RU-BRI-COLLAGES

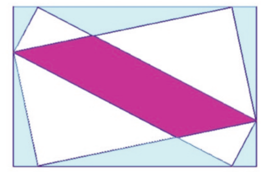
Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.
Frédéric De Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt@gmail.com

Daniel Daviaud (Jonzac) nous envoie une belle étude :

À la manière d'un Sangaku

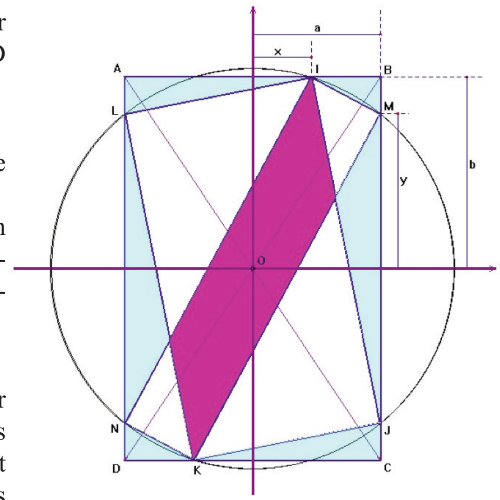
La surface rose et la surface bleue ont la même aire.



Genèse et solution

Au commencement

Un jour je regardais une porte isoplane aussi morne que la plaine de Waterloo. J'eus alors l'idée d'inscrire un rectangle dans un autre dans le but d'agrémenter cette pauvre porte. Et je voulus que chaque côté du rectangle circonscrit ABCD contînt un seul sommet du rectangle inscrit IJKL.



Construction de la figure

L'analyse montre que les sommets du rectangle IJKL sont placés sur un cercle de centre O (centre de ABCD) et de rayon r vérifiant :
(demi-longueur de ABCD) < r < (demi-diagonale de ABCD). Ce cercle coupe en deux points chaque côté de ABCD. Ceci nous fournit les sommets de quatre rectangles inscrits dans ABCD : deux « gros » et deux « minces ». Nous nous intéressons seulement à IJKL (qui est gros) et IMKN (qui est mince).

Résolution du problème posé

L'éparpillement de la surface bleue en six morceaux n'encourage pas à comparer directement les surfaces bleue et rose. Cherchons une autre voie. Nous observons que, d'une part, la surface rose est l'intersection des rectangles IJKL et IMKN, et que d'autre part, la surface bleue est le complémentaire de leur réunion dans ABCD. Donc le problème posé équivaut à démontrer la propriété **$(\mathcal{P})$** suivante : aire(IJKL) + aire(IMKN) = aire(ABCD)**.**
Pour évaluer ces trois aires, on peut poser a, b, x et y comme indiqué sur la figure et on obtient très simplement :
aire(IJKL) = aire(ABCD) – 2aire(LAI) – 2aire(IBJ) = 4ab – (a + x)(b – y) – (a - x)(b + y) = 2ab + 2xy
aire(IMKN) = aire(ABCD) – 2aire(NAI) – 2aire(IBM) = 4ab – (a + x)(b + y) – (a – x)(b – y) = 2ab – 2xy
aire(ABCD) = 2a2b = 4ab. D'où la propriété **$(\mathcal{P})$**.

Commentaire

Pour ne rien cacher, je dois avouer que je m'étais d'abord intéressé à la longueur des côtés de IJKL, mais ceci me laissa de glace. Alors j'ai calculé l'aire de IJKL. Puis celle de IMKN et je fus récompensé par la découverte de la propriété additive **$(\mathcal{P})$** que j'ignorais jusqu'alors. Cependant, pour la grande sagacité des lecteurs de Corol'aire, il fallait un problème plus croustillant. À cette fin, et au risque de me faire maudire, j'ai sciemment noyé le poisson en attirant votre attention vers les surfaces coloriées afin de vous détourner des rectangles IJKL et IMKN. Enfin, je suis revenu à mon souci initial d'ornementer une porte rectangulaire et ceci m'a fait penser aux Sangakus.

Généralisation

Faut-il vraiment que IJKL et IMKN soient des rectangles ? Si on examine le calcul de leurs aires, on voit qu'on a simplement retranché des aires de triangles à l'aire de ABCD. Les angles droits de IJKL et de IMKN n'ont servi à rien. Pour démontrer la propriété **$(\mathcal{P})$** sans modifier notre calcul, il suffit que O soit le milieu de [IK] et que AL = BM = CJ = DN. Dans ce cas, IJKL et IMKN ne sont que des parallélogrammes mais « ça marche encore ».

Des problèmes

92-1 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

Monsieur le Curé rencontre son sacristain ; il lui dit :
« Je viens de croiser trois de mes paroissiens ; le produit de leurs âges, en nombres entiers d'années, est égal à 2450 alors que la somme est égale au double de votre âge. Quels sont donc les âges de ces trois paroissiens ? »
Le sacristain répond : « Je ne peux pas conclure. »
« Vous avez raison », lui répond son curé, « Mais vous connaissez mon âge, eh bien, sachez que je suis plus vieux que chacune de ces trois personnes. »
Comment le sacristain peut-il maintenant conclure ?

92-2 *de Serge Parpay (Niort)* :

Pied au plancher ou araignée au plafond ?

Dans certains calculateurs programmables, on utilise, pour un nombre x, les notations « floor » (plancher) et « ceiling » (plafond), en abrégé « ceil ». floor(x), ceil(x) sont définies comme ci-après.
Pour tout nombre entier, floor(n) = ceil(n) = n. Pour tout nombre m non entier, floor(m) désigne le nombre entier précédant m et ceil(m) désigne le nombre entier suivant m.
L'expression floor(x) correspond en fait à E(x) ou à [x]. Sans « inventer » d'autre notation, x étant un nombre quelconque, comment exprimer ceil(x) ?

92-3 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Il est bien connu que deux droites du plan sont sécantes ou parallèles ! Cette propriété n'est évidemment pas vraie pour l'ensemble des droites de l'espace. Mais qu'en est-il si on se restreint à un sous-ensemble ($\mathcal{D}$) de droites de l'espace ? En d'autres termes, quels sont les ensembles ($\mathcal{D}$) de droites de l'espace tels que deux droites quelconques de ($\mathcal{D}$) soient sécantes ou parallèles ?

Des solutions

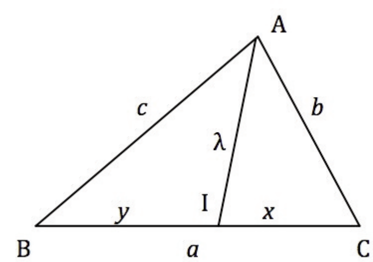
90-2 *de Jacques Chayé :*
« *Calculer les longueurs des bissectrices intérieures des trois angles d'un triangle rectangle en fonction des côtés de l'angle droit.* » Extrait de *Problèmes mathématiques* par E. Lebon (Armand Colin, 1898).

Solution de Serge Parpay :

1) Cas général d'abord*, car pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?*

Soit le triangle ABC quelconque, la bissectrice AI de l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$. Soit a, b, c les longueurs des segments BC, AC, AB, x et y celles des segments [CI] et [IB]. On se propose de calculer la longueur λ de AI.

Dans le triangle ABC, on a $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{\mathrm{C}}$; dans le triangle AIC, on a $\lambda^2 = x^2 + b^2 - 2xb\cos\widehat{\mathrm{C}}$. On en déduit $a\lambda^2 - xc^2 = \left(b^2 - ax\right)\left(a - x\right)$ (1). D'autre part $\dfrac{x}{b} = \dfrac{y}{c} = \dfrac{x+y}{b+c}$, d'où $x = \dfrac{ab}{b+c}$ (2).



En reportant cette valeur de x dans chacun des membres de (1), il vient :

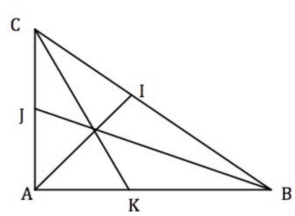
$$a\lambda^2 = \frac{abc^2}{b+c} + \frac{ac}{b+c} \times \left(b^2 - \frac{a^2b}{b+c}\right) \;;\; \lambda^2 = \frac{bc^2}{b+c} + \frac{c}{b+c} \times \left(b^2 - \frac{a^2b}{b+c}\right) \;;$$

$$\lambda^2 = \frac{bc}{b+c} \times \left(c + b - \frac{a^2}{b+c}\right) \;;\; \lambda^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) \text{ (3) d'où } \lambda.$$

Remarque : on calculerait de la même façon la longueur des deux autres bissectrices, en permutant les rôles de a, b et c.
Cas particuliers : triangle isocèle ($b = c$), triangle équilatéral ($a = b = c$), triangle rectangle ($a^2 = b^2 + c^2$).

2) Cas d'un triangle ABC rectangle en A, *ce que demandait l'exercice.*

On peut envisager un calcul spécifique.



Bissectrices BJ et CK

$\cos\widehat{\mathrm{B}} = \dfrac{c}{a}$; $\cos\left(\dfrac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}\right) = \dfrac{c}{\mathrm{BJ}}$ donc, d'après la relation $1 + \cos\widehat{\mathrm{B}} = 2\cos^2\left(\dfrac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}\right)$: $\mathrm{BJ}^2 = \dfrac{2ac^2}{a+c}$,

d'où **BJ** ; de même, $\mathrm{CK}^2 = \dfrac{2ab^2}{a+b}$, d'où **CK**.

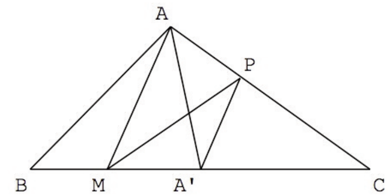
Bissectrice AI = λ . La formule (3) avec $a^2 = b^2 + c^2$ donne le résultat, mais on peut aussi partir de la relation (2) ci-dessus $\mathrm{IC} = \dfrac{ab}{b+c}$.

Dans le triangle AIC : $\dfrac{\mathrm{IC}}{\sin(\pi/4)} = \dfrac{\mathrm{AI}}{\sin\widehat{\mathrm{C}}} = \mathrm{AI} \times \dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AB}}$, d'où $\mathrm{AI} = \dfrac{\mathrm{IC} \times \mathrm{AB}}{\mathrm{CB}\,\sin(\pi/4)}$, soit $\mathrm{AI} = \dfrac{bc\sqrt{2}}{b+c}$.

Cas particulier : triangle rectangle isocèle, ($b = c$, $a = b\sqrt{2}$).

91-1 *de Mathieu Bernat :*
Soit un triangle (ABC) et un point M du côté [BC]. Partager ce triangle en deux parties d'aires égales par une sécante passant par le point M.

Solution de Jean Souville :



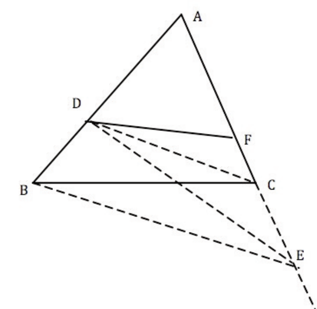
On note A' le milieu du segment [BC], et on suppose que M appartient au segment [BA'] (sinon inverser les points B et C). La parallèle à la droite (AM) issue de A' coupe le segment [AC] en un point P.

La droite (MP) est la droite cherchée, car AMA'P étant un trapèze, les triangles AMP et AMA' ont même aire (ils ont même base AM et même hauteur, celle du trapèze).

Donc aire(BAPM) = aire(BAM) + aire(AMP) = aire(BAM) + aire(AMA')= aire(BAA') = 1/2aire(ABC).
On peut aussi regarder :
aire(MPC) = aire(AMC) - aire(AMP) = aire(AMC) – aire(AMA') = aire(AA'C) = 1/2 aire(ABC).

Solution de Jacques Chayé (qui a changé les notations de l'énoncé) :

Soit ABC un triangle quelconque.
On se propose de partager le triangle en deux parties de même aire par un segment joignant un point donné D entre A et B à un point E entre A et C ou bien entre B et C.

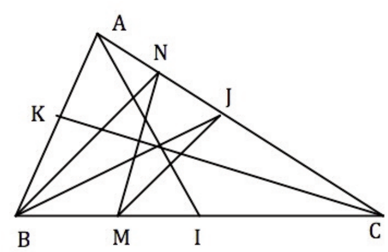


Si D est plus près de B que de A
La parallèle à la droite (DC) passant par B coupe la demi- droite [AC) en E ; d'après l'énoncé de Thalès, le milieu F de [AE] sera entre A et C.
Dans ces conditions, le triangle DEF est la réunion des deux triangles DFC et DCE ; ce dernier a la même aire que le triangle DCB, puisque (BE) // (DC).
Le triangle DEF a donc même aire que le quadrilatère DBCF. Or, F est le milieu de [AE] ; par conséquent les aires des triangles DEF et DFA sont égales.
En résumé, **le triangle ADF et le quadrilatère DBCF ont la même aire**.

Si D est plus près de A que de B
Même démarche, en considérant la parallèle (DC) passant par A qui coupe la demi-droite [BC) en E, etc.

Si D est au milieu de [AB]
Fastoche !

Solution de Serge Parpay :



Soit I, J, K les milieux des côtés [BC], [AC] et [AB] du triangle. Soit 2α l'aire de (ABC), les triangles (ABI), (AIC) et (BJC) ont une aire égale à α. On peut supposer M sur [BI]. Pour le cas M sur [IC], le raisonnement serait semblable, les rôles de B et C étant inversés.
Si M est en I : la sécante (AI) répond à la question.
Si M est un point de [BI[, N ne peut être un point de [BA], car l'aire de (BMN) serait inférieure à celle de (BIA), soit α. N est donc un point de [AC].
Soit N un point de [AC], l'aire β de (AMC) est supérieure à α, aire de (AIC). Si N décrit]AC], l'aire de (MNC) varie continûment, en décroissant, de β à 0, et prend une fois et une seule la valeur α. Il existe une sécante et une seule répondant à la question.

Deux possibilités pour poursuivre (avec ou sans trigonométrie) :
• La parallèle à (MJ) passant par B coupe (AC) en N. On considère le triangle (CBN) et le trapèze (BMJN). Les aires de (BNM) et de (BNJ) étant égales, l'aire de (MNC) est égale à l'aire de (BJC), soit α.
• L'aire de (MNC) doit être α, soit aussi l'aire de (BJC). En exprimant les aires en fonction des éléments des triangles, il vient $1/2 \times CM \times CN \times \sin \hat{C} = 1/2 \times CB \times CJ \times \sin \hat{C}$; par suite CM/CB = CJ/CN.
Les droites (MJ) et (BN) sont parallèles, d'où N.

(MN) est la sécante cherchée.
Cette construction appliquée à M en B (resp. M en I) redonne N en J (resp. N en A).