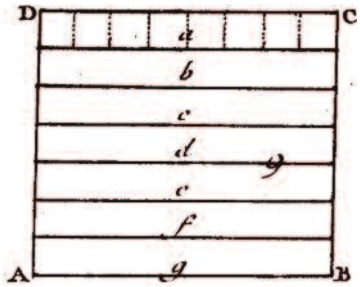
Petite histoire de la grandeur Aire, en 5 épisodes

Jean-Paul Guichard

Quatrième épisode
Les systèmes créés pour comparer et évaluer les aires

Intéressons-nous maintenant au système mis en place pour évaluer une aire, c'est-à-dire celui reposant sur un carré unité partagé en 100 carrés. En Chine, dans le livre des Neuf chapitres, on utilise déjà le quadrillage reposant sur un pavage du plan par des carrés. D'une façon générale, le choix d'une unité quelconque qui pave le plan euclidien permet de construire un système de mesure des aires : il suffit alors d'appliquer une échelle k à l'unité d'aire choisie pour obtenir k^2 éléments d'aire $1/k^2$. Un tel pavage du plan, avec des triangles quelconques par exemple, ne permettrait pas de créer une technique qui soit en prise avec les usages sociaux actuels ni avec l'évaluation de l'aire par « rectangulation » (voir l'épisode 1).
Nous l'avions déjà un peu esquissé dans l'épisode 3 en nous référant aux unités existantes mais, pour compléter notre analyse, citons Clairaut lorsqu'il parle des aires :
« Or il est évident que la mesure commune des surfaces, doit être elle-même une surface, par exemple, celle d'une toise quarrée, d'un pied quarré, etc. Ainsi mesurer un rectangle, c'est déterminer le nombre de toises quarrées, ou de pieds quarrés, etc., que contient sa surface.
Prenons un exemple, pour soulager l'esprit. Supposons que le rectangle donné ABCD ait 7 pieds de haut sur une base de 8 pieds, on pourra regarder ce rectangle comme partagé en 7 bandes, a, b, c, d, e, f, g, qui contiendront chacune 8 pieds quarrés ; la valeur du rectangle sera donc 7 fois 8 pieds quarrés, ou 56 pieds quarrés.



Maintenant si on se rappelle les premiers éléments du calcul arithmétique, et que l'on se souvienne que multiplier deux nombres, c'est prendre l'un autant de fois que l'unité est contenue dans l'autre, on trouvera une parfaite analogie entre la multiplication ordinaire et l'opération par laquelle on mesure un rectangle. On verra qu'en multipliant le nombre de toises, ou de pieds, etc. que donne la hauteur, par le nombre de toises, de pieds, etc., que donne la base, on déterminera la quantité de toises quarrées, ou de pieds quarrés, etc. que contient la superficie. »
Là encore, l'unité d'aire choisie est naturellement un carré et la formule produite est justifiée par la « parfaite analogie » ; cependant, on peut regretter le manque d'explication à une question du type : mais pourquoi ça marcherait pour tous les nombres, même ceux qui ne mesurent pas un côté en nombre entier d'unités ? Car ça ne fonctionne plus en se basant uniquement sur le dénombrement. Clairaut produit, explique une technique mais ne peut pas la justifier totalement. La technologie du dénombrement ne suffit pas. On sent bien que c'est la technologie du réseau, s'intégrant dans la théorie des aires, qui va permettre d'expliquer la formule en tant que technique.

Chez Lebesgue, dans sa Mesure des grandeurs, la construction du système repose aussi sur le choix d'un carré C initial. Il construit ensuite un réseau R plan à partir de C (niveau 0). Pour évaluer l'aire d'une partie F bornée du plan, il est nécessaire de dénombrer le nombre de carrés du réseau R formés entièrement de points de F (noté a_0) et le nombre de carrés du réseau R dont certains points appartiennent à F (b_0). On obtient alors un encadrement de l'aire de F. Pour obtenir une aire plus précise, il subdivise chaque carré de R en 100 carrés de même côté et obtient le réseau R_1 (niveau 1) composé d'unités 100 fois plus petites. Ces deux réseaux suffisent pour évaluer l'aire d'un rectangle représenté sur la page d'un cahier d'un élève de $6^{\text{ème}}$ en considérant les unités légales. En effet, un réseau composé de cm² voire de mm² permet d'obtenir l'aire du rectangle lorsque ses côtés sont donnés à la précision du mm. Il est à noter que l'évaluation numérique de l'aire repose sur le dénombrement (voir Clairaut) mais aussi sur le réseau mis en place (voir Lebesgue).
Dans le cas où la précision serait insuffisante, nous ne pourrions donner qu'un encadrement. C'est le cas du réseau en cm² pour des longueurs exprimées en nombre entier de mm ; dans ce cas le réseau initial en cm² ne permet de donner qu'un encadrement de l'aire exprimée en cm². Si l'on désire une meilleure précision, la technique mise en place peut être réitérée : on peut recommencer indéfiniment…

Cette technique pour évaluer une aire est efficace là aussi pour résoudre une classe de problèmes qui s'ajoute aux précédents. En fait, la partie F sera quarrable lorsque la différence entre les aires qui encadrent la surface tend vers zéro quand le réseau devient de plus en plus fin. C'est la construction de l'analyse qui se met alors en place. La théorie sur laquelle repose ce réseau est « l'analyse », la technologie serait « l'intégration ».
Bien entendu, au niveau du programme de $6^{\text{ème}}$, cela peut paraître surprenant mais il n'y a qu'à imaginer ce qui va arriver pour le cercle : l'aire du disque ne pourra être produite, justifiée et expliquée que par une théorie reposant sur « l'analyse » et une technologie reposant sur « l'intégration » avec, comme technique « des découpages et des assemblages de triangles en rectangle », comme le font les Chinois, à l'instar d'Archimède (voir l'épisode 2).
Cette technique du réseau nous permettra donc d'évaluer n'importe quelle surface, même courbe, en ayant une technique valable. Grâce à cette technique, on pourra, évaluer (par un encadrement ou précisément) l'aire de n'importe quelle surface quarrable.

Ainsi, le type de tâche « calculer une aire » s'enrichit d'une technique rationalisée ; on créé un nouveau savoir-faire limité au rectangle, il restera à montrer que cette technique ne réussit que sur une partie de la tâche. Elle ne fonctionnera pas pour un triangle : faut-il multiplier deux côtés d'un triangle pour obtenir son aire, lesquels choisir ? Mais nous pourrons, grâce à cette technique, résoudre toute une classe de problèmes riche qualitativement et quantitativement. Le type de tâche « comparer des aires » lui aussi s'enrichit : il suffira pour cela de comparer les nombres qui mesurent les unités d'aire.

Les élèves de 6ème n'arrivent pas vierges de connaissances sur les aires, et, comme le précise Y. Chevallard « …souvent la technique est déjà accompagnée d'un embryon ou d'un vestige de technologie ». Les découpages, assemblages de figures nous permettent de mettre en place des techniques qui répondent au type de tâche « comparer des aires » et de donner un sens à la grandeur dans un premier temps. Dans un second temps, on peut mesurer ou comparer une aire en utilisant le réseau. Remarquons que chacun des deux temps répond à un type de tâche sans avoir la prétention de clore le questionnement. Même si on crée un savoir-faire, celui-ci repose sur une classe bien précise de problèmes, laissant le champ libre à d'autres études.
À titre d'exemple, on pourra, en classe de 5 ème user de la même démarche mathématique, les types de tâches seront les mêmes, mais les techniques évolueront sans se substituer les unes aux autres. Dans l'univers des tâches routinières, surgiront des tâches problématiques que l'on ne sait pas accomplir. Pourra-t-on transformer toute figure bornée du plan en un triangle de même aire ? Pourra-t-on évaluer l'aire du triangle ? On comprend la place du parallélogramme, de la symétrie centrale dans le programme de 5ème. On le voit, le savoir n'est pas sclérosé. On pourrait faire de même aux niveaux suivants ou précédents.

Références bibliographiques pour cet épisode.

CLAIRAUT Alexis. Les Éléments de Géométrie de Clairaut. Lambert et Durand, Paris, 1741. Réédition : J. Gabay, Paris, 2006. Fac simile de l'édition de 1753, éd. Siloë, Laval, 1987.

LEBESGUE Henri. La mesure des grandeurs. Monographies de L'Enseignement Mathématique n° 1 Genève, 1935. Réédition : A. Blanchard, Paris, 1975.