

Histoire de longueur

Jean-Paul Guichard & Jean-Paul Mercier

Cinquième et dernier épisode
Les longueurs dans les mathématiques grecques

Ce qui marque les mathématiques grecques c'est la séparation entre les mathématiques spéculatives, celles auxquelles on se réfère usuellement quand on en parle, et le calcul ou logistique qui concerne la vie pratique. En ce qui concerne les longueurs, tout ce qui relève de la mesure est du domaine de la logistique. On n'en trouve donc aucune trace dans les grands traités des géomètres grecs comme Euclide et Archimède auxquels nous allons nous intéresser

Les longueurs dans les *Éléments* d'Euclide



Si l'on parcourt les *Éléments* d'Euclide, on n'y trouvera aucune valeur numérique. En ce qui concerne les longueurs il n'y a donc aucune mesure. Or les longueurs sont omniprésentes. Dans les livres arithmétiques c'est même elles qui représentent les nombres ! Dans les livres géométriques on les trouve à la fois dans les définitions, dans les constructions, dans les propriétés des figures et comme outils de démonstration : égalité et inégalité de longueurs, addition et soustraction, partage d'une longueur en deux parties égales, puis égalité et inégalité de rapports de longueurs à partir du livre VI.

Le livre I contient les « éléments » de géométrie des programmes de 6^{ème} et 5^{ème}. Voici une idée de son contenu.

Il contient 23 définitions, 5 demandes, 9 notions communes et 48 propositions : 14 problèmes de construction et 34 théorèmes.

Il commence par l'énoncé des définitions, demandes et notions communes.

Son contenu concerne essentiellement le triangle et le parallélogramme.

On y trouve :

- des constructions simples (triangle équilatéral, segments égaux, angles égaux, bissectrice, milieu, triangle, carré, perpendiculaire, parallèle),
- les cas d'égalité des triangles,
- les propriétés du triangle isocèle et du parallélogramme,
- les liens entre angles et parallèles,
- l'inégalité triangulaire et la somme des angles d'un triangle,
- l'aire du parallélogramme et du triangle (avec la célèbre méthode pour comparer des aires utilisant les parallèles).

Il se termine par le théorème de Pythagore et sa réciproque.

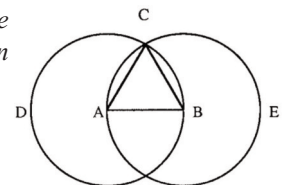
Les grandeurs qui y interviennent sont les longueurs, les angles et les aires que l'on compare (égalité, inégalité), que l'on ajoute ou soustrait, dont on prend le double ou la moitié, les notions communes disant comment se comportent les égalités entre grandeurs vis-à-vis de ces « opérations »

Le cercle est la figure clé des constructions et de leurs validations : il permet 5 constructions (voir les 5 propositions mises en marge) qu'utiliseront les 9 autres.

Par contre on ne trouve dans le livre I, ni ailleurs, aucun périmètre, donc pas de longueur du cercle ! On réalise bien ainsi que les *Éléments* d'Euclide ne sont pas un traité de mathématiques donnant à voir toutes les mathématiques de son époque, mais un ensemble organisé de propositions conçues comme fondamentales, des « éléments », dans lequel on peut puiser pour établir d'autres résultats nouveaux ou déjà connus. Par exemple le théorème sur le concours des trois hauteurs d'un triangle ne fait pas partie des *Éléments*. Par contre la propriété de la bissec-

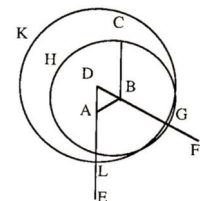
Livres I proposition 1

« Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral »



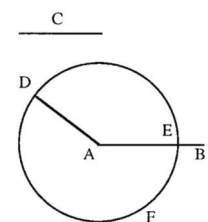
Livres I proposition 2

« Placer en un point donné,
une droite égale à une
droite donnée »



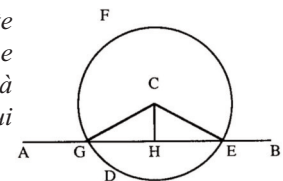
Livres I proposition 3

*« De deux droites inégales
données, retrancher de la
plus grande, une droite
égale à la plus petite »*



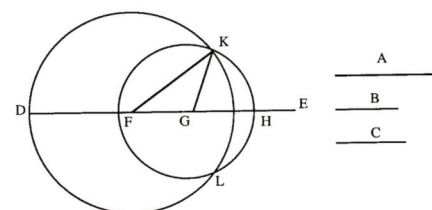
Livres I proposition 12

« Mener une ligne droite
perpendiculaire à une
droite indéfinie donnée à
partir d'un point donné qui
n'est pas sur celle-ci »



Livre I proposition 22

« Construire un triangle avec trois droites égales à trois droites données. Il faut alors que deux de ces droites, prises ensemble de quelque façon que ce soit, soient plus grandes que la droite restante »



trice de l'angle d'un triangle de partager le côté en deux longueurs proportionnelles aux côtés de l'angle en fait partie. Or cette proposition n'est pas utilisée dans les *Éléments*, mais elle le sera très souvent par les mathématiciens : Archimède en fait usage dans la *Mesure du cercle* pour calculer la longueur du cercle. Au passage, nous voyons bien dans cette proposition (voir l'énoncé ci-contre) que la longueur y est considérée en tant que grandeur : on y parle de partage d'un segment, de rapport de longueurs. Dans le triangle, la base, les segments, les côtés sont manipulés en tant que grandeurs que l'on compare, que l'on partage : et cette grandeur c'est leur longueur.

En fait la plupart des propositions des *Éléments*, vont servir d'étapes pour en établir d'autres à l'intérieur des *Éléments*. Mais elles serviront aussi de référence pour une méthode de calcul ou une formule relevant de la logistique, dont elles seront la justification. Et c'est pourquoi il nous semble important d'étudier la longueur en tant que grandeur, ce qui permet en plus de bien savoir de quoi on parle quand on parle de côtés égaux, de hauteurs égales, etc.

La longueur du cercle chez Archimède

C'est à Archimède que nous devons la méthode du calcul de longueur du cercle en l'approchant par le périmètre de polygones réguliers circonscrits et inscrits au cercle. Il le fait dans un court traité de 7 pages intitulé *De la mesure du cercle* » qui ne comporte que trois propositions (voir en marge) :



- la première donne l'aire du disque, la démonstration utilisant la méthode d'exhaustion ;
- la deuxième donne une valeur approchée du rapport entre l'aire du disque et son carré circonscrit, la démonstration utilisant le résultat de la proposition 1 et celui de la proposition 3 qui la suit ;
- la troisième, qui occupe plus de la moitié du traité, donne un encadrement de la longueur du cercle.

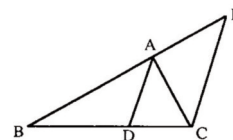
C'est de cette troisième propriété qu'a été tirée la célèbre valeur approchée de π : $22/7$.

Archimède considère un cercle de rayon quelconque, et trace le demi-côté de l'hexagone régulier circonscrit, tangent au cercle (voir figure), dont il donne un minorant de l'inverse de son rapport au rayon du cercle : $EF/TH > 265/153$. Il trace la bissectrice de l'angle de 30° pour obtenir le demi côté du dodécagone circonscrit, puis le rapport analogue : $EF/TH > 265/153$, et ainsi de suite jusqu'au demi côté du polygone régulier à 96 côtés $\Gamma\Delta$ qui lui donne $EF/\Gamma\Delta > 4673 \frac{1}{2} / 153$. D'où il déduit que le rapport du périmètre du polygone à 96 côtés au diamètre du cercle est moindre que $14 \frac{688}{4673} \frac{1}{2}$: « Mais parmi ces deux nombres, le premier contient trois fois le second avec un reste qui est de $667 \frac{1}{2}$ et ce reste est plus petit que la $1/7$ partie de $4673 \frac{1}{2}$; donc le contour du polygone contient le diamètre trois fois, plus une partie... » et donc à plus forte raison pour celui du cercle. Archimède recommence ensuite avec les polygones inscrits. On trouvera une description détaillée du texte d'Archimède et de sa méthode dans *Histoire d'algorithmes* (Belin, 1994, réédition 2001).

Si la formulation de la proposition 3 est proche de celle d'une formule actuelle, on peut cependant noter que la technique utilisée sans cesse par Archimède est celle de la comparaison relative de deux longueurs (savoir combien de fois l'une est contenue dans l'autre) qu'il utilise aussi pour les nombres exprimant le rapport de deux longueurs comme on l'a vu dans la citation fournie. On voit ici tout l'intérêt de la notion de rapport de deux longueurs et de son articulation avec multiple et partage d'une longueur, en l'absence de toute utilisation d'unité.

Livre VI, proposition 3

« Si l'angle d'un triangle est coupé en deux et que la droite coupant l'angle coupe aussi la base, les segments de la base auront le même rapport que les côtés restants du triangle. Et si les segments de la base ont le même rapport que les côtés restants du triangle, la droite jointe à partir du sommet jusqu'au point de section coupera l'angle du triangle en deux. »

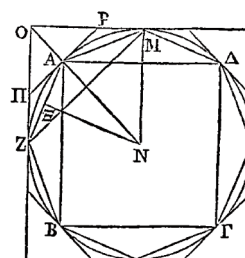


Remarque

En ajoutant à la configuration de cette proposition la bissectrice extérieure, on obtient une division harmonique, et le cercle comme lieu des points dont le rapport des distances à deux points est donné, problème connu d'Apollonius.

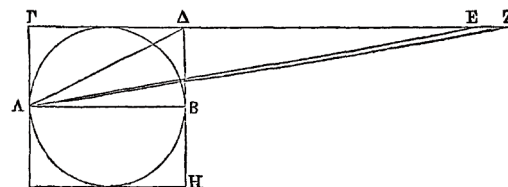
Proposition I

« Un cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle »



Proposition II

« Un cercle est au carré construit sur son diamètre, à très peu de chose près, comme 11 est à 14 »



Proposition III

« La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion de son diamètre, qui est plus petite que le septième de son diamètre, et plus grande que les $10/71$ de ce même diamètre »

