RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.
Frédéric de Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt@gmail.com

Des problèmes

89-1 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Soit un triangle OAB. Soit M le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. Soit les points C et D respectivement sur [AO] et [BO] tels que AC = AM et BD = BM. Quelle position particulière occupe le point M pour le triangle OCD ?

89-2 *de Serge Parpay (Niort)* :
À l'aide de la suite 1, 2, 3, 4, …
Un petit amusement.
L'exercice ci-dessous était proposé par le japonais Takeshi Kitano à l'exposition « *Mathématiques, un dépaysement soudain* », organisée par la Fondation Cartier à Paris.

1) Les nombres doivent être inscrits dans l'ordre : 1, 2, 3, 4, …., et ainsi de suite.
2) Entre les nombres, on peut mettre n'importe quel opérateur mathématique, comme +, - , x , : , √ , ! , etc.
3) En utilisant les règles 1) et 2), trouver une formule mathématique donnant un nombre, par exemple 2011. Plus la formule est courte, meilleure elle est.

Voici une des réponses de Takeshi Kinato :
$(1 + 2 + 3)^4 + (5 \times 6 \times 7 \times 8) - (9 \times 10 \times 11) + (12 + 13) = 2011$.
Ma collègue Léa Broutille, pas très douée en mathématiques, m'a proposé pour 2012 la solution : $1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 4022 + 4023 = 2012$
Ce n'est pas la moins longue, c'est un peu simpliste, mais enfin ! Mais au fait est-ce juste ? Et surtout pouvez-vous faire mieux que Léa Broutille ?

89-3 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :
Partager un parallélogramme, par une droite parallèle à une diagonale, en deux parties dont l'une soit le double de l'autre. (Bac.sciences – Dijon, 1873)

Des solutions

86-2 *de Serge Parpay* :
Montrer que la fonction $((a + b)^2 + 3a + b)/2$ fournit une correspondance 1-1 explicite entre les nombres naturels et les paires (a, b) de nombres naturels.

Solution de Frédéric de Ligt :

Soit k un entier naturel, on note $E_k = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \,/\, a+b=k\}$ et $F_k = \{a \in \mathbb{N} \,/\, \frac{k(k+1)}{2} \le a \le \frac{k(k+1)}{2} + k\}$.

L'application $g_k : (a,b) \mapsto a$ est une bijection de E_k dans $[\![0,k]\!]$.

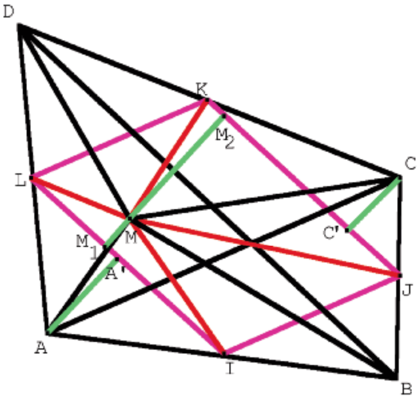
De même l'application $f_k : a \mapsto \frac{k(k+1)}{2} + a$ est une bijection de $[\![0,k]\!]$ dans F_k.

Par conséquent si on note f l'application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ qui au couple (a,b) associe l'entier $\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+3a+b\right]$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}(a+b)(a+b+1)+a$ alors la restriction de f à E_k qui vaut $f_k \circ g_k$ est une bijection de E_k dans F_k. Comme les ensembles E_k forment clairement une partition de $\mathbb{N}^2$ alors que les ensembles F_k forment une partition de $\mathbb{N}$ (car $\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$) alors f est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

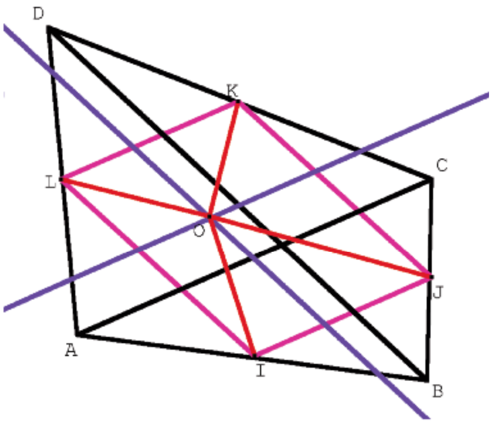
87-2 *de Dominique Gaud* :

Soit I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] du quadrilatère convexe ABCD. Soit M un point intérieur à ce quadrilatère. À quelle condition les aires des quadrilatères AIML, BJMI, CKMJ et DLMK sont-elles égales ?

***Solution de Jacques Chayé* :**



Projetons orthogonalement sur (IL), A en A'et M en M_1 ; de même, projetons sur (JK), C en C' et M en M_2. Remarquons que IL = JK, donc a(AIML) = a(CKMJ) si et seulement si AA' + MM_1 = CC' + MM_2.
Ceci équivaut à dire que M est à égale distance des droites parallèles à (BD) et passant respectivement par A et C.
De même, a(BJMI) = a(DLMK) si et seulement si M est équidistant des droites parallèles à (AC) et passant respectivement par B et D.
D'où la construction du point M :



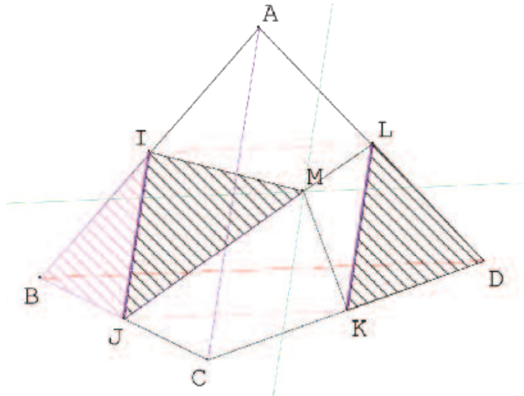
• Par le milieu de [AC] on trace la parallèle (d) à (BD).
• Par le milieu de [BD] on trace la parallèle (d') à (AC).
• Le point d'intersection O de d et d'est l'unique position convenable pour le point M.

Solution de Gilles Auriault :

Les longueurs du triangle BIJ et celles du triangle ABC sont dans le rapport 1/2, leurs aires respectives sont donc dans le rapport 1/4.
On a : Aire BIJ = 1/4 Aire ABC ; de même on aura : Aire KDL = 1/4 Aire ADC.
Si M est solution, alors Aire BJMI = 1/4 Aire ABCD = 1/4 (Aire ABC + Aire ADC).
Or, on a : Aire BJMI = Aire BIJ + Aire JMI = 1/4 Aire ABC + 1/4 Aire ADC.
D'où : Aire JMI = 1/4 aire ADC ; on en déduit que <u>Aire JMI = Aire KDL</u>.
On constate que les triangles JMI et KDL ont même base IJ et LK : IJ = LK = 1/2 AC
Ces deux triangles de même aire auront donc la même hauteur. Si h est la hauteur du triangle ADC, la hauteur du triangle KDL sera h/2, par conséquent, ce sera aussi celle du triangle JMI. On en conclut que le point M se situera sur une droite (p) parallèle à (IJ) et située à une distance h/2 de la droite (IJ).

On démontre de la même manière que :
Aire AIML = Aire AIL + Aire IML = 1/4 Aire ABD + 1/4 Aire BCD, Aire AIL = 1/4 AireABD,
d'où Aire IML = 1/4 Aire BCD. Or 1/4 Aire BCD = Aire JCK donc : Aire IML = Aire JCK. Si h' est hauteur du triangle BCD, alors la hauteur du triangle JCK sera h'/2, celle du triangle IML sera donc aussi de h'/2. Le point M se déplacera sur une droite (p') parallèle à la droite (IL) et située à une distance h'/2 de cette même droite.

<u>En conclusion le point M sera à l'intersection des droites (p) et (p')</u>



Remarque 1 :

Si g et g' sont les hauteurs respectives des triangles ABC et ABD, on peut démontrer de la même manière que le point M se trouve à l'intersection des droites (n) et (n') parallèles respectivement à (LK) et à (JK) situées à une distance g/2 de la droite (LK) et à g'/2 de la droite (JK).

Remarque 2 :

Le parallélogramme IJKL a pour hauteurs (h + g)/2 et (h' + g')/2.

88-1 *de Jean-Christophe Laugier* :
Soit, dans l'espace, cinq demi-droites issues d'un même point. Montrer que l'angle de deux d'entre elles est au plus égal à un droit.

***Solution de Jean Cordier* :**

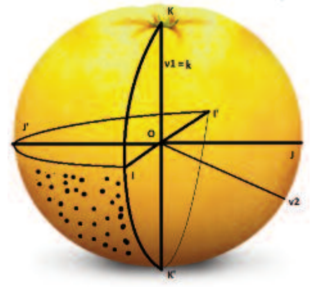


Figure avec défauts évidents.
Les pointillés (à prolonger mentalement) désignent l'intérieur d'un quart de la sphère de rayon 1, défini par les conditions : { $-1 < x < 1$, $y < 0$, $z < 0$ }

« *La terre est bleue comme une orange* »

(Paul Eluard).

On va montrer que la construction de cinq demi-droites telles que les angles soient supérieurs à 90° est vouée à l'échec. Ce qui revient à construire des vecteurs unitaires notés v_k, pour k variant de 1 à 5 ($\|v_k\|=1$) ou encore à construire des points M_k sur la sphère de centre O et de rayon 1.
On va construire v_1 et éliminer une demi-sphère, ensuite v_2 et éliminer un quart de sphère et il restera à utiliser ce qui reste. Ensuite, v_3 et v_4 peuvent ou non exister, mais s'ils existent, alors v_5 ne peut donner plus de 90°.
Le repère (O,i,j,k) est orthonormé et $(v|v') = xx' + yy' + zz'$ désigne le produit scalaire, de plus $(v|v') \geq 0$ donne un angle de 0° à 90°.

Construction de v_1 et v_2 présents sur la figure.
On peut choisir $v_1 = k$. La région « nord » définie par $z \geq 0$, donne $(v|k) \geq 0$. C'est donc au « sud » qu'on trouve v_2 et les suivants. Sans perdre en généralité on choisit v_2 dans le demi-plan d'équation ($x = 0$ et $y \geq 0$), plan qui « porte » la figure. On a donc : v_2 $(0 , y_2 , z_2)$ avec $x_2 = 0$, $y_2 \geq 0$, $z_2 < 0$. Et $(v_1|v_2) < 0$.

Une région *simple* de la sphère où on ne peut pas construire v_3 :
En imaginant le plan P_2 orthogonal à v_2, la sphère se sépare en deux régions (comme pour v_1) et l'une d'elle permet d'éliminer **au moins** le quart de sphère suivant :

$E = \{ v / -1 < x < 1 , y \geq 0 , z < 0 , \|v\| = 1 \}$. (figure : au « sud » à droite).

Dans E, on a $(v|v_2) = yy_2 + zz_2$ avec $yy_2 + zz_2 \geq 0$ car $y \geq 0$, $z < 0$, $y_2 \geq 0$, $z_2 < 0$. Alors v_3 ne peut être dans E et s'il existe, c'est nécessairement dans F défini par :

$F = \{v / -1 < x < 1 , y < 0 , z < 0 , \|v\| = 1\}$. (F est au sud à gauche).

Existence éventuelle de v_4 :
Il reste F qu'on partage en deux parties symétriques : $F_1(x \geq 0)$ et $F_2(x \leq 0)$. Supposons que v_3 et v_4 existent dans F_1, alors $(v_4|v_3) \geq 0$ par un calcul facile, donc v_4 peut éventuellement exister dans F_2. Même chose si on permute les rôles de F_1 et F_2. Enfin, si v_3 et v_4 existent, il reste à construire v_5 qui sera nécessairement dans F_1 ou F_2, ce qui n'est pas possible. Le but est atteint. Cela dit, il peut être intéressant de calculer les régions qui permettent la construction effective de quatre demi-droites.

***Solution de Louis Rivoallan* :**

Soit *A*, *B*, *C*, *D*, *E* cinq points situés respectivement sur les demi-droites de l'espace d_1, d_2, d_3, d_4, d_5. Il faut montrer qu'au moins l'un des angles formés par ces cinq demi-droites mesure moins de 90°, autrement dit qu'au moins l'un des produits scalaires de deux vecteurs distincts pris parmi $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ est positif. Considérons tout d'abord le plan P, passant par *O*, admettant $\overrightarrow{OE}$ comme vecteur normal. Ce plan détermine deux demi-espaces dont l'un contient *E*. Si un des quatre points *A*, *B*, *C* ou *D* est situé dans le même demi-espace que *E*, alors le problème a trouvé une solution. Supposons donc que cela ne soit pas le cas. Considérons alors un plan P', passant par *O*, contenant [*OA*) et perpendiculaire à P et le plan P', passant par *O* et perpendiculaire aux deux précédents. Considérons alors un repère direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ adapté à la situation, c'est-à-dire tel que $E(0 ; 0 ; z_E)$ avec $z_E < 0$; $A(x_A ; 0 ; z_A)$ avec $x_A \geq 0$; $B(x_B ; y_B ; z_B)$; $C(x_C ; y_C ; z_C)$ et $D(x_D ; y_D ; z_D)$ avec $z_A ; z_B ; z_C ; z_D$ positifs. Si un des trois nombres $x_B ; x_C ; x_D$ est positif, alors un des trois produits scalaires $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ ou $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$ est positif et un des angles a une mesure inférieure ou égale à 90°. Supposons que cela ne soit pas le cas, autrement dit que $x_B ; x_C ; x_D$ soient tous trois strictement négatifs. Mais alors, parmi les trois nombres $y_B ; y_C ; y_D$ deux au moins ont le même signe, ce qui implique qu'au moins un des produits scalaires $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$ est strictement positif. Donc au moins un des angles formés par les cinq demi-droites a une mesure strictement inférieure à 90°.