RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.
Frédéric De Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt@gmail.com

Jacques Chayé nous envoie la jolie recherche suivante :

Le résultat classique $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ permet d'obtenir facilement la limite de $S_n=\sum_{p=1}^{n}u_p$ avec $u_p=\dfrac{1}{p(p+1)}$.

En effet $S_p=\sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p}-\sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p+1}$.

Pour 2 $\leq p \leq n$, le p-ième terme de la première somme s'annule avec le (p - 1)-ième terme de la seconde somme.

Il ne reste plus que $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{n+1}$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$.

Qu'en est-il pour $T_n=\sum_{p=1}^{n}v_p$ avec $v_p=\dfrac{1}{p(p+1)(p+2)}$?

v_p se décompose en éléments simples sous la forme $v_p=\dfrac{1}{2p}-\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{2(p+2)}$.

D'où : $T_n=\sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{2p}-\sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p+1}+\sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{2(p+2)}$.

Pour 3 $\leq p \leq n$, le p-ième terme de la première somme moins le (p - 1)-ième terme de la seconde somme plus le (p - 2)-ième terme de la troisième somme donnent un total nul.

Il ne reste que : $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2n+2}+\dfrac{1}{2n+4}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2n+2}+\dfrac{1}{2n+4}$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} T_n=\dfrac{1}{4}$.

Qu'en est-il pour $U_n=\sum_{p=1}^{n}w_p$ avec $w_p=\dfrac{1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$?

w_p se décompose sous la forme $w_p=\dfrac{1}{6p}-\dfrac{1}{2(p+1)}+\dfrac{1}{2(p+2)}-\dfrac{1}{6(p+3)}$

et après simplification, on obtient $U_n=\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{6n+6}+\dfrac{1}{3n+6}-\dfrac{1}{6n+9}$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} U_n=\dfrac{1}{18}$.

Les calculs dans les rangs plus élevés deviennent de plus en plus laborieux. L'utilisation de XL permet de conjecturer les résultats sur les limites. Par exemple, au cinquième rang, pour la somme des nombres $\dfrac{1}{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$ la limite paraît être égale à L = 0,0104166666666666... (suite décimale illimitée). Si tel est le cas, on en déduit 10L = 0,104166666666666..., d'où 9L = 0,09375 et donc $L=\dfrac{1}{96}$.

Au rang suivant la limite semble être égale à M = 0,00166666666..., d'où 10M = 0,01666666... et donc 9M = 0,015 ou encore $M=\dfrac{1}{600}$. Quels sont ces dénominateurs 1, 4, 18, 96, 600, ...?

Ah ! Mais oui ! C'est bien sûr ! Au rang r, il s'agit de $(r + 1)! - r! = r \times r!$

Il ne reste plus qu'à le démontrer !

N.D.L.R. C'est avec cette question que s'ouvre votre rubrique de problèmes.

Des problèmes

93-1 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

Montrer que $\sum_{p=1}^{\infty}\dfrac{1}{p(p+1)...(p+r)}=\dfrac{1}{r\times r!}$.

93-2 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

Dans la rubrique « Les problèmes de l'APMEP » du bulletin vert numéro 501 figure le problème suivant : *Montrer que le produit de huit entiers consécutifs non nuls ne peut être un carré parfait.*
Voici deux petits problèmes en rapport avec cet énoncé, mais plus simples à résoudre.
Problème 1 : Montrer que le produit de quatre entiers naturels consécutifs ne peut être un carré parfait.
Problème 2 : Pour quelle(s) valeur(s) de l'entier relatif n, n(n + 1)(n + 7)(n + 8) est-il un carré parfait ?

93-3 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

On ne connaît pas les dimensions d'un terrain rectangulaire ABCD, mais on sait qu'un point M contenu dans ce terrain est situé à 5 mètres de A, à 14 mètres de B et à 30 mètres de C.
Quelle est la distance de M à D ?
Peut-on en déduire la valeur de L_1 = AB et L_2 = BC ?

93-4 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

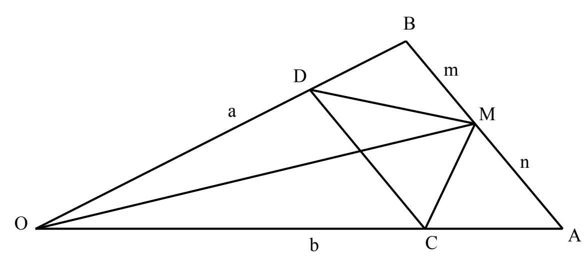
Avec les trois médianes d'un triangle, peut-on toujours former un triangle ?

Des solutions

89-1 *de Louis Rivoallan* :

Soit un triangle OAB. Soit M le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{O}$. Soit les points C et D respectivement sur [AO] et [BO] tels que AC = AM et BD = BM.
Quelle position particulière occupe le point M pour le triangle OCD ?

Solution de Frédéric de Ligt



Notons a = OB, b = OA, m = AM, n = BM.

M est le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{O}$ sur le côté [AB].

On a donc l'égalité des rapports : $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$.

On en tire $\frac{m}{b} = \frac{n}{a}$ ou encore $1 - \frac{m}{b} = 1 - \frac{n}{a}$ et donc $\frac{b-m}{b} = \frac{a-n}{a}$.

D'après la propriété de Thalès on en déduit que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

Les angles $\widehat{BMD}$ et $\widehat{MDC}$ sont alternes-internes et sont donc de même mesure.

Comme par ailleurs le triangle BDM est isocèle en B, les angles $\widehat{BMD}$ et $\widehat{BDM}$ sont de même mesure.

D'où $\widehat{BDM} = \widehat{MDC}$ et par conséquent la droite (DM) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BDC}$.

On montre de même que la droite (CM) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{DCA}$.

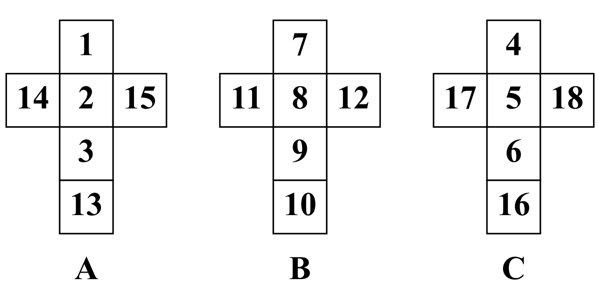
Le point M qui est sur la bissectrice intérieure de $\widehat{COD}$ et aussi sur les bissectrices extérieures des angles $\widehat{ODC}$ et $\widehat{OCD}$, il est donc le centre du cercle exinscrit au triangle COD relatif à l'angle $\widehat{COD}$.

90-3 *de Frédéric de Ligt* :

Les dés paradoxaux

On numérote les faces de trois dés cubiques avec **tous** les entiers de 1 à 18. Trois joueurs A, B et C s'attribuent chacun un des dés. Ils lancent simultanément leur dé et comparent leur score. Celui qui a le score le plus élevé l'emporte. Comment numéroter ces trois dés pour que les compétitions entre A et B et entre B et C soient équitables mais que la compétition entre A et C soit favorable à C ?

Solution de Frédéric de Ligt



Les duels entre les joueurs A et B ainsi que ceux entre les joueurs B et C sont équilibrés mais ceux entre les joueurs A et C sont en faveur du joueur C qui remporte la victoire avec une probabilité de 0,75. Il n'y a pas transitivité de l'égalité des forces entre ces trois dés. Si ce thème vous intéresse, vous pouvez consulter l'article de Jean-Paul Delahaye « Les dés affreux d'Effron » paru dans le numéro 426 du mois d'avril 2013 de la revue Pour la science. L'auteur y présente les derniers développements sur le sujet.

91-2 *de Louis Rivoallan sur une proposition de Marc Blanchard* :
Dans un triangle ABC on trace trois céviennes. Par la droite issue de A, on trace sa symétrique par rapport à A', le milieu de [BC], et on procède de façon analogue pour chacune des deux autres droites par rapport aux milieux correspondants. Il faut montrer que les trois droites obtenues sont elles aussi concourantes.

Solution de Jean Souville

Ces droites sont images des céviennes par l'homothétie de centre G (isobarycentre de ABC) et de rapport -2, donc sont concourantes au point image par cette homothétie de leur point de concours. En effet, G est aux 2/3 de la médiane [AA'] donc au tiers du segment [AA''] où A'' est le symétrique de A par rapport à A'. A'' est donc l'image de A par l'homothétie de centre G et de rapport -2, et la parallèle à la cévienne issue de A est image de cette cévienne par cette homothétie.

92-2 *de Serge Parpay (Niort)* :

Pied au plancher ou araignée au plafond ?
Dans certains calculateurs programmables, on utilise, pour un nombre x, les notations « floor » (plancher) et « ceiling » (plafond), en abrégé « ceil ». floor(x), ceil(x) sont définies comme ci-après. Pour tout nombre entier, floor(n) = ceil(n) = n. Pour tout nombre m non entier, floor(m) désigne le nombre entier précédant m et ceil(m) désigne le nombre entier suivant m.
L'expression floor(x) correspond en fait à E(x) ou à [x]. Sans « inventer » d'autre notation, x étant un nombre quelconque, comment exprimer ceil(x) ?

Solution de Jacques Chayé et de Jean Souville

Ceil(x) = -E(-x)

Solution de Frédéric de Ligt

La solution donnée par Jacques Chayé et Jean Souville est la plus courte et la plus pratique, mais ce n'est pas la seule.
Ainsi on pourrait aussi écrire ceil(x) = n – E(n – x) avec un entier relatif n quelconque.