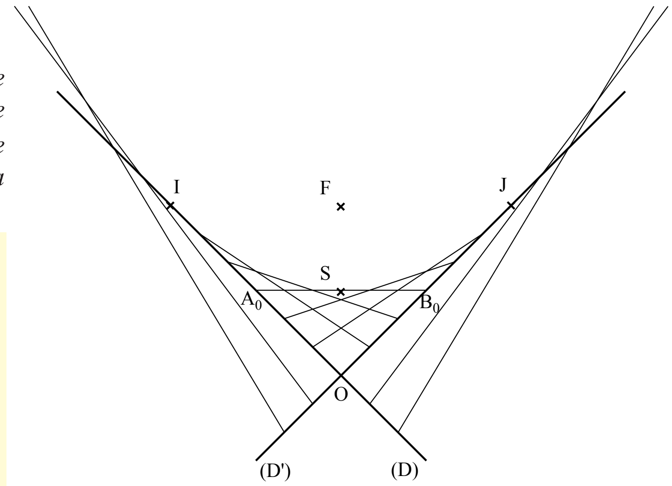
RALLYE : Pour aller plus loin

Serge Parpay

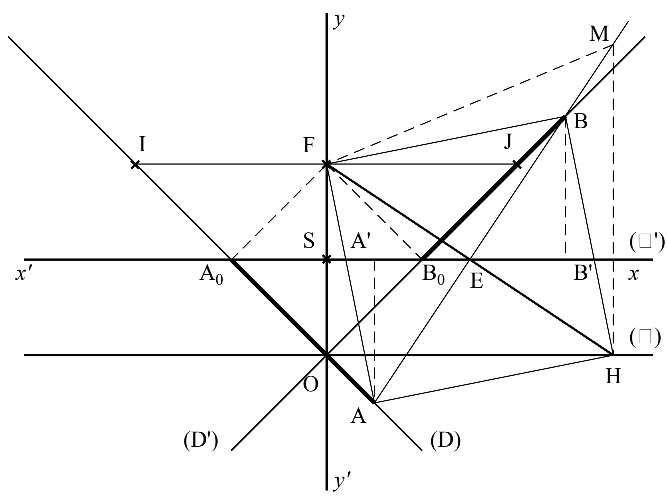


Une démonstration par la géométrie classique de la parabole dans cet exercice proposé à l'entraînement du Rallye Mathématique de Poitou-Charentes en 4ème et 3ème est parue dans le Corol'aire précédent. Voici une démonstration par la géométrie analytique que nous avions promise.

Fils et pointes !
Matériel utilisé : une règle graduée, une équerre et un crayon.
Tracez un repère (O ; I ; J) où OI = OJ = 5 mm.
L'axe des abscisses est gradué de 0 à 10 et l'axe des ordonnées est gradué de même de 0 à 10. Pour chaque entier naturel n compris entre 1 et 10, reliez le point de coordonnées (n ; 0) au point de coordonnées (0 ; 11 – n).
Repassez en rouge la courbe qui apparaît. Pouvez-vous lui donner un nom ?

Le résultat est un arc de parabole.

Démonstration par la géométrie analytique



On munit le plan d'un repère orthonormé (S, $x'x$, $y'y$) (figure ci-contre). A_0 $(-a, 0)$, B_0 $(a, 0)$, F $(0, a)$, O $(0, -a)$. On prend le paramètre l.

Les points A' $(-a + l, 0)$, B' $(a + l, 0)$ sont tels que la condition imposée plus haut est vérifiée. Le point A est situé sur la droite (D) d'équation $y = -x - a$, d'où A $(-a + l, -l)$.

Le point B est situé sur la droite (D') d'équation $y = x - a$, d'où B $(a + l, l)$.

Soit la famille de droites (AB) d'équation $l\,x - ay - l^2 = 0$

Supposons que ces droites aient une enveloppe $(\mathcal{P})$. Le point de contact M dépend de l, ses coordonnées seront deux fonctions de l, M $(x = \varphi(l),\ y = \psi(l))$ (1).

M est sur (AB) : quel que soit l :

$$l\,\varphi(l) - a\,\psi(l) - l^2 = 0 \quad (2)$$

La tangente à $(\mathcal{P})$ en M est définie par $\vec{V}$ $(\varphi'(l), \psi'(l))$

elle est parallèle à (AB) par hypothèse, donc

$$l\,\varphi'(l) - a\,\psi'(l) = 0 \quad (3)$$

Nous avons deux équations (2) et (3) pour déterminer les deux fonctions φ et ψ.

Dérivons l'identité (2) : $\varphi(l) + l\,\varphi'(l) - a\,\psi'(l) - 2l = 0$ (4)

d'où d'après (3) : $\varphi(l) - 2l = 0$ (5)

Pour déterminer $\varphi(l)$ et $\psi(l)$, on a les deux identités (2) et (5)

$x = \varphi(l)$ et $y = \psi(l)$ sont donnés par le système $\begin{cases} lx - ay - l^2 = 0 \\ x - 2l = 0 \end{cases}$ (6) dont la solution est $x = 2l,\ y = \dfrac{l^2}{a}$.

Reste à vérifier si le point M ainsi obtenu décrit l'enveloppe.

Soit donc $x = \varphi(l) = 2l,\ y = \psi(l) = \dfrac{l^2}{a}$, solution de (6). Les identités (3) et (5) sont vérifiées, donc (4) est vérifiée parce que dérivée de (2), donc (3) est vérifiée. D'où il résulte que (AB) est la tangente en M à la courbe $(\mathcal{P})$.

Donc il y a une enveloppe.

À partir des équations paramétriques de $(\mathcal{P})$ on détermine son équation cartésienne : $y = x^2/4a$.

$(\mathcal{P})$ est la parabole de sommet S, de paramètre $2a$, de foyer F (0, a) et de directrice (Δ) d'équation $y = -a$.