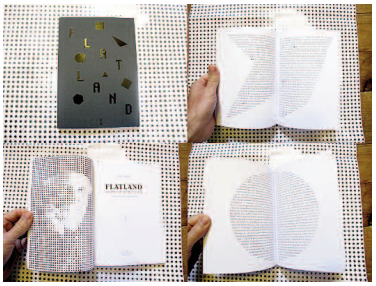
RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric De Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt@gmail.com

Flatland, un livre étonnant

Dans le Bulletin Vert 503 (mars-avril 2013), page 251, Marc Roux présente le livre « Flatland » d'Edwin A. Abott ; livre paru en 1884, traduit de l'anglais (Philippe Blanchard) - éditions Zones sensibles ; ISBN : 978-2-93060-105-2. Il nous en conseille la lecture, et pour cause : un livre digne de la science-fiction (l'intelligente !).

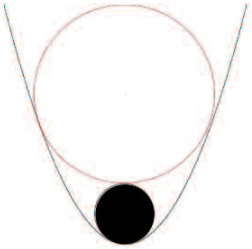


Nous voici dans le monde plat, dont on parlait quelquefois ; mais ici les êtres plats vivent devant nous, avec leur histoire, leur vie, leurs mœurs (avec une étude sociologique, qui nous ramène à des problèmes plus ou moins délicats de notre époque). Et ces êtres découvrent, dans l'effroi ou la stupeur, des mondes d'une autre dimension. Une curiosité pour cette édition : même la couverture, avec des lettres prédécoupées, nous fait passer de la dimension 2 à la dimension 3, si on la regarde par la tranche. Oui vraiment, un livre étrange et fascinant.

Serge Parpay

Des problèmes

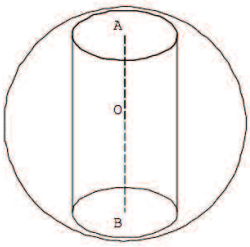
95-1 *de Walter Mesnier (Poitiers)* :



Un sangaku parabolique

Voici un problème imaginé suite aux lectures des travaux de l'IREM de Poitiers (2nde et 1ère S).
Calculer l'aire des deux disques, sachant qu'elle est maximale et que la parabole est d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé (unité = 1 cm). Ce qu'on voit sur le sangaku fait office de données. Les cercles sont bien tangents entre eux. Le petit est tangent à la parabole en un seul point et le grand en deux points.

95-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :



Une sphère est percée ; il en résulte un trou cylindrique dont l'axe passe par le centre O de la sphère. La hauteur AB du cylindre est de 1 m. Quel est le volume de cette sphère trouée ?

95-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

On écrit une suite de n nombres composée uniquement de 0 et de 1. La règle de simplification est la suivante : si on enlève un 0 et un 1, on les remplace par un 0 et si on enlève deux 0 ou deux 1, on les remplace par un 1. Montrer que le résultat ne dépend pas de la façon dont on procède.

95-4 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Montrer que pour tout entier $n > 2$, l'équation : $1 = x_1^{-1} + x_2^{-1} + ... + x_n^{-1}$ admet toujours une solution en nombres entiers positifs, tous différents.

Des solutions

92-3 *de Jean-Christophe Laugier* :

Il est bien connu que deux droites du plan sont sécantes ou parallèles ! Cette propriété n'est évidemment pas vraie pour l'ensemble des droites de l'espace. Mais qu'en est-il si on se restreint à un sous-ensemble ($\mathcal{D}$) de droites de l'espace ? En d'autres termes, quels sont les ensembles ($\mathcal{D}$) de droites de l'espace tels que deux droites quelconques de ($\mathcal{D}$) soient sécantes ou parallèles ?

Solution de Jean Souville

Cette propriété est vérifiée par tout ensemble de droites vérifiant :
soit a) toutes les droites sont incluses dans un même plan,
soit b) toutes ces droites passent par un même point,
soit c) toutes ces droites sont parallèles à une même direction,
soit évidemment plusieurs des conditions ci-dessus (ce qui est notamment le cas si l'ensemble contient au plus 2 droites). En effet, supposons que notre ensemble ne satisfait pas la propriété c). Il contient alors deux droites (*d'*) et (*d''*) sécantes en un point, que nous noterons A.
Supposons maintenant que notre ensemble ne vérifie pas la propriété b), alors il contient une droite (*d*) ne passant pas par A. Notons ($\mathcal{P}$) le plan défini par le point A et la droite (*d*) et montrons que toute droite de notre ensemble est incluse dans ($\mathcal{P}$). C'est facile pour une droite passant par le point A car ($\mathcal{P}$) est le seul plan contenant (*d*) et le point A, en particulier nos droites (*d'*) et (*d''*) sont incluses dans le plan ($\mathcal{P}$).
D'après ce qui précède, toute droite de notre ensemble ne passant pas par A définit avec le point A un plan contenant les droites sécantes (*d'*) et (*d''*) donc confondu avec le plan ($\mathcal{P}$), et est par conséquent incluse dans ($\mathcal{P}$).
Nous avons montré que si notre ensemble de droites ne vérifie ni c) ni b), alors il vérifie a), ce qui montre qu'il est dans l'un (au moins) des trois cas considérés.
N.B. Il y a bien d'autres manières de rédiger cette preuve, mais avec des pièges logiques. La démarche de celle ci-dessus permet de les éviter.

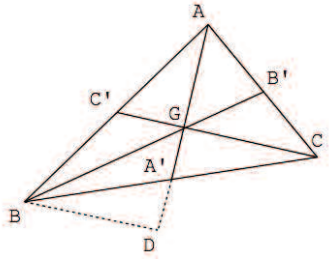
93-4 *de Frédéric de Ligt* :
Avec les trois médianes d'un triangle, peut-on toujours former un triangle ?

Solution de Jean Souville

Oui : les longueurs des médianes d'un triangle ABC sont celles du triangle AA'D où D est le symétrique de C' par rapport à B' (où on note A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]). En effet, AC'CD est un parallélogramme (de centre B') donc la longueur AD est égale à la médiane CC'. On a également A'D = BB' car BA'DB' est un parallélogramme, ce qui résulte du théorème de la droite des milieux (on a les égalités vectorielles $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{B'D}$).

Solution de Jacques Chayé

Soient A', B' et C' les milieux de [BC], [CA] et [AB] respectivement. Pour que l'on puisse former un triangle avec les trois médianes du triangle ABC, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient réalisées :



$$\left|BB' - CC'\right| \leq AA' \leq BB' + CC' \quad (1)$$

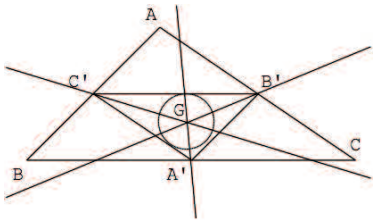
$$\left|CC' - AA'\right| \leq BB' \leq CC' + AA' \quad (2)$$

$$\left|AA' - BB'\right| \leq CC' \leq AA' + BB' \quad (3)$$

Montrons que la double inégalité (1) est vérifiée. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC et D le symétrique de G par rapport à A'. La condition (1) est équivalente à $\left|BG - CG\right| \leq AG \leq BG + CG$, c'est-à-dire à $\left|BG - DB\right| \leq GD \leq BG + DB$. C'est l'inégalité triangulaire dans le triangle GBD. Les conditions (2) et (3) s'établissent d'une manière analogue.

94-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Où est le centre de gravité d'un triangle formé de trois tiges pesantes et homogènes ?

Solution de Louis Rivoallan



On utilise les notations usuelles dans ce type de configuration, *a, b, c* désignent les longueurs des segments [*BC*], [*CA*], [*AB*] et *A'*, *B'*, *C'* les milieux respectifs de ces segments. Les barres étant homogènes, leurs barycentres respectifs sont leurs milieux, auxquels on peut affecter un coefficient égal au poids de la barre qui est lui-même proportionnel à la longueur de celle-ci.
Avec les notations de la figure le barycentre cherché *G* est le barycentre de ((*B', b*), (*C', c*), (*A', a*)), ou encore en divisant les coefficients par 2, le barycentre de (*B', b/2*), (*C', c/2*), (*A', a/2*). Mais dans le triangle *A'B'C'*, les longueurs respectives des segments [*B'C'*], [*C'A'*], [*A'B'*] sont en vertu du théorème des milieux *a/2, b/2* et *c/2*. Or le barycentre d'un triangle dont on affecte les sommets des coefficients égaux à la longueur du côté opposé est le centre du cercle inscrit à ce triangle. Le barycentre demandé est donc le centre du cercle inscrit dans le triangle formé par les milieux des barres.

Solution de Jacques Chayé

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB] et soient a, b et c les longueurs respectives de ces segments. Puisque les tiges sont homogènes, on ne change pas le centre de gravité du triangle de l'énoncé si l'on remplace chacune des tiges par son milieu affecté de la masse de la tige et comme les masses des tiges sont proportionnelles à leurs longueurs, le centre de gravité G cherché est le barycentre de $I(a)$, $J(b)$, $K(c)$. On a donc : $a\overrightarrow{GI}+b\overrightarrow{GJ}+c\overrightarrow{GK}=\vec{0}$ (1).
On peut donner une interprétation géométrique simple de ce point G en le comparant au barycentre G' de $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, qui vérifie : $a\overrightarrow{G'A}+b\overrightarrow{G'B}+c\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$ (2).

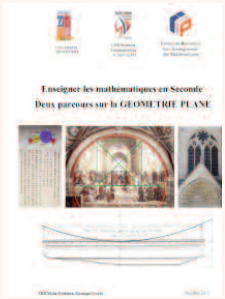
Soit g l'isobarycentre du triangle. L'égalité (1) peut s'écrire : $(a+b+c)\overrightarrow{Gg}+a\overrightarrow{gI}+b\overrightarrow{gJ}+c\overrightarrow{gK}=\vec{0}$ et de même, l'égalité (2) : $(a+b+c)\overrightarrow{G'g}+a\overrightarrow{gA}+b\overrightarrow{gB}+c\overrightarrow{gC}=\vec{0}$ d'où : $(a+b+c)\left(\overrightarrow{G'g}+2\overrightarrow{Gg}\right)+a\left(\overrightarrow{gA}+2\overrightarrow{gI}\right)+b\left(\overrightarrow{gB}+2\overrightarrow{gJ}\right)+c\left(\overrightarrow{gC}+2\overrightarrow{gK}\right)=\vec{0}$.

Les trois dernières parenthèses sont égales au vecteur nul, on en déduit que $\overrightarrow{G'g}+2\overrightarrow{Gg}=\vec{0}$ ou encore : $\overrightarrow{Gg}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{G'g}$. G est donc l'image de G' par l'homothétie de centre g et de rapport $\frac{-1}{2}$.

Remarque : G' est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des bissectrices de ce triangle. En effet, le pied A' de la bissectrice issue de A étant situé entre B et C, on a : $A'C.\overrightarrow{A'B}+A'B.\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$. Mais $A'C$ et $A'B$ sont proportionnels à AC et AB, donc : $b.\overrightarrow{A'B}+c.\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$. C'est dire que A' est le barycentre de $B(b)$ et $C(c)$. Donc le point G' est sur la bissectrice (AA') ; il est de même sur les deux autres, donc au centre du cercle inscrit. La considération de l'homothétie de centre g et de rapport $\frac{-1}{2}$ nous permet de conclure : **le point G est le centre du cercle inscrit dans le triangle IJK.**

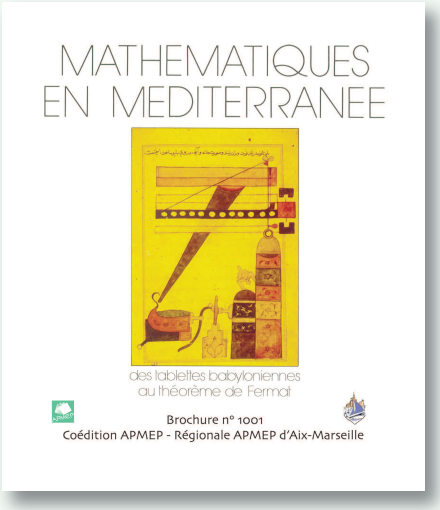
Des brochures de l'IREM de Poitiers

Au collège



Au lycée

Une nouvelle brochure APMEP

L'APMEP et sa Régionale d'Aix-Marseille ont réédité, à l'occasion des Journées Nationales, cet ouvrage qui accompagnait l'exposition « Mathématiques en Méditerranée, des tablettes babyloniennes au théorème de Fermat » en 1988.
Cet ouvrage nous permet de prendre connaissance des activités scientifiques à travers les civilisations méditerranéennes au sens large de ce terme puisque sont ici concernées, pour la plus haute antiquité, les civilisations babylonienne et égyptienne, puis grecque et romaine suivies par la civilisation arabo-musulmane, pour aboutir à la transmission des connaissances mathématiques au monde occidental. Sont traitées de manière plus spécifique, la numération, la théorie des nombres, l'algèbre et la géométrie. Dans le contexte de ces époques, la mécanique et l'astronomie sont aussi considérées.

Brochure APMEP n° 1001 - 120 pages - format 21x23
Prix public : 20 €
Prix adhérent : 15 €
Vous pouvez la commander à la Régionale APMEP de Poitou-Charentes.