partir de R, le point D cherché.

96-4 *de Jean-Christophe Laugier* :

Deux joueurs A et B s'affrontent à un jeu. À chaque partie, le joueur A gagne avec la probabilité p tandis que le joueur B gagne avec la probabilité q = 1 – p. Est déclaré vainqueur le premier qui gagne deux parties consécutives. Le jeu est défavorable au joueur A car p < q mais celui-ci vient de gagner la première partie et ses chances d'être vainqueur sont maintenant égales à celles du joueur B. Quelle est donc la valeur de p ?

Solution de Frédéric de Ligt :

On dresse l'arbre pondéré des issues possibles :



La probabilité pour A de gagner est alors donnée par la somme infinie :

$$\begin{aligned} S &= p + qp^2 + qpqp^2 + qpqpqp^2 + \ldots \\ &= p + qp^2 + q^2p^3 + q^3p^4 + \ldots \\ &= (qp + (qp)^2 + (qp)^3 + (qp)^4 + \ldots)/q \\ &= p/(1 - qp) \\ &= p/(1 - p + p^2) \end{aligned}$$

Si cette probabilité vaut 1/2 alors p vérifie l'équation $p/(1 - p + p^2) = 1/2$ ou encore $p^2 - 3p + 1 = 0$.

La seule solution comprise dans l'intervalle]0 ; 1[de cette équation est $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ qui est donc la probabilité cherchée.