RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.
Frédéric de Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt@gmail.com

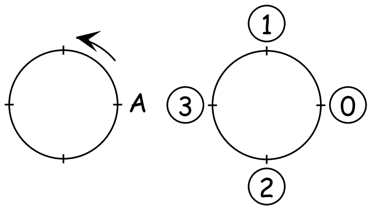
Des problèmes

88-1 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

Soit dans l'espace cinq demi-droites issues d'un même point. Montrer que l'angle de deux d'entre elles est au plus égal à un droit.

88-2 *de Serge Parpay (Niort)* :

« **J'ai les jetons** » (épreuve de seconde du Rallye Mathématique Poitou-Charentes 2012) :
On a un cercle de périmètre 4 et quatre jetons numérotés 0, 1, 2 et 3. On part de A en y mettant le jeton 0 ; on tourne de 1 et on place le jeton 1, on tourne de 2 et on place le jeton 2, enfin on tourne de 3 et on place le jeton 3. On constate que les quatre jetons occupent les quatre places…



Montrer que plus généralement, les n places sont occupées par les n jetons pour $n = 2^p$, p entier.
Pour $n \neq 2^p$, p entier, il y a des places vides et certaines places sont occupées par plusieurs jetons.

88-3 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

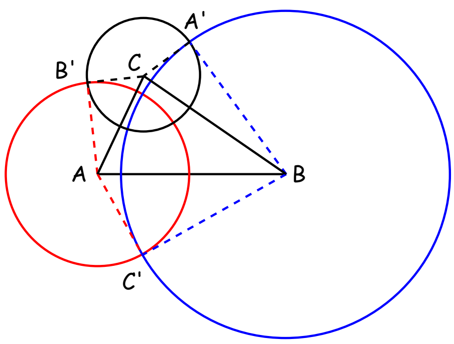
Soit ABC un triangle. Soient I, J et K les milieux de [BC], [CA] et [AB] respectivement. M est un point de [BC], N est un point de [CA] et P est un point de [AB]. Soient enfin M' le symétrique de M par rapport à I, N' le symétrique de N par rapport à J et P' le symétrique de P par rapport à K.
Démontrer que les triangles MNP et M'N'P' ont la même aire.

Des solutions

84-4 *de Jacques Chayé* :

Extrait de *Géométrie. Classe de Mathématiques*. Maillard et Millet (1951, n° 253).
Construire trois cercles orthogonaux deux à deux ayant pour centre trois points donnés.

Solution de Louis Rivoallan :
Les notations utilisées sont le suivantes : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$; r_A, r_B, r_C sont les rayons des cercles de centres A, B et C.
Les centres des cercles cherchés étant connus, il suffit de trouver les rayons. Par définition des cercles orthogonaux, les rayons des cercles sont perpendiculaires. Les triangles *BCA', CAB', ABC'* sont donc rectangles respectivement en *A', B', C'*.
Le théorème de Pythagore permet d'obtenir le système :



$$\begin{cases} r_B^2 + r_C^2 = a^2 \\ r_C^2 + r_A^2 = b^2 \\ r_A^2 + r_B^2 = c^2 \end{cases}$$. On en déduit $$\begin{cases} r_A^2 = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \\ r_B^2 = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \\ r_C^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \end{cases}$$

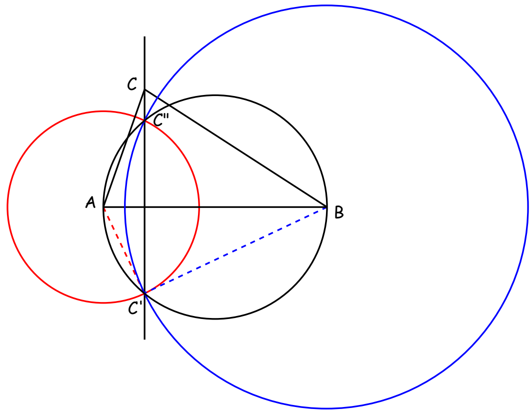
D'après la formule des cosinus, il apparaît alors que $r_A^2 = bc\cos\widehat{A}$.

Par suite $\cos\widehat{A} > 0$ et l'angle $\widehat{A}$ doit être aigu. Il en est de même pour les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
Les longueurs *a, b, c* étant connues, il est aisé de déterminer r_A, r_B, r_C par des manipulations géométriques élémentaires.

La preuve, j'ai pu réaliser la figure avec un logiciel de géométrie !
Mais n'y aurait-il pas plus simple ?

Tout d'abord on peut remarquer que la puissance de C par rapport au cercle de centre A est $b^2 - r_C^2 = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ et que la puissance de ce même point C par rapport au cercle de centre B est $c^2 - r_B^2 = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$. Autrement dit C a la même puissance par rapport à ces deux cercles, donc il appartient à leur axe radical. Nul n'ignore que celui-ci est perpendiculaire à la ligne des centres. Donc la hauteur issue de C dans le triangle ABC est cet axe radical.
Cet axe passe également par les points d'intersection des deux cercles. Or ces points d'intersection appartiennent également au cercle de diamètre $[AB]$: il s'agit donc des points d'intersection de ce cercle avec la hauteur issue de C. Dès lors la construction est simple.

Solution de l'auteur :



Soit A, B et C trois points. Pour qu'un cercle de centre A et un cercle de centre B soient orthogonaux, il faut et il suffit qu'ils se coupent en deux points C' et C'' du cercle de diamètre [AB]. Pour qu'un troisième cercle de centre C soit orthogonal à chacun des deux autres cercles il est nécessaire :

que C soit sur (C'C'') ; ceci n'est possible que si $\widehat{B}$ et $\widehat{A}$ sont aigus (sinon, C se projetterait en dehors du segment [AB]) que C n'appartienne pas au segment [C'C''] ; ceci n'est possible que si $\widehat{C}$ est aigu (sinon, cet angle, interceptant le même demi-cercle que l'angle $\widehat{AC''B}$, serait intérieur au cercle de diamètre [AB] et appartiendrait donc à [C'C'']).
Si ces conditions sont remplies, il existe un et un seul cercle de centre C convenable :
il passe par les points d'intersection A' et A'' du cercle de diamètre [BC] et de la hauteur issue de A du triangle ABC
il passe par les points d'intersection B' et B'' du cercle de diamètre [AC] et de la hauteur issue de B du triangle ABC.
En résumé, à condition que le triangle ABC n'ait que des angles aigus, il existe trois cercles et trois seulement orthogonaux deux à deux et ayant pour centre A, B et C respectivement.

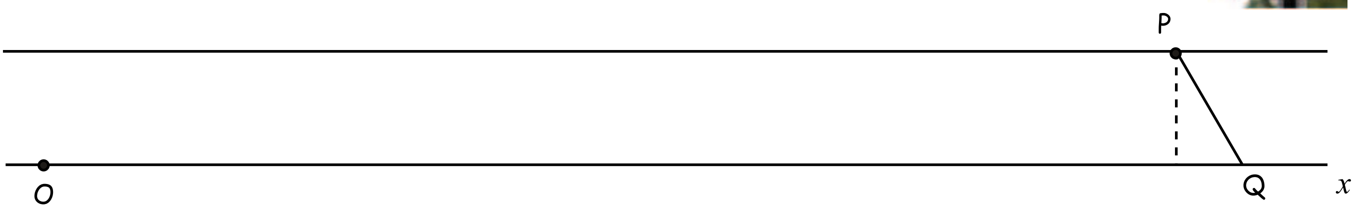
85-2 *de Jacques Chayé* :

Un piéton marche à gauche sur le bord d'une route rectiligne large de 10 mètres, à la vitesse de 6 km/h. Une fois au point P, il se prépare à changer de côté, mais à 100 mètres derrière, arrive une voiture à la vitesse de 50 km/h. Si la voiture et le piéton conservent leurs vitesses, quel(s) point(s) du bord droit de la route celui-ci doit-il chercher à atteindre en ligne droite pour éviter l'accident ?
On modélisera le problème en assimilant voiture et piéton à des points.

Solution de l'auteur :

ATTENTION EN TRAVERSANT

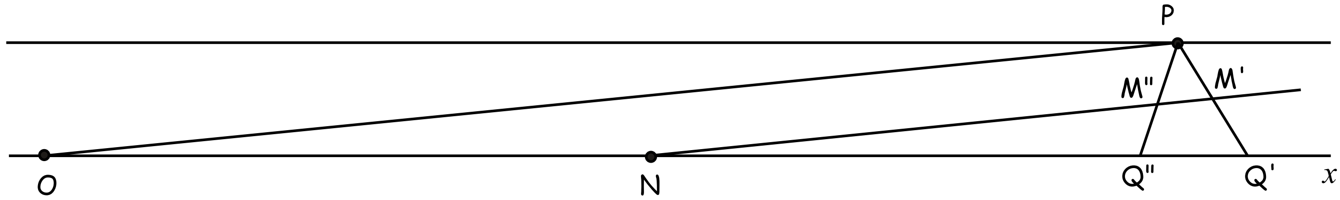
Orientons la trajectoire de la voiture dans le sens de son déplacement et choisissons pour origine le point O où elle se trouve quand le piéton se prépare à traverser.



Soit Q un des points à éviter et soit q son abscisse. Le temps pour arriver en Q est égal, pour la voiture, à $\dfrac{q}{50}$, et pour le piéton, à $\dfrac{PQ}{6}$. D'autre part, $PQ = \sqrt{(q-100)^2 + 10^2}$. La condition $\dfrac{q}{50} = \dfrac{PQ}{6}$ peut donc s'écrire :
36 q² = 2 500 (q² – 200 q + 10 100), ou encore, après simplification : 616 q² – 625 x 200 q + 625 x 10 100 = 0.
Le discriminant réduit est $\Delta' = (625 \times 100)^2 - 616 \times 625 \times 10\,100 = 25^2 \times 28\,400$.

Les deux solutions sont $q' = \dfrac{62500 + 25\sqrt{28400}}{616} \approx 108$ et $q'' = \dfrac{62500 - 25\sqrt{28400}}{616} \approx 95$.

Remarque 1 : Soient, à l'instant t : M' la position du piéton s'il choisissait [PQ'[
M " la position du piéton s'il choisissait [PQ"[
N la position de la voiture sur Ox



$\frac{\overline{ON}}{50} = \frac{\overline{PM'}}{6}$ et $\frac{\overline{OQ'}}{50} = \frac{\overline{PQ'}}{6}$; donc $\frac{\overline{ON}}{\overline{OQ'}} = \frac{\overline{PM'}}{\overline{PQ'}}$.

La réciproque de l'énoncé de Thalès nous permet de conclure : $(OP)//(NM')$.

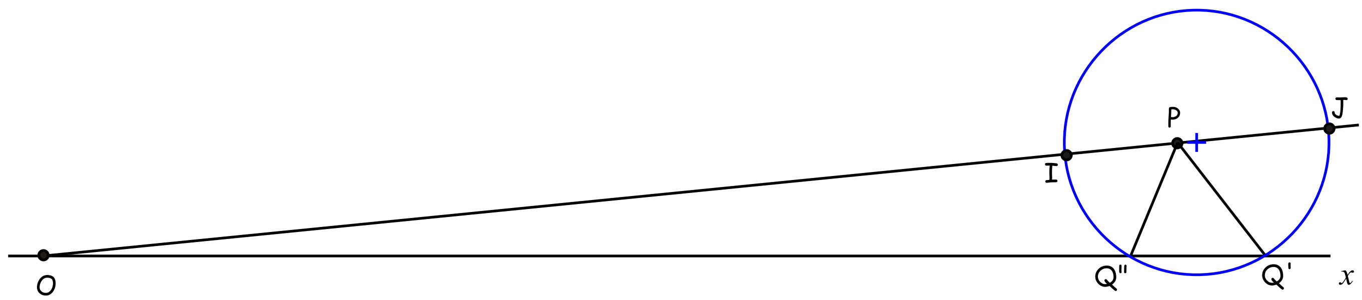
On a de même : $\frac{\overline{ON}}{\overline{OQ"}} = \frac{\overline{PM"}}{\overline{PQ"}}$ et par suite : $(OP)//(NM")$.

Les points N, M' et M" sont donc alignés.

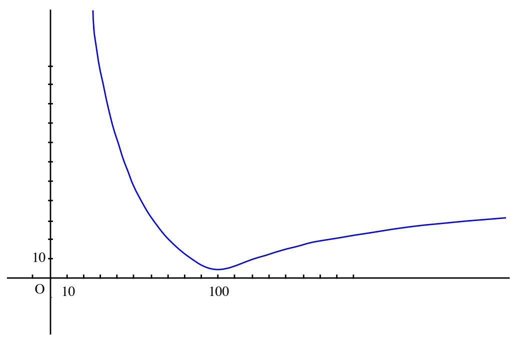
Remarque 2 : Construction géométrique des points Q' et Q".

Les rapports $\frac{Q'O}{Q'P}$ et $\frac{Q"O}{Q"P}$ sont tous les deux égaux à $\frac{50}{6} = \frac{25}{3}$.

Les points Q' et Q" font donc partie du lieu des points dont le rapport des distances à O et P est égal à $\frac{25}{3}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre [I J], I désignant les barycentres de (O ; 3) et (P ; 25) et J le barycentre de (O ; 3) et (P ; -25).



Remarque 3 : Cette situation peut donner lieu à un autre type de problème. Par exemple : au lieu d'imaginer que le piéton garde la même vitesse et doive choisir son point d'arrivée sur Ox, on peut envisager le cas où décidant d'arriver en un point R d'abscisse r sur Ox, il ait alors à choisir une vitesse évitant la rencontre avec la voiture.



Soit v la vitesse à éviter. On a : $\frac{PR}{v} = \frac{r}{50}$ ou encore $v = \frac{50\,PR}{r}$.

On peut donc exprimer v en fonction de r : $v = f(r) = \frac{50\sqrt{(r-100)^2+100}}{r}$.

Il n'est pas inintéressant d'étudier la fonction f.

$f'(r)$ est du signe de : $\frac{r-100}{\sqrt{(r-100)^2+100}} \times r - \sqrt{(r-100)^2+100}$

c'est-à-dire du signe de : h
$(r-100)r - (r-100)^2 - 100 = 100\,(r-101)$

La fonction passe donc par un minimum pour $r = 101$, $f(101) = 4{,}975\ldots$ [on n'est pas très loin du cas où le piéton traverse à la perpendiculaire avec $f(100) = 5$].

87-3 *de Frédéric de Ligt* :

On partage la suite des entiers naturels de 1 à $2N$ en deux ensembles de N nombres. On ordonne les nombres du premier ensemble dans le sens croissant $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$ et ceux du second dans le sens décroissant $b_1 > b_2 > \ldots > b_N$.

Montrer qu'alors $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots |a_N - b_N| = N^2$.

Solution de Philippe Rogeon :

Pour des raisons de symétrie, on peut supposer que N est dans l'ensemble A, en position k : il y a donc $k-1$ éléments de A qui sont inférieurs à N, et $N-k$ qui lui sont supérieurs. Les k autres entiers sont alors dans l'ensemble B, et ne peuvent être que $b_1, \ldots, b_k$. On a donc :

$$\begin{cases} a_1,\ldots,a_{k-1} < N \\ a_k = N \\ a_{k+1},\ldots,a_N > N \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1,\ldots,b_k > N \\ b_{k+1},\ldots,b_N < N \end{cases}$$

On calcule alors

$$\sum_{p=1}^{N}\left|a_p-b_p\right| = \sum_{p=1}^{k}(b_p-a_p) + \sum_{p=k+1}^{N}(a_p-b_p) = \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{k}b_p + \sum_{p=k+1}^{N}a_p\right)}_{\text{Entiers de (N + 1) à 2N}} - \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{k}a_p + \sum_{p=k+1}^{N}b_p\right)}_{\text{Entiers de 1 à N}} = \sum_{p=1}^{N}(N+p) - \sum_{p=1}^{N}p = N\times N = N^2$$

Solution de l'auteur :

Pour chaque indice i entre 1 et N l'un des membres du couple (a_i ; b_i) est supérieur strictement à N tandis que l'autre est inférieur ou égal à N.
S'il n'en était pas ainsi et que, par exemple, il existait un indice i tel que a_i et b_i soient tous deux inférieurs ou égaux à N, alors au moins i éléments de A seraient inférieurs ou égaux à N ($a_1 < a_2 < \ldots < a_i$) et au moins $N-i+1$ éléments de B seraient de même inférieurs ou égaux à N ($b_i > b_{i+1} > \ldots > b_N$). Mais cela ferait un total de $N+1$ entiers non nuls distincts inférieurs ou égaux à N. Contradiction. On aboutirait à une semblable contradiction en supposant l'existence d'un indice i tel que a_i et b_i soient tous deux strictement supérieur à N.

On a pour chaque indice i : $\left|a_i-b_i\right| = \sup(a_i;b_i) - \inf(a_i;b_i)$ avec $\sup(a_i;b_i)$ supérieur strictement à N et $\inf(a_i;b_i)$ inférieur ou égal à N. On a finalement :

$$\sum_{p=1}^{N}\left|a_p-b_p\right| = \sum_{p=1}^{N}(N+p) - \sum_{p=1}^{N}p = N\times N = N^2$$

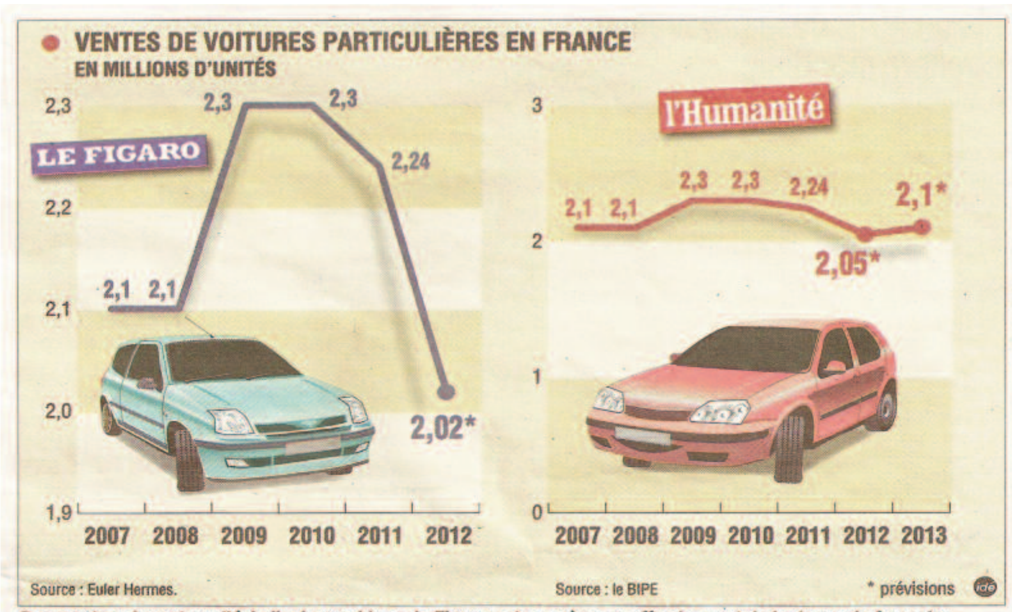
Comment fait-on parler les graphiques ?!

ÉCONOMIE DES CLÉS POUR COMPRENDRE

L'Humanité : 3 janvier 2012

Le marché automobile français ne va pas si mal

Un effondrement de la demande de véhicules en France et en Europe de l'Ouest pour justifier les suppressions de postes ? Les prévisions du BIPE pour 2012 et 2013 invitent à relativiser.



Comment, en jouant sur l'échelle du graphique, *le Figaro* met en scène un effondrement de la demande française.