Histoire de Volumes

IREM de Poitiers, groupe Collège

Épisode 2 : Capacités et volumes en Mésopotamie

Les Mésopotamiens inventent des unités de volume et de capacité. Leur système de mesures est unifié entre -2 300 et -2 000 environ. « *Le rôle des écoles de scribes dans ce travail d'unification appuyé sur des conceptions nouvelles, en particulier des volumes, a probablement été décisif* » (Christine Proust). Des ensembles d'unités cohérents, homogènes, sont édifiés pour les longueurs, les surfaces, les volumes, les capacités, les poids. « *Le système des unités de volumes n'a pas de prédécesseur ancien attesté. /.../ Chaque unité de volume est égale à une unité de surface affectée d'une épaisseur de 1 kuš$_3$ (50 cm environ) et porte le même nom.* » (Christine Proust). Il est basé sur le sar.

1 sar (volume) = 1 sar (surface) d'épaisseur 1 kuš$_3$
1 GAN$_2$ (volume) = 1 GAN$_2$ (surface) d'épaisseur 1 kuš$_3$

Les rapports entre unités de volume sont donc les mêmes que les rapports entre unités de surface.

gan$_2$	←100—	sar	←60—	gin$_2$	←180—	še
(1800 m^3)		(18 m^3)		(300 dm^3)		(1,7 dm^3)

Le volume y est pensé comme une surface ayant une épaisseur ou une pile de surfaces épaisses, et on peut ici accorder aux Mésopotamiens l'invention de la formule aire de base × hauteur. Le cube n'est donc pas un volume naturel de référence, mais un cas particulier de prisme dont la hauteur est égale au côté de la base carrée.
Le sar volume est à considérer comme le volume d'un prisme de surface de base 1 sar et de hauteur normée à 1 kuš.

Leur système de capacités est très ancien et repose sur des pratiques d'utilisation de récipients étalons. Il est lentement et incomplètement remplacé par le système normalisé des volumes. Il est basé sur le gur. « Cette notion de capacité y est concrète, physique, liée à la matière et à divers contenants (récipients étalons, silos). »

gur	←5—	barig	←6—	ban$_2$	←10—	sila$_3$	←60—	gin$_2$
(300 litres)		(60 litres)		(10 litres)		(1 litre)		(17 ml)

Le système des capacités vit dès cette époque ancienne dans le domaine concret de la vie courante, le système des volumes dans le domaine savant des mathématiques.
Le lien entre les deux systèmes est établi, et fait l'objet de problèmes de conversions.

1 gur = 1 gin2-volume (voir les équivalences traduites avec nos unités)

60 gur = 1 sar-volume

Voici deux exemples de listes de capacités trouvées sur des tablettes, citées par Christine Proust, et extraites de la thèse de Veldhuis, avec leurs équivalents dans notre système moderne :

Bateaux : 1ère liste thématique (g i š)

279.	giš ma$_2$-60-gur	bateau de capacité 18 m^3
280.	giš ma$_2$-50-gur	bateau de capacité 15 m^3
281.	giš ma$_2$-40-gur	bateau de capacité 12 m^3
282.	giš ma$_2$-30-gur	bateau de capacité 9 m^3
283.	giš ma$_2$-20-gur	bateau de capacité 6 m^3
284.	giš ma$_2$-15-gur	bateau de capacité 4,5 m^3
285.	giš ma$_2$-10-gur	bateau de capacité 3 m^3
286.	giš ma$_2$-5-gur	bateau de capacité 1,5 m^3
287.	giš ma$_2$-tur	petit bateau

Récipients étalon : 1ère liste thématique (g i š)

515.	giš lid$_2$-ga	récipient de 300 litres
516.	giš ba-ri$_2$-ga	récipient de 60 litres
517.	giš ba-an	récipient de 10 litres
518.	giš ba-an-5-sila$_3$	récipient de 5 litres
519.	giš nig$_2$-2-sila$_3$	récipient de 2 litres
520.	giš 1-sila$_3$	récipient de 1 litres
521.	giš 1/2-sila$_3$	récipient de 1/2 litre
522.	giš 1/3-sila$_3$	récipient de 1/3 litre
523.	giš 2/3-sila$_3$	récipient de 2/3 litre
524.	giš 10-gin$_2$	récipient de 170 cm^3
525.	giš 5-gin$_2$	récipient de 85 cm^3
526.	giš 3-gin$_2$	récipient de 50 cm^3
527.	giš 2-gin$_2$	récipient de 34 cm^3
528.	giš 1-gin$_2$	récipient de 17 cm^3

L'étendue des mesures abordées est conséquente et montre combien les hommes de cette haute époque savaient appréhender leur quotidien de manière pragmatique. Les récipients sont à rapprocher de nos tonneaux, pots, boisseaux encore utilisés de nos jours.

Un objet chez les Mésopotamiens est essentiel dans leur quotidien, et apparait dans de nombreux problèmes trouvés sur les tablettes d'argile. C'est la brique.

Briques	L	12 šu-si à 1 $kuš_3$	(20 à 50 cm)
	Lh	5 šu-si	(8 cm)
	S	12 1/2 še à 1/3 gin_2	(4 à 250 dm^2)
	V	2 1/3 à 12 še	(4 à 20 dm^3)
	C	4 à 20 $sila_3$	(4 à 20 litres)
Sar de briques	V	7 gin_2 à 1 sar	(2 à 18 m^3)
	C	7 gur à 1($geš_2$) gur	(2000 à 18000 litres)

Ce parallélépipède rectangle est la base des procédés de calcul, et va ainsi permettre de gérer, à partir des trois dimensions des ouvrages, tous les calculs nécessaires à leur réalisation : les volumes de briques ou de terre pour les murs, pour les rampes d'accès, pour les barrages, et d'un point de vue logistique pour le travail des hommes, leur nombre et le nombre de jours de travail. Ainsi dans la tablette Ni 5175, un tas de briques est étudié : c'est un prisme droit dont on donne la largeur et la hauteur et dont on modifie la longueur en ôtant un nombre donné de briques. Il est demandé la nouvelle longueur.

Les longueurs et les volumes sont déjà supposés dans les mêmes rapports. Et cette proportionnalité est utilisée comme procédé. C'est intéressant pour nous d'en voir la mise en œuvre. Plus simplement sur le calcul des briques, on a le problème suivant dans la tablette AO10822 :
qui se décline ensuite en calcul de hauteur à retrancher pour y prendre un nombre de briques. Est-ce la tâche à commander à un ouvrier ?

AO **10822** [MKT I, p. 124] **Face colonne II**	
13 sig_4-anše sig_4 1 uš 30 sag 30 sukud sig_4 en-nam	Un tas de briques. 1 la longueur, 30 la largeur, 30 la hauteur. Combien de briques ?

Voici d'autres problèmes :

« Un tas de demi-briques, le flanc est 2 30, le front 1 30, la hauteur 4. Que sont les demi-briques [le volume] ? » (AO10822) « Une brique. Le flanc est une demi-coudée, le front un tiers de coudée, sa hauteur 5 doigts. Que sont le sol et la terre ? » [le sol est la surface de base flanc par front, et la terre est le volume]. (YBC 4673)	« Un petit canal. Sa largeur supérieure est 2 coudées, sa largeur inférieure est [1] coudée, la profondeur est 1 coudée et demie. La tâche est un tiers de sar de terre. Quoi de longueur prendra un homme ? » (VAT 7528) Le canal à section trapézoïdale peut être vu comme un prisme à section rectangulaire de largeur la moyenne des deux largeurs supérieure et inférieure. C'est la méthode donnée dans un problème plus complexe de canal (problème 15 : BM85196).

La transformation d'un volume en volume prismatique simple, ramené directement à une forme rectangulaire, est la clé des méthodes. Nous en retiendrons le principe notamment pour les volumes au collège en 6ème et 5ème.

La Régionale fait étape à Cognac !

Jeudi 13 février s'est déroulée à Cognac une soirée-débat autour du film d'Olivier Peyon : « Comment j'ai détesté les maths ». Invitée par l'association Eurociné-Cognac pour animer le débat, la Régionale était représentée par Pierre-Jean Robin et Corinne Parcelier. L'objectif était de savoir dans quelle mesure ce film pouvait être proposé à des lycéens. Le public, une cinquantaine de personnes, regroupaient essentiellement des professeurs de mathématiques, mais il y avait également quelques parents et lycéens. Après la diffusion du film, le débat a été lancé. Outre les impressions sur le film, les échanges ont permis de soulever quelques questions :
Comment les mathématiques peuvent-elles rimer avec création, inventivité, art ?
Quelle est la place réservée aux mathématiques dans le cursus scolaire d'un élève : ne les utilise-t-on pas d'abord comme un outil de sélection avant de les développer pour comprendre le monde qui nous entoure ?
Le contenu des programmes et les méthodes pédagogiques peuvent-ils contribuer à une meilleure appropriation des notions mathématiques essentielles pour tout citoyen ?
Que faire en cas de blocage ?
C'est d'ailleurs sur ce sujet qu'une suite sera donnée à cette projection le jeudi 17 avril prochain : l'APMEP est de nouveau invitée à partager une conférence en fin d'après-midi, sous l'égide d'Eurociné-Cognac et du lycée Jean Monnet. Elle se déroulera dans la salle de « La Salamandre », en présence d'Anne Siéty, la psychopédagogue qui intervient dans le film, sur le thème des blocages en mathématiques.