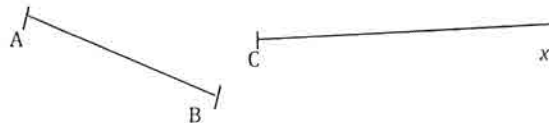


Des problèmes

96-1 de Serge Parpay (Niort) :

Un méchant professeur a tracé un segment $[AB]$ et une demi-droite $[Cx]$ sur une feuille de papier. Il me demande de situer le point D de la demi-droite tel que $CD = AB$. J'ai une règle non graduée et un compas, mais il m'interdit d'utiliser mon compas pour reporter simplement la longueur AB sur la demi-droite.

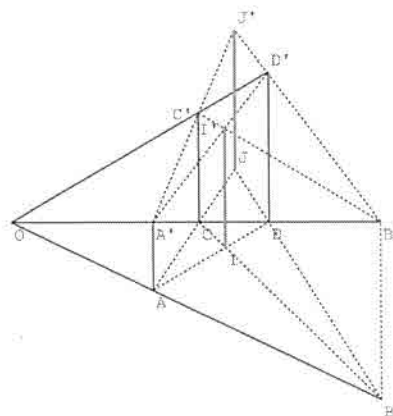
Au secours !



96-2 de Serge Parpay (Niort) :

Deux trapèzes : $(ABB'A')$ de bases (AA') , (BB') , rectangle en A' et B' ; $(CDD'C')$ de bases (CC') , (DD') , rectangle en C et D . (AB) et $(C'D')$ se coupent en O . Les points A' , C , D , B' sont, dans cet ordre, sur une demi-droite d'origine O , les trapèzes étant situés de part et d'autre de cette demi-droite (voir figure). (AD) et (BC) se coupent en I , $(A'D')$ et $(B'C')$ se coupent en I' , (AC) et (BD) se coupent en J , $(A'C')$ et $(B'D')$ se coupent en J' .

Montrer que (II') et (JJ') sont parallèles aux bases des trapèzes.



96-3 de Jean-Christophe Laugier (Rochefort) :

Montrer que quels que soient les entiers naturels m et n , avec m impair, $2^m - 1$ et $2^n + 1$ sont premiers entre eux.

96-4 de Louis Rivoallan (Rochefort) :

Deux joueurs A et B s'affrontent à un jeu. À chaque partie, le joueur A gagne avec la probabilité p tandis que le joueur B gagne avec la probabilité $q = 1 - p$. Est déclaré vainqueur le premier qui gagne deux parties consécutives. Le jeu est défavorable au joueur A car $p < q$ mais celui-ci vient de gagner la première partie et ses chances d'être le vainqueur sont maintenant égales à celles du joueur B . Quelle est donc la valeur de p ?

96-5 de Louis Rivoallan (Rochefort) :

Pour i allant de 1 à n , on considère les nombres positifs a_i . Montrer que :
$$\sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=i}^n a_j} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n i^2 a_i}$$

Des solutions

93-3 de Jacques Chayé :

On ne connaît pas les dimensions d'un terrain rectangulaire $ABCD$, mais on sait qu'un point M contenu dans ce terrain est situé à 5 mètres de A , à 14 mètres de B et à 30 mètres de C .

Quelle est la distance de M à D ?

Peut-on en déduire la valeur de AB et BC ?

Solution de Jean Souville

Prenons un repère orthonormé d'origine A tel que les coordonnées du point B soient $(b, 0)$, celles du point C soient (b, c) et celles du point D soient $(0, c)$, où b et c sont les longueurs des côtés du rectangle considéré. Soient (x, y) les coordonnées du point M . Les distances indiquées donnent les relations (i) $x^2 + y^2 = 25$, (ii) $(b - x)^2 + y^2 = 196$ et (iii) $(b - x)^2 + (c - y)^2 = 900$. La combinaison (i) - (ii) + (iii) de ces relations donne (iv) $x^2 + (c - y)^2 = 729$, d'où $MD = 27$. Par contre on ne peut pas connaître les valeurs des côtés b et c du rectangle, l'inégalité triangulaire impose $MB - MA \leq AB \leq MB + MA$ donc $9 \leq b \leq 19$.

Plus précisément, le point M étant à l'intérieur du rectangle, on doit avoir $MB^2 < AM^2 + AB^2$, donc $b > \sqrt{171} = 3\sqrt{19} \approx 13,08$. Si on choisit un élément quelconque $b \in]3\sqrt{19}, 19[$, il est possible de tracer un triangle AMB de côtés $AB = b$, $AM = 5$ et $BM = 14$ puis, sur la perpendiculaire à la droite (AB) issue du point B, prendre un point C tel que $MC = 30$ (ce qui est possible car la distance de M à cette droite est inférieure à $MB = 14$). En complétant le rectangle ABCD, on a une solution de largeur la valeur de b choisie au départ (le fait que M soit à l'intérieur du rectangle se vérifie grâce à la condition $b > 3\sqrt{19}$ et au fait qu'on a $BC \geq MC - MB$ et $y \leq MA = 5$; donc $BC > y$).

94-2 de Frédéric de Ligt :

Montrer que pour tout cercle de diamètre D contenu dans un quadrilatère convexe d'aire S on a toujours l'inégalité $D \leq \sqrt{S}$.

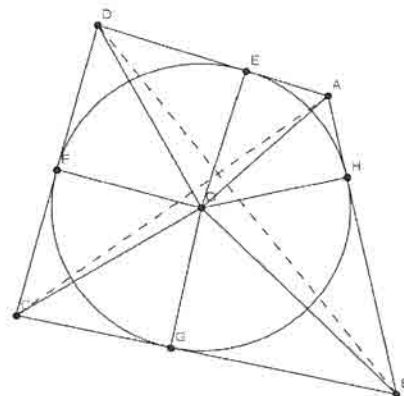
Solution de Louis Rivoallan

Des considérations élémentaires permettent de se ramener au cas où le cercle est inscrit dans le quadrilatère convexe.

L'aire S de ABCD est égale à la somme des aires des triangles AOB, BOC, COD et DOA.

Si on note r le rayon du cercle inscrit et a, b, c et d les longueurs des côtés, on obtient :

$$S = \frac{a \times r}{2} + \frac{b \times r}{2} + \frac{c \times r}{2} + \frac{d \times r}{2} = r \times p \text{ où } p \text{ désigne le demi-périmètre du quadrilatère.}$$



$$\text{Par ailleurs, } p = \frac{r}{\tan\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)} + \frac{r}{\tan\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)} + \frac{r}{\tan\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)} + \frac{r}{\tan\left(\frac{\widehat{D}}{2}\right)} \text{ et } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 2\pi.$$

$$\text{Donc } S = pr = r^2 \times \left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)} + \frac{1}{\tan\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)} + \frac{1}{\tan\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)} + \frac{1}{\tan\left(\frac{\widehat{D}}{2}\right)} \right).$$

La dérivée seconde de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$ sur $]0, \pi[$, $f''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}$ est strictement positive, ce qui montre que

la fonction f est convexe sur cet intervalle et par suite l'isobarycentre des images est plus grand que l'image de l'isobarycentre,

c'est-à-dire : $\frac{1}{4} \times (f(\widehat{A}) + f(\widehat{B}) + f(\widehat{C}) + f(\widehat{D})) \geq f\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Par suite $S \geq 4r^2$ donc $\sqrt{S} \geq 2r$.

Remarque : l'égalité n'a lieu que lorsque ABCD est un carré.

95-1 de Walter Mesnier :

Un sangaku parabolique

Voici un problème imaginé suite aux lectures des travaux de l'IREM de Poitiers (2^{nde} et 1^{ère} S).

Calculer l'aire des deux disques, sachant qu'elle est maximale et que la parabole est d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé (unité = 1cm). Ce qu'on voit sur le sangaku fait office de données. Les cercles sont bien tangents entre eux. Le petit est tangent à la parabole en un seul point et le grand en deux points.

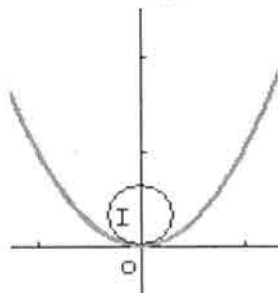
Solution de Jacques Chayé

1°) Considérons un point $T(t; t^2)$ de la parabole $\mathcal{P}$. La tangente à $\mathcal{P}$ en T a pour coefficient directeur $2t$; la normale en T à $\mathcal{P}$ admet donc l'équation $y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t)$.



Cette normale coupe [Oy) au point N d'ordonnée $y_N = t^2 - \frac{1}{2t}(-t) = t^2 + \frac{1}{2}$.

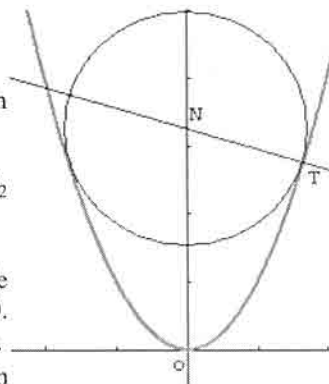
Donc, l'aire d'un disque C_1 centré sur [Oy) et tangent à la parabole en deux points, est fonction croissante de $|t|$.



2°) Soit r un réel strictement positif et le point I (0 ; r). Le cercle C_2 de centre I et de rayon r admet l'équation :

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2 \text{ qui s'écrit : } x^2 + y^2 - 2yr = 0.$$

Les abscisses des points communs à C_2 et à $\mathcal{P}$ sont les solutions de l'équation en x : $x^2 + x^4 - 2x^2 r = 0$ c'est-à-dire : $x^2 (x^2 - 2r + 1) = 0$. Cette équation admet pour seule solution 0, à condition que $r \leq 1/2$. C'est donc à cette condition que C_2 n'a que le point O en commun avec $\mathcal{P}$ et son aire est maximum quand $r = 1/2$. Dans ce cas, l'aire de C_2 est égale à $\pi/4$.



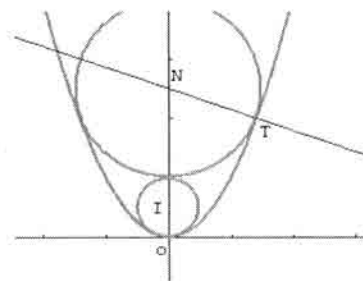
3°) Ce choix étant fait pour C_2 , pour que C_1 lui soit tangent, il faut et il suffit que son rayon soit égal à l'ordonnée de N diminuée du diamètre de C_2 qui est égal à 1.

On a alors : $y_N - 1 = NT$ ce qui, puisque les deux membres sont positifs, équivaut à

$$\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = t^2 + \frac{1}{4} \text{ soit } t^2 (t^2 - 2) = 0. \text{ Deux solutions non nulles : } \sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{2}. \text{ Dans ce}$$

$$\text{cas, } NT^2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Le rayon de C_1 est alors égal à $3/2$ et son aire à $9\pi/4$.



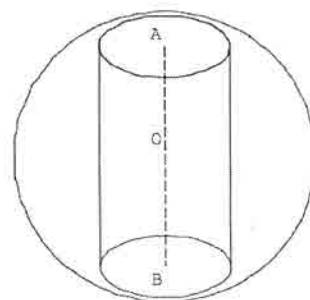
95-2 de Frédéric de Ligt :

Une sphère est percée ; il en résulte un trou cylindrique dont l'axe passe par le centre O de la sphère. La hauteur AB du cylindre est de 1 m. Quel est le volume de cette sphère trouée ?

Solution de Jacques Chayé

Une sphère de rayon R ($R > 0,5$) centrée à l'origine d'un repère orthonormé (O, x, y, z). Soit S la partie de la sphère comprise entre le plan d'équation $z = 0,5$ et le plan d'équation $z = -0,5$.

$$\text{Soit } V \text{ le volume de } S. \quad V = \int_{-1/2}^{1/2} \pi (R^2 - z^2) dz = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-1/2}^{1/2} = \pi \left(R^2 - \frac{1}{12} \right).$$



Les deux plans parallèles coupent la sphère selon des cercles de rayon $\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$.

Ces cercles sont les bases d'un cylindre de hauteur 1 ; le volume de ce cylindre est égal à $1 \times \pi \times \left(R^2 - \frac{1}{4} \right)$.

Si on extrait de S le cylindre précédent, le volume v du solide obtenu est : $v = \pi \left(R^2 - \frac{1}{12} \right) - \pi \left(R^2 - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}$.

COROL'AIRE est envoyé par courrier électronique aux adhérents et abonnés.

Ceux qui veulent recevoir une version papier (sans la couleur !) peuvent envoyer un chèque de 8 €, à l'ordre de APMEP Poitou-Charentes, à Jacques CHAYÉ, 5 rue Émile Faguet, 86000 POITIERS

Nouvelle adresse de l'IREM de Poitiers

IREM, Bâtiment de mathématiques
Téléport 2 - BP 30179
Bd Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope CHASSENEUIL Cedex