RALLYE : Pour aller plus loin

Serge Parpay

L'exercice suivant avait été proposé à l'entraînement du Rallye Mathématique de Poitou-Charentes en 4ème et 3ème. Bien sûr, on ne demandait pas de démonstration, seulement les tracés.

Fils et pointes !
Matériel utilisé : une règle graduée, une équerre et un crayon.
Tracez un repère (O ; I ; J) où OI = OJ = 5 mm.
L'axe des abscisses est gradué de 0 à 10 et l'axe des ordonnées est gradué de même de 0 à 10. Pour chaque entier naturel n compris entre 1 et 10, reliez le point de coordonnées (n ; 0) au point de coordonnées (0 ; 11 – n).
Repassez en rouge la courbe qui apparaît. Pouvez-vous lui donner un nom ?

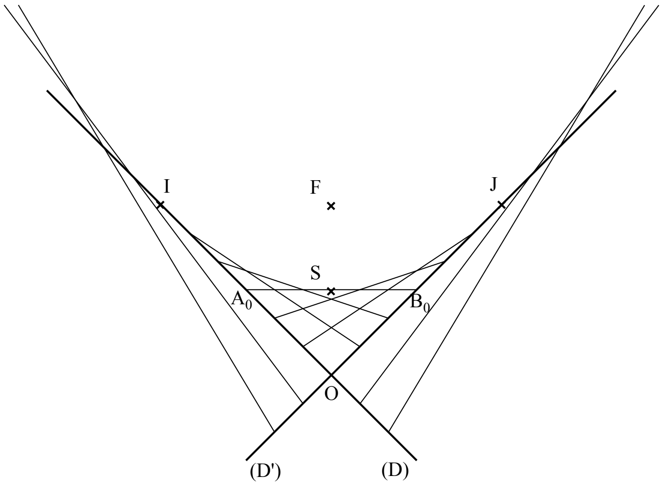

Figure 1

Le résultat est un arc de parabole.

Il est intéressant de généraliser la construction, en utilisant deux droites (D) et (D') orthogonales et de tracer des segments [AB], A sur (D), B sur (D'), selon le même principe, ce qui conduit à une parabole.

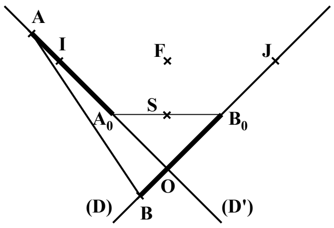
Figure 2

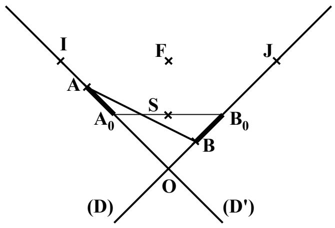
Figure 3

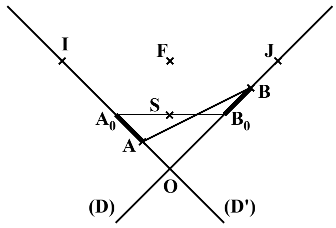
Figure 4

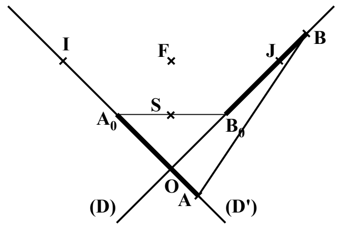
Figure 5

Démonstration par la géométrie élémentaire*

La figure 1 donne un aperçu général ; les figures 2, 3, 4 et 5 donnent une 'évolution' de la position des segments [AB].
O est le point d'intersection de (D) et (D'). I point de (D) et J point de (D') sont des points donnés et tels que IO = OJ. A_0 est le milieu de [IO], B_0 le milieu de [OJ], F le milieu de [IJ] et S le milieu de [A_0B_0] et de [OF].

Les longueurs A_0A et B_0B sont égales sur chacune des figures, l'ordre des points étant à respecter selon les différents cas.
Les segments [IO], [A_0B_0], [OJ] sont des segments [AB] particuliers.
Le raisonnement sera fait en s'aidant de la figure 6, mais il est valable dans tous les autre cas.

On appelle (Δ') la droite passant par A_0, B_0 et (Δ) la parallèle à (Δ') passant par O.
A et B sont de part et d'autre de (Δ') et se projettent orthogonalement en A' et B' sur cette droite. $A_0A = B_0B$ implique $A_0A' = B_0B'$, et réciproquement. $A'B' = A_0B_0$. Les triangles $A_0A'A$ et $B_0B'B$ sont des triangles rectangles isocèles égaux, d'où A'A = B'B. Le milieu E de [AB] est sur (Δ'). (A_0OB_0F) est un carré. La rotation de centre F d'angle π /2 transforme O en J, (D) en (D'), les points A_0, O, A en les points B_0, J, B. Par suite FA = FB ; le triangle (FAB) est rectangle isocèle. FE coupe (Δ) en H. FE = FH. Les diagonales du quadrilatère (FAHB) se coupent en E milieu de chacune d'elles. Ce quadrilatère est un parallélogramme ; de plus l'angle en F est droit et FA = FB. **(**FAHB) est un carré. La droite (AB) est médiatrice du segment [FH]. Soit M le point de (AB) se projetant orthogonalement en H sur [Δ], MH = MF. M est sur la parabole (P) de foyer F et de directrice (Δ). Le triangle FMH est isocèle de base [FH], E est le milieu de [FH]. (ME) est donc bissectrice de l'angle en M. (AB) est tangente en M à (P) (propriété classique de la parabole, démontrable géométriquement).

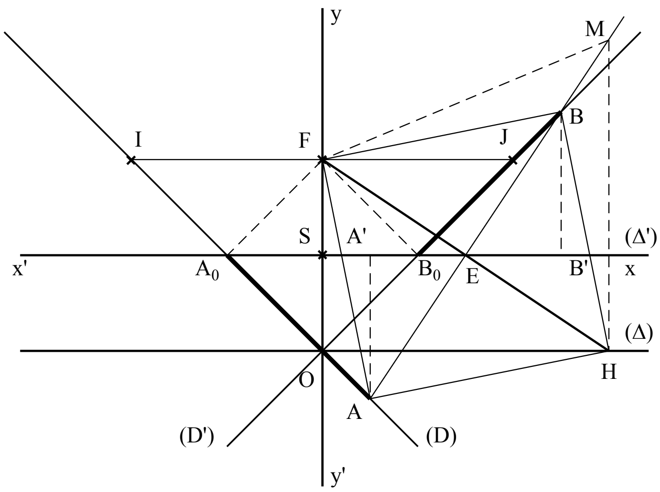

Figure 6

Réciproquement toute tangente à la parabole correspond à un segment [AB] vérifiant la propriété (procéder par identification).

Les droites (AB) enveloppent la parabole (P) de foyer F, de directrice (Δ).

* Une démonstration par la géométrie analytique sera proposée dans le Prochain Corol'aire.