RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric De Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt@gmail.com

Des problèmes

94-1 *de Serge Parpay (Niort)*

Classique sans doute, mais... on peut toujours s'amuser à le (re)chercher. Une consigne : **Internet interdit**.
Un nombre entier positif peut s'écrire comme somme de 1 ou de 2 (ou inclusif) ; par exemple 3 peut s'écrire de trois façons différentes 3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1.
1) Combien de façons pour 1, 2, 3, 4, 5 ?
2) Plus généralement combien de façons pour un nombre entier n quelconque ?

94-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)*

Montrer que pour tout cercle de diamètre D contenu dans un quadrilatère convexe d'aire S on a toujours l'inégalité $D \leq \sqrt{S}$.

94-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)*

Où est le centre de gravité d'un triangle formé de trois tiges pesantes et homogènes ?

Des solutions

91-3 *de Frédéric de Ligt*

Le casse-tête électronique

Dans un magasin vendant des jeux de réflexion, des casse-tête et des puzzles je suis tombé sur une calculette toute simple mais un peu étrange. Elle ne présentait qu'une seule touche d'opération, marquée de l'énigmatique symbole Δ. Toutes les autres touches m'étaient familières.
Au dos du produit on pouvait lire :
Il s'agit pour vous de trouver un moyen d'additionner, de soustraire, de multiplier ou de diviser deux nombres non nuls à l'aide de la seule touche d'opération disponible : Δ.
Intrigué, j'ai acheté la calculette et, rentré chez moi, j'ai effectué les quelques essais ci-dessous :
0 Δ 1= ERROR ; 1 Δ 0 = ERROR ; 1 Δ 1 = 0 ; 1 Δ -1 = 2 ; 1 Δ 2 = 0.5 ; 2 Δ 1 = - 0.5 ; 1 Δ 0.5 = - 1 ; 0.5 Δ 1 = 1.
Si a et b désignent des nombres réels non nuls, comment, d'une façon générale, obtenir alors les résultats $a + b$, $a - b$, $a \times b$ et $a \div b$?
Quels sont les cas particuliers où la calculette renvoie le message ERROR alors que ni a ni b ne sont nuls ? Comment traiter ces cas ?

Solution de l'auteur

Pour a et b non nuls $a \Delta b = 1/a - 1/b$. On note $T_1(x) = x + 1$ et $T_{-1}(x) = x - 1$. On peut obtenir T_1 et T_{-1} de la façon suivante : $T_1(x) = [(1 \Delta x) \Delta 1] \Delta (-0,5)$; $T_{-1}(x) = (1 \Delta [x \Delta (-1)]) \Delta 0,5$. À noter que T_1 n'est pas définie en 0 et en 1 et que T_{-1} n'est pas définie en 0 et en -1. On définit maintenant $\mathrm{Inv}(x) = 1/x$.
On peut obtenir $\mathrm{Inv}(x)$ par $[1 \Delta T_1(x)] \Delta 1$ ou par $1 \Delta [T_{-1}(x) \Delta (-1)]$. Dans les deux cas Inv n'est pas définie en 0, 1 et -1. D'où le moyen d'obtenir en général $S(a, b) = a + b$ en effectuant $\mathrm{Inv}(a) \Delta \mathrm{Inv}(-b)$ et $D(a, b) = a - b$ en effectuant $\mathrm{Inv}(a) \Delta \mathrm{Inv}(b)$. Quant aux cas particuliers, en continuant à supposer bien sûr que ni a ni b ne sont nuls, mais cela n'est pas bien gênant, ils sont traités dans les tableaux ci-dessous.

Pour $S(a, b)$:

$b \backslash a$	-1	1	Différent de 1 et de -1
-1	$(-1) \Delta 1$	$T_{-1}(1)$	$T_{-1}(a)$
1	$T_1(-1)$	$1 \Delta (-1)$	$T_1(a)$
Différent de 1 et de -1	$T_{-1}(b)$	$T_1(b)$	Procédé général

Pour $D(a, b)$:

$b \backslash a$	-1	1	Différent de 1 et de -1
-1	$T_1(-1)$	$1 \Delta (-1)$	$T_1(a)$
1	$(-1) \Delta 1$	$T_{-1}(1)$	$T_{-1}(a)$
Différent de 1 et de -1	$T_{-1}(-b)$	$T_1(-b)$	Procédé général

On note ensuite $C(x) = x^2$. On obtient $C(x)$ par $[x \Delta T_1(x)] \Delta [\mathrm{Inv}(x)]$. On note $M(x) = x/2$. On obtient $M(x)$ par $\mathrm{Inv}[x \Delta (-x)]$. On utilise alors l'identité $a \times b = [(a + b)^2 - (a^2 + b^2)]/2$ et on obtient $P(a, b) = a \times b$ par $M[D(C[S(a, b)], S[C(a), C(b)])]$.
D'où le calcul $Q(a, b) = a \div b = P[a, \mathrm{Inv}(b)]$
À propos des domaines de définition de ces deux dernières opérations, il y a quelques complications. On peut raisonnablement restreindre cette étude aux cas où a et b sont différents de -1, 0 et 1. Voici les domaines où les fonctions « élémentaires » de la calculette ne sont pas définis :
T_1 n'est pas définie pour 0 et 1
T_{-1} n'est pas définie pour -1 et 0
Inv n'est pas définie pour -1, 0, 1
C n'est pas définie pour -1, 0, 1
M n'est pas définie pour -2, 0, 2

Pour la multiplication

Il faut donc que
* $C(a)$ et $C(b)$ soient différents de 0, 1 ou -1 mais on est déjà placé dans ce cas de figure
* $S(a, b)$ soit différent de 0, 1 ou -1 c'est-à-dire $a + b$ différent de 0, 1 ou -1.
  Dans le cas où $a + b = 1$ alors $P(a, b)$ peut être donné par $\mathrm{Inv}(a) \Delta \mathrm{Inv}[C(a)]$
  Dans le cas où $a + b = -1$ alors $P(a, b)$ peut être donné par $\mathrm{Inv}(-a) \Delta \mathrm{Inv}[C(b)]$
  Dans le cas où $a + b = 0$ alors $P(a, b)$ peut être donné par $-C(a)$.
* $C[S(a, b)]$ soit différent de 0, 1 ou -1 c'est-à-dire $(a + b)^2$ différent de 0 ou 1 mais on est ramené au cas précédent.
* $S[C(a), C(b)]$ soit différent de 0, 1 ou -1 c'est-à-dire $a^2 + b^2$ différent de 1 sinon ou bien $(a + b)^2$ est différent de 3 et $P(a, b)$ peut être donné par $M[T_{-1}(C(S(a, b)])]$ car $ab = 1/2[(a + b)^2 - 1]$ ou bien $(a + b)^2 = 3$ et alors $P(a, b) = 1$ (ce dernier cas est purement mathématique car l'un des deux nombres a ou b serait irrationnel et un tel nombre est impossible à saisir sur la calculette).
* $D(C[S(a, b)], S[C(a), C(b)]\ )$ soit différent de 0, 2 ou -2 c'est-à-dire $(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2a \times b$ différent de 2 ou -2 sinon $P(a, b)$ vaut 1 ou -1 respectivement.

Pour la division

L' étude est semblable à celle de la multiplication en remplaçant b par $\mathrm{Inv}(b)$. La discussion en est laissée au lecteur courageux.

92-1 *de Jacques Chayé*

M. le Curé rencontre son sacristain ; il lui dit :
« Je viens de croiser trois de mes paroissiens ; le produit de leurs âges, en nombres entiers d'années, est égal à 2450 alors que la somme est égale au double de votre âge. Quels sont donc les âges de ces trois paroissiens ? »
Le sacristain répond : « Je ne peux pas conclure. »
« Vous avez raison », lui répond son curé, « Mais vous connaissez mon âge, eh bien, sachez que je suis plus vieux que chacune de ces trois personnes. »
Comment le sacristain peut-il maintenant conclure ?

Solution de Jean Souville

Le sacristain connaît son âge, donc la somme des âges des trois paroissiens, mais ne connaît pas le détail de ces âges... Or seules deux des 20 décompositions de 2450 en produit de 3 entiers (y compris $1 \times 1 \times 2450$) donnent la même somme, c'est 5-10-49 et 7-7-50 pour lesquelles la somme est 64. J'en conclus que le sacristain a 32 ans. La dernière indication donne que le curé a 50 ans et les paroissiens 5, 10 et 49 ans.

93-1 *de Jacques Chayé* :

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)...(n+p)} = \frac{1}{p \times p!}$.

Solution de Jean Souville

Le propre du mathématicien, c'est de savoir ne pas multiplier les calculs. Ici ne pas utiliser la décomposition en éléments simples complète, mais seulement celle de $\frac{1}{X(X+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+p}\right)$ qui donne pour tout entier non nul l'égalité :

$$\frac{1}{n(n+1)...(n+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{n(n+1)...(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)...(n+p)}\right).$$

Pour tout entier $N > 1$ on a alors : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)...(n+p)} = \frac{1}{p}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)...(n+p-1)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)...(n+p)}\right)$.

La seconde somme comporte les mêmes termes que la première à l'exception des termes extrêmes, d'où

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)...(n+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3...p} - \frac{1}{(N+1)...(N+p)}\right)$$

Et par passage à la limite quand $N \to +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)...(n+p)} = \frac{1}{p \times p!}$.

93-2 *de Jean-Christophe Laugier* :

Dans la rubrique « Les problèmes de l'APMEP » du Bulletin Vert numéro 501 figure le problème suivant : *Montrer que le produit de huit entiers consécutifs non nuls ne peut être un carré parfait*.
Voici deux petits problèmes en rapport avec cet énoncé, mais plus simples à résoudre.
Problème 1 : Montrer que le produit de quatre entiers naturels consécutifs ne peut être un carré parfait.
Problème 2 : Pour quelle(s) valeur(s) de l'entier relatif n, $n(n + 1)(n + 7)(n + 8)$ est-il un carré parfait ?

Solution de Jean Souville

Problème 1.
L'énoncé du Bulletin Vert parle d'entiers non nuls. Sans cette précision, l'énoncé annoncé est faux car le produit des entiers 0 à 3 est nul, donc est un carré parfait.
Prenons un entier n non nul, le produit $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n+1)^2 - 1$ ne peut être un carré parfait, car cela donnerait deux carrés parfaits dont la différence est égale à 1, l'un d'entre eux étant le carré de $n^2 + 3n + 1 > 4$ ...

Problème 2.

De même, si n est un entier relatif le produit $N = n(n + 1)(n + 7)(n + 8)$ est égal à $(n^2 + 8n + 4)^2 - (n + 4)^2$ et à $(n^2 + 8n + 3)^2 + (n^2 + 8n - 9)$. D'où une première solution : $n = -4$ (pour laquelle $N = 12^2$), et les racines -9 et 1 du polynôme $X^2 + 8X - 9$ (pour $n = -9$ et pour $n = 1$, on a encore $N = 144 = 12^2$).
Pour $n < -9$ et pour $n > 1$, le nombre N est strictement compris entre les carrés parfaits consécutifs $(n^2 + 8n + 3)^2$ et $(n^2 + 8n + 4)^2$ donc n'est pas un carré parfait. Restent à examiner les cas des entiers entre -9 et 1. Parmi eux, on a les solutions évidentes $n = 0$, $n = -1$, $n = -7$ et $n = -8$ pour lesquelles le produit N est nul, et la solution $n = -4$ déjà évoquée. Les 4 autres valeurs de n donnent un produit égal à 60 ou à 120 donc ne conviennent pas.
Conclusion, le produit $n(n + 1)(n + 7)(n + 8)$ est un carré parfait si et seulement si l'entier relatif n est égal à -9, -8, -7, -4, -1, 0 ou 1.

Solution (au problème 1) de Jacques Chayé

Le calcul des premiers produits de la forme $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ donne : 24, 120, 360, 840, ... on a ainsi :
$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 5^2$, $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 11^2$, $3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 19^2$, $4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 29^2$.
Ce qui donne à penser que, plus généralement, le polynôme $X(X + 1)(X + 2)(X + 3) + 1$ est le carré d'un polynôme de la forme $aX^2 + bX + c$ et après identification on obtient le polynôme $X^2 + 3X + 1$ ou son opposé. Revenons au problème posé.
Le produit $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ diffère donc d'une unité d'un carré parfait, il n'est donc pas lui-même un carré parfait, exception faite du produit $0 \times 1 \times 2 \times 3$.