RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt@gmail.com

Des problèmes

90-1 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Si x et y sont deux nombres irrationnels positifs liés par la relation $1/x + 1/y = 1$ alors les deux ensembles

$E_x = \left\{ \left[nx \right], n \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $E_y = \left\{ \left[ny \right], n \in \mathbb{N}^* \right\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ ($\left[\ \right]$ désigne la partie entière d'un nombre).

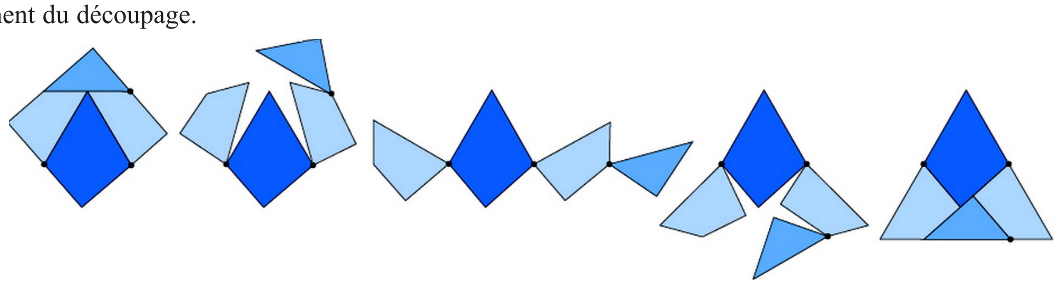
90-2 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :
« *Calculer les longueurs des bissectrices intérieures des trois angles d'un triangle rectangle en fonction des côtés de l'angle droit.* »

Extrait de *Problèmes mathématiques* par Ernest Lebon (Armand Colin, 1898).

90-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Les dés paradoxaux
On numérote les faces de trois dés cubiques avec **tous** les entiers de 1 à 18. Trois joueurs A, B et C s'attribuent chacun un des dés. Ils lancent simultanément leur dé et comparent leur score. Celui qui a le score le plus élevé l'emporte. Comment numéroter ces trois dés pour que les compétitions entre A et B et entre B et C soient équitables mais que la compétition entre A et C soit favorable à C ?

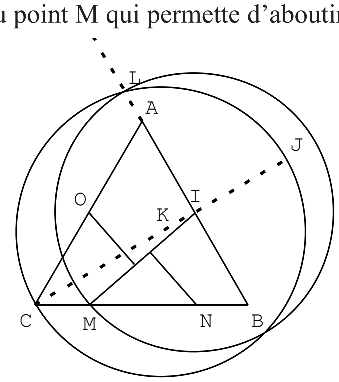
Des solutions

86-1 *de Serge Parpay* :
Henry Ernest Dudeney est connu pour ses énigmes et ses puzzles. Le puzzle ci-dessous fut présenté en 1905 à la Royal Society de Londres. Un assemblage articulé de trois quadrilatères et un triangle peut se déformer et donner soit un triangle équilatéral soit un carré. Les figures ci-dessous sont des étapes de la transformation. On peut construire soi-même un tel puzzle (en imaginant les articulations). Une étude des figures sera suivie de constructions géométriques à la règle et au compas **uniquement**, puis évidemment du découpage.



Il est possible de calculer les caractéristiques de chacune des pièces du puzzle, mais le calcul est parfois laborieux. Rien ne vaut, pour « un vieux nostalgique », la bonne vieille géométrie.
À vous de jouer !

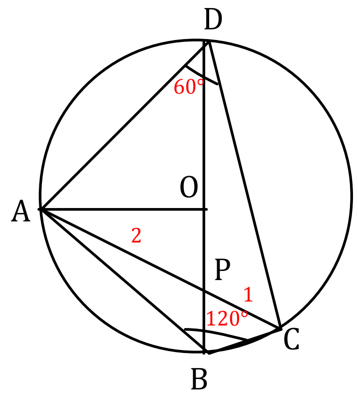
Solution de Frédéric de Ligt :
On observe la figure initiale et la figure finale de l'animation. Deux conclusions s'imposent.
Deux des articulations doivent être placées au milieu des côtés du grand triangle équilatéral et le petit triangle rectangle, qui tourne avec la troisième charnière, a une hypoténuse dont la longueur est la moitié de celle du côté du grand triangle équilatéral.
Si le point M est positionné (toutes les découpes du triangle équilatéral sont alors contraintes) d'une façon quelconque sur le côté [BC] on obtient à priori seulement un rectangle. D'où la nécessité d'une construction du point M qui permette d'aboutir à un carré.
En voici une possible (figure ci-contre).
On note O le milieu du côté [AC] et I le milieu du côté [AB]. On prolonge le segment [CI] au-delà de I pour placer le point J tel que IJ = ½ AB. On note K le milieu de [CJ]. On trace ensuite le cercle de centre K passant par C. Ce cercle coupe la demi-droite [BA) en L. On trace ensuite le cercle de centre I passant par L. Ce dernier cercle recoupe le segment [BC] en M qui était le point cherché. On place ensuite N sur [CB] pour que MN = ½ CB. On achève la construction en projetant orthogonalement les points O et N sur la droite (MI). L'idée utilisée dans cette construction, en exploitant l'égalité des aires du triangle équilatéral et du carré, est que pour obtenir un carré il faut que [MI] ait une longueur qui soit celle du côté du carré.



87-1 *de Walter Mesnier* :

ABCD est un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en P. Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont droits, les angles $\widehat{D}$ et $\widehat{B}$ mesurent 60° et 120° respectivement. Par ailleurs AP = 2 et CP = 1. Calculer l'aire de ABCD.

Solution de Frédéric de Ligt :



Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont droits donc le quadrilatère ABCD est inscriptible. La médiatrice de [AC] coupe le cercle circonscrit de centre O en deux points. Notons D' celui tel que $\widehat{AD'C} = 60°$(propriété de l'angle inscrit). Le triangle AD'C est équilatéral comme isocèle en D' et d'angle au sommet valant 60°. Comme son côté vaut 3 on en déduit facilement que le rayon du cercle circonscrit vaut $\sqrt{3}$.

De la puissance du point P par rapport au cercle : $\overline{PA}.\overline{PC} = -2 = OP^2 - (\sqrt{3})^2$ on tire OP = 1. On connaît maintenant toutes les longueurs des côtés du triangle AOP et la réciproque du théorème de Pythagore nous assure que ce triangle est rectangle en O. Le segment [AO] est donc la hauteur du triangle ADB et l'aire de ADB vaut donc BD × OA / 2 = 3.

On projette C sur [BD] en C'. D'après la propriété de Thalès en configuration croisée dans AOPC'C on a CC' = AO/2. D'où l'aire de BCD vaut la moitié de celle de ABD (ces deux triangles ont la même base) c'est-à-dire 1,5. L'aire de ABCD est donc de 3 + 1,5 = 4,5.

89-2 *de Serge Parpay* :
À l'aide de la suite 1, 2, 3, 4, ….

Un petit amusement.

L'exercice ci-dessous était proposé par le japonais Takeshi Kitano à l'exposition « Mathématiques, un dépaysement soudain », organisée par la Fondation Cartier à Paris.
1) Les nombres doivent être inscrits dans l'ordre : 1, 2, 3, 4, …, et ainsi de suite.
2) Entre les nombres, on peut mettre n'importe quel opérateur mathématique, comme +, -, ×, ÷ , √ , !, etc.
3) Trouver en utilisant les règles 1) et 2) une formule mathématique donnant un nombre, par exemple 2011. Plus la formule est courte, meilleure elle est.
Voici une des réponses de Takeshi Kinato :
$(1 + 2 + 3)^4 + (5 \times 6 \times 7 \times 8) - (9 \times 10 \times 11) + (12 + 13) = 2011$.

Takeshi Kitano

Ma collègue Léa Broutille, pas très douée en mathématiques, m'a proposé pour 2012 la solution :
$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots - 4022 + 4023 = 2012$
Ce n'est pas la moins longue, c'est un peu simpliste, mais enfin ! Mais au fait est-ce juste ? Et surtout pouvez-vous faire mieux que Léa Broutille ?

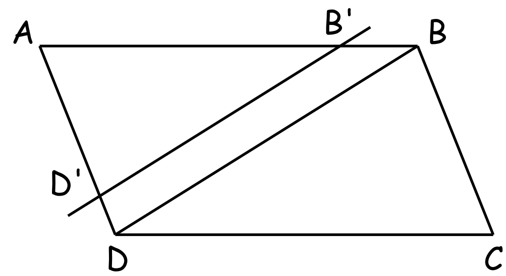
Solution de Bruno Alaplantive :
Dans son livre « Le temps des amours », Marcel Pagnol aurait fait écrire au père de Léa : Napator.
1 – 2 = –1, répétés 4022/2 fois (c'est-à-dire 2011 fois) font –2011 ; et –2011 + 4023 donnent bien 2012. Pour ne pas être douée en maths, Léa n'en donne pas moins une solution exacte… Léa n'a pas tort !
Pour trouver plus court, un message subliminal m'indique que 2012 c'est 2011 et des broutilles… Sacrée Léa !
Il suffit de faire « Takeshi Kitano + 1 » soit :
$(1 + 2 + 3)^4 + (5 \times 6 \times 7 \times 8) - (9 \times 10 \times 11) + 12 + 13 - 14 + 15$
Solution de longueur 15, sensiblement plus courte que celle de Léa. Et voyons maintenant une de longueur 13 :
$((1 + 2) \times 3\,! \times 4\,! \times 5) - ((6 \times 7 + 8) \times \sqrt{9}) - 10 + 11 - 12 + 13$
Qui dit mieux ?
Ndlr : Courrier reçu le lendemain, la nuit portant conseil …
$(((1 \times 2)^3) / 4)^{(5+6)} - 7 \times 8 + 9 + 10 - 11 + 12$
$(1 + 2)^{3\,!} \times 4 - 5\,! - 6\,! + 7 - 8 \times 9 - 10 + 11$

Solution de Frédéric de Ligt :

Pour diminuer encore la longueur de la liste je propose :
$1 \times 2 \times (3 \times 4 \times (5 \times 6 + 7 \times 8 - \sqrt{9}) + 10)$
$1 + 2 - 3 + 4 \times (5 - 6 + 7 \times 8 \times 9)$
$(1 + 2)\,! \times 3\,! + (4\,! - 5) \times (6 + 7) \times 8$
On peut encore descendre d'un cran si on admet la concaténation avec $1 \times 2 + 3 \times \sqrt{4} \times 5 \times 67$, ou l'usage de la valeur absolue avec $\left| 1 \times 2 - 3\,!^4 - 5 - 6\,! + 7 \right|$.
Et dans le même esprit on pourrait descendre jusqu'à $\left| 1 - 2 - 3\,!^4 + 5 - 6\,! \right|$.

89-3 *de Jacques Chayé* :
Partager un parallélogramme, par une droite parallèle à une diagonale, en deux parties dont l'une soit le double de l'autre.
(Bac.sciences – Dijon, 1873)

Solution de Jean-Paul Guichard



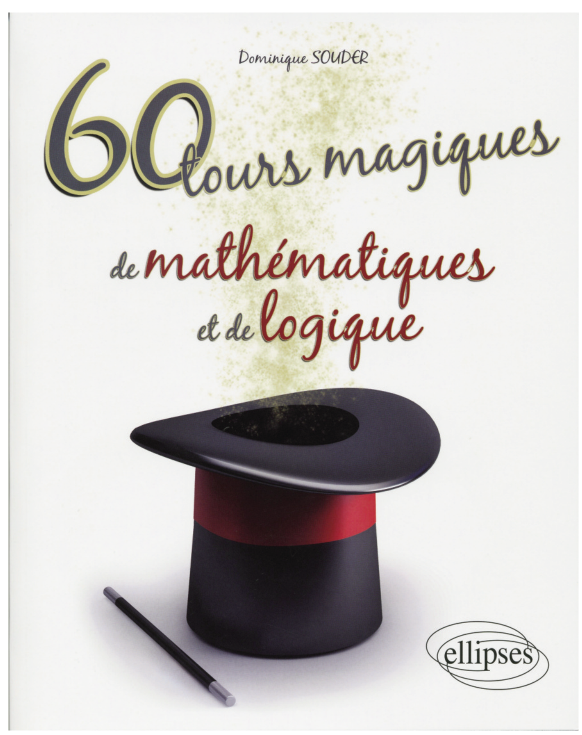
La plus petite des deux parties du parallélogramme est donc un triangle ayant une base parallèle à une diagonale, son sommet opposé étant un sommet du parallélogramme, et dont l'aire est le 1/3 de l'aire du parallélogramme, ou les 2/3 de l'aire du demi-parallélogramme qui lui est homothétique : le rapport d'homothétie des deux triangles est donc $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
Il suffit donc de tracer la perpendiculaire issue d'un sommet à la diagonale opposée, d'en prendre les $\sqrt{\frac{2}{3}}^{\text{ème}}$ qui donnent la hauteur du triangle cherché et de tracer la base de ce triangle. Cette base partage bien le parallélogramme selon le rapport d'aire choisi :

$$\text{aire AB'D'} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \text{b} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \text{h} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\text{bh} = \frac{1}{3}\text{aire ABCD}.$$

La construction de $\sqrt{\frac{2}{3}} \times h$ peut se faire à partir de la mesure de h. Si l'on veut une construction à la règle et au compas (plus l'équerre…), il suffit d'écrire $\sqrt{\frac{2}{3}} \times h$ sous la forme $\sqrt{2h \times \frac{h}{3}}$: la construction classique de $\sqrt{\text{ab}}$, donnée par Descartes dans sa géométrie de 1637, donne la solution après avoir facilement construit 2h (duplication d'une longueur) et h/3 (partage d'une longueur en parties égales).
Cette construction géométrique peut se faire avec un logiciel de géométrie dynamique comme CaRMetal.

60 tours magiques de mathématiques et de logique

de Dominique Souder aux éditions ellipses



Dominique Souder n'est pas un inconnu dans notre Régionale puisqu'il était professeur de mathématiques au lycée Valin à La Rochelle et faisait partie de l'équipe du rallye. Il est intervenu à deux reprises pour des événements marquants de notre Régionale : à l'inauguration de l'exposition « Comment tu comptes ? » à l'Espace Mendès France de Poitiers le 16 novembre 2009 (*Calculs magiques pour jeunes matheux en puissance*) et lors de la première remise des prix de notre rallye en mai 2011 qui, cette année-là, avait pour thème « *La magie des maths* ».

Contrairement aux magiciens professionnels, l'auteur explique à l'aide des mathématiques tous les tours présentés dans cet ouvrage, comme il l'avait fait dans les précédents, souhaitant « *faire aimer davantage les mathématiques* ». Il poursuit : « *Avec les tours de mathémagie, […], ce qui doit émerveiller le plus c'est la logique mathématique qui en permet la réussite* ».

Vous l'avez compris, tout le monde y trouvera son compte : les enseignants pourront y puiser des activités motivantes pour leurs élèves et les élèves, plutôt de lycée, pourront épater leurs camarades, leur famille, avec ces tours qui leur auront fait faire des mathématiques par plaisir.

Jean Fromentin