RU-BRI-COL'AGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt@gmail.com

Des problèmes

91-1 *de Jean-Mathieu Bernat (La Rochelle)* :
Soit un triangle (ABC) et un point M du côté [BC]. Partager ce triangle en deux parties d'aires égales par une sécante passant par le point M.

91-2 *de Louis Rivoallan (Rochefort) sur une proposition de Marc Blanchard* :
Dans un triangle ABC on trace trois céviennes concourantes. Par la droite issue de A, on trace sa symétrique par rapport à A', le milieu de [BC], et on procède de façon analogue pour chacune des deux autres droites par rapport aux milieux correspondants. Il faut montrer que les trois droites obtenues sont elles aussi concourantes.

91-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Le casse-tête électronique (Calculatrice)

Dans un magasin vendant des jeux de réflexion, des casse-tête et des puzzles je suis tombé sur une calculette toute simple mais un peu étrange. Elle ne présentait qu'une seule touche d'opération, marquée de l'énigmatique symbole Δ. Toutes les autres touches m'étaient familières.

Au dos du produit on pouvait lire :
Il s'agit pour vous de trouver un moyen d'additionner, de soustraire, de multiplier ou de diviser deux nombres non nuls à l'aide de la seule touche d'opération disponible : Δ.
Intrigué, j'ai acheté la calculette et, rentré chez moi, j'ai effectué les quelques essais ci-dessous :
0 Δ 1= ERROR ; 1 Δ 0 = ERROR ; 1 Δ 1 = 0 ; 1 Δ -1 = 2 ; 1 Δ 2 = 0.5 ;
2 Δ 1 = -0.5 ; 1 Δ 0.5 = -1 ; 0.5 Δ 1 =1.
Si a et b désignent des nombres réels non nuls, comment, d'une façon générale, obtenir alors les résultats $a + b$, $a - b$, et $a \div b$?
Quels sont les cas particuliers où la calculette renvoie le message ERROR alors que ni a ni b ne sont nuls? Comment traiter ces cas ?

Des solutions

88-2 *de Serge Parpay* :

« **J'ai les jetons** » (épreuve de seconde du Rallye Mathématique Poitou-Charentes 2012) :

On a un cercle de périmètre 4 sur lequel on a placé 4 points A, B, C, D espacés de 1, et quatre jetons numérotés 0, 1, 2 et 3. On part de A en y mettant le jeton 0, on tourne de 1 et on place le jeton 1, on tourne de 2 et on place le jeton 2, enfin on tourne de 3 et on place le jeton 3. On constate que les quatre jetons occupent les quatre places…

Solution de Louis Rivoallan :

Les jetons seront numérotés de 0 à N - 1, et les emplacements seront également numérotés de 0 à N - 1. La règle de placement des pions est donc la suivante : le jeton 0 est placé sur le numéro 0, puis le jeton 1 sur l'emplacement 0 + 1 = 1, le jeton 2 sur l'emplacement 1 + 2 = 3 et ainsi de suite, ce qui peut s'énoncer ainsi : le jeton numéro a est placé sur l'emplacement $f(a) = \frac{a(a+1)}{2} \bmod(N)$. Cette application f est une application d'un ensemble de N éléments dans un ensemble de N éléments ; elle est bijective si et seulement si elle est injective.

$$f(a) = f(b) \text{ ssi } \frac{a(a+1)}{2} - \frac{b(b+1)}{2} = 0 \bmod (N) \Leftrightarrow \frac{(a-b)(a+b+1)}{2} = 0 \bmod (N)$$

Premier cas : $N = 2^k$. La relation précédente est alors équivalente à $(a - b)(a + b + 1) = 0 \bmod(2^{k+1})$.
Or a - b et $a + b + 1$ n'ont pas la même parité et de plus $0 \le a < 2^k$ et $0 \le b < 2^k$. Cela implique que $a + b + 1 < 2^{k+1}$ et par suite $a - b$ est un multiple de 2^{k+1}. Compte tenu des inégalités précédentes, le seul cas possible est $a - b = 0$ autrement dit $a = b$. Dans ce cas l'application f est injective, et par suite elle est donc bijective.

Deuxième cas : $N = 2^k \times N'$ où N' est un entier impair strictement supérieur à 2.
Combien de nombres de type $f(a)$ sont-ils congrus à 0 modulo N' ?

Pour tout n allant de 0 à $2^k - 1$, les nombres $\frac{nN' \times (nN'+1)}{2}$ répondent à la question et il en est de même pour tout n allant de 1 à 2^k pour les nombres $\frac{(nN'-1) \times nN'}{2}$. Il y en a donc 2×2^k. Parmi eux, il y en a au moins 2 qui ont le même reste dans la division euclidienne par 2^k. Soient $f(a)$ et $f(b)$ deux de ces nombres.

On a donc $f(a) \equiv f(b) \bmod (N')$ et $f(a) \equiv f(b) \bmod (2^k)$.

Puisque N' et 2^k sont premiers entre eux, on a alors $f(a) \equiv f(b) \bmod (2^k \times N')$.

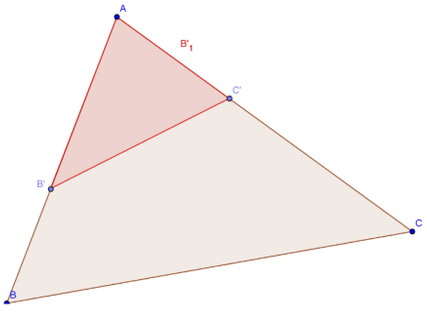
Autrement dit, les jetons distincts numérotés a et b sont sur le même emplacement. Dans ce cas, l'application f n'est pas injective, ni bien sûr bijective.

88-3 *de Jacques Chayé* :

Soit ABC un triangle, soient I, J et K les milieux de [BC], [CA] et [AB] respectivement. M est un point de [BC], N est un point de [CA] et P est un point de [AB]. Soient enfin M' le symétrique de M par rapport à I, N' le symétrique de N par rapport à J et P' le symétrique de P par rapport à K.
Démontrer que les triangles MNP et M'N'P' ont la même aire.

Solution de Louis Rivoallan :

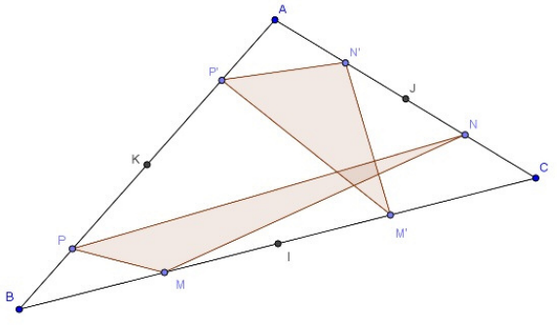
Dans la configuration ci-contre, $\text{aire(AB'C')} = \text{aire(ABC)} \times \frac{\text{AB'}}{\text{AB}} \times \frac{\text{AC'}}{\text{AC}}$.



La démonstration s'effectue en deux temps. D'abord on compare aire(AB'C') avec aire(AB'C) et on obtient la relation $\text{aire (AB'C')} = \text{aire (AB'C)} \times \frac{\text{AC'}}{\text{AC}}$, puis de façon analogue on compare aire(AB'C) avec aire(ABC). On aboutit ainsi à la relation énoncée plus haut.

Considérons la figure de l'énoncé. Notons :

$x = \frac{\text{AP}}{\text{AB}}$, $y = \frac{\text{BM}}{\text{BC}}$, $z = \frac{\text{CN}}{\text{CA}}$ et a = aire (ABC).



En appliquant le lemme précédent, on obtient :
aire(APN) = $x(1 - z)a$;
aire(BMP) = $y(1 - x)a$;
aire(CNM) = $z(1 - y)a$;
aire(AP'N') = $z(1 - x)a$;
aire(BM'P') = $x(1 - y)a$;
aire(CN'M') = $y(1 - z)a$.

Par suite :
aire(MNP) = $a(1-(x(1-z)+y(1-x)+z(1-y))) = a(1-x-y-z+xz+yx+zy)$,
aire(M'N'P') = $a(1-(z(1-x)+x(1-y)+y(1-z))) = a(1-x-y-z+xz+yx+zy)$.
Autrement dit, aire (MNP) = aire (M'N'P').

Solution de l'auteur :

Posons : S = aire(ANP) + aire (BPM) + aire(CMN), S' = aire(AN'P') + aire(BP'M') + aire(CM'N'),
BM = CM' = m, CN = AN' = n et AP = BP' = p.
Avec les notations habituelles dans les triangles, on a :
$2S = AN \times AP \times \sin\alpha + BP \times BM \times \sin\beta + CM \times CN \times \sin\gamma$
$= (AC - CN) \times AP \times \sin\alpha + (BA - AP) \times BM \times \sin\beta + (CB - BM) \times CN \times \sin\gamma$
$= (b - n)p \times \sin\alpha + (c - p)m \times \sin\beta + (a - m)n \times \sin\gamma$.
De même :
$2S' = (c - p)n \times \sin\alpha + (a - m)p \times \sin\beta + (b - n)m \times \sin\gamma$.
Par suite :
$2S - 2S' = bp \times \sin\alpha + cm \times \sin\beta + an \times \sin\gamma - cn \times \sin\alpha - ap \times \sin\beta - bm \times \sin\gamma$.

Mais :
bp×sinα = ap×sinβ car aire(CAP) = aire(CBP'),
cm×sinβ = bm×sinγ car aire(ABM) = aire(ACM'),
an×sinγ = cn×sinα car aire(BCN) = aire(BAN').
S = S' et par conséquent les deux triangles MNP et M'N'P' ont la même aire.

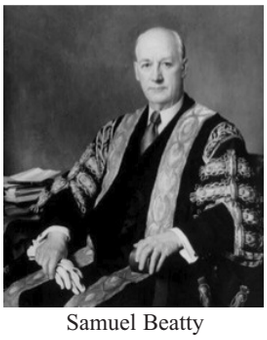
90-1 *de Frédéric de Ligt* :

Si x et y sont deux nombres irrationnels positifs liés par la relation $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ alors les deux ensembles

$E_x=\left\{\left[nx\right], n\in\mathbb{N}^*\right\}$ et $E_y=\left\{\left[ny\right], n\in\mathbb{N}^*\right\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ ($[\ ]$ désigne la partie entière d'un nombre).

Un commentaire de Serge Parpay :

L'exercice proposé par Frédéric De Ligt correspond aux **Suites de Beatty**.
Samuel Beatty (1881-1970) a présenté cette question en 1926. Une démonstration en a été donnée dans le PLOT n° 8 de mars 1979 (P. Chevrier et S. Parpay), puis reprise dans le Bulletin Vert n° 80 de juin 1980. Cette démonstration, assez longue, était accompagnée de commentaires et d'exemples (en particulier avec π et le nombre d'or). Tout en le regrettant, il n'est pas question de la reprendre ici. On peut trouver une démonstration plus rapide, mais plus savante, en consultant wikipedia.


Samuel Beatty

Solution de Frédéric de Ligt :

Il existe une démonstration assez rapide et peu technique de cette étonnante propriété. Si N désigne un entier naturel non nul, le nombre de multiples non nuls de x inférieurs à N vaut $\left[\frac{N}{x}\right]$ et le nombre de multiples non nuls de y inférieurs à N vaut $\left[\frac{N}{y}\right]$.

Les nombres x et y étant irrationnels, leurs multiples non nuls ne sont pas des entiers et on a les inégalités strictes : $\frac{N}{x}-1<\left[\frac{N}{x}\right]<\frac{N}{x}$ et $\frac{N}{y}-1<\left[y\right]<\frac{N}{y}$.

On ajoute membre à membre ces deux inégalités : $\frac{N}{x}-1+\frac{N}{y}-1<\left[\frac{N}{x}\right]+\left[\frac{N}{y}\right]<\frac{N}{x}+\frac{N}{y}$

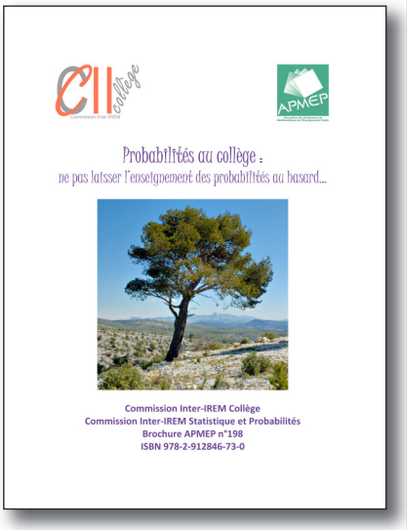
ou encore $N(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})-2<\left[\frac{N}{x}\right]+\left[\frac{N}{y}\right]<N(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$ et finalement $N-2<\left[\frac{N}{x}\right]+\left[\frac{N}{y}\right]<N$.

On en déduit l'égalité : $\left[\frac{N}{x}\right]+\left[\frac{N}{y}\right]=N-1$. Il y a $N-1$ multiples de x ou de y avant N.

Cette égalité est valable pour tout entier N non nul et donc il y a N multiples de x ou de y avant $N+1$. On trouve bien un unique multiple de x ou de y dans l'intervalle $]N\,;\,N+1[$. Le décalage d'un cran provient du fait que l'intervalle]0 ; 1[ne contient pas de multiple de x ou de y car x et y sont supérieurs à 1.

Probabilités au collège

Brochure APMEP n° 198
Coédition APMEP - Commissions « Inter IREM Collège » et « Statistique et Probabilités »

Les probabilités font partie des programmes de troisième au collège. Cette publication présente des situations avec différents objectifs : initier, faire émerger les représentations des élèves sur le hasard, expérimenter, manipuler, donner du sens et mettre en place le vocabulaire.
Chacune des activités décrites a été expérimentée et les productions d'élèves analysées. Les auteurs ont eu le souci de faciliter leur prise en main en proposant une feuille de route et des documents directement à photocopier pour les élèves.
Cette brochure propose également aux enseignants des apports théoriques et un lexique.

Brochure : 120 pages, format A4
Livret pour photocopies : 20 pages, format A4
Prix public : 13 €, prix adhérent / abonné : 9 €.