

Histoire de longueur

Jean-Paul Guichard & Jean-Paul Mercier

L'origine des longueurs est à chercher du côté des pratiques humaines naturelles comme le dénombrement de longueurs égales liées à des objets. Les noms des unités laissent à voir leur origine : ce sont les parties du corps que l'homme reporte sur d'autres objets à évaluer par rapport à lui-même. Le pas, pour évaluer les mesures dans les champs, le pied, pour des mesures au sol, le doigt pour des objets à porter (les arcs et les flèches ?), le demi-bras ou la coudée pour des objets hors sol, l'empan pour des longueurs évaluées avec la main encore souvent en action aujourd'hui. Il y a eu certainement des distances évoquées oralement, liées au temps, par exemple les journées de marche. Ces échantillons de longueurs sont aussi des outils, au même titre que la pige d'équerrage, la corde, le compas, la règle qui les ont ensuite supplantés. Nous retrouverons tout cela dans les civilisations que nous allons visiter, civilisations qui sont au programme de la classe de sixième : Mésopotamie, Égypte, Grèce ; mais également dans les anciennes mesures jusqu'à la création du mètre qui va marquer une rupture déterminante par le choix d'une unité universelle et du système décimal pour les multiples et sous-multiples de l'unité. Nous y trouverons aussi le lien fondamental qui existe entre la mesure des longueurs et la construction des nombres fractionnaires, ce lien sur lequel s'appuie Lebesgue pour sa construction des nombres dans la Mesure des grandeurs. Nous terminerons notre voyage en abandonnant la sphère de la vie pratique et en allant voir le traitement de la longueur en tant que grandeur non mesurée par une unité chez deux grands auteurs des mathématiques grecques : Euclide et Archimède.

Partons à la découverte.

Premier épisode Longueurs en Mésopotamie

Les tables métrologiques mésopotamiennes nous renseignent sur une distinction des usages qui étaient faits des dimensions. On trouve des listes ou des tables pour les longueurs, les largeurs, les diagonales et des tables distinctes pour les hauteurs et les profondeurs. Les surfaces étaient déduites des premières, les volumes étaient déduits des secondes. L'existence des tables de hauteurs est à mettre en relation avec la définition des volumes (« surfaces » d'épaisseur 1 kus₃), où les dimensions horizontales des objets de l'espace (longueurs, largeurs, diagonales) sont de nature différente des dimensions verticales (hauteurs et profondeurs).

Voici une première liste d'unités de longueurs :

Danna	←30—	uš	←60—	ninda	←12—	kuš ₃	←30—	šu-si
(11 km)		(360 m)		(6 m)		(50 cm)		(17 mm)

Des outils de géomètre ou d'arpenteur sont évoqués par les cannes d'arpenteurs suivantes : gi-1-ninda (6m), gi-1-kuš₃ (50 cm), gi-1/2-kuš₃ (25 m), gi-1/3-kuš₃ (17 cm), Gi-2/3-kuš₃ (33 cm).



Coudée de Nippur (Musée d'Istanbul)

Une comparaison entre le système ancien et le système métrique a été faite par Maurice Caveing et nous montre les correspondances entre les unités de longueurs mésopotamiennes.

Sumérien	Français	Système métrique	doigt	empan	pied	coudée	pas	canne	borne	corde	stade	lieue
su-si	doigt	16,5 mm	1	1/15	1/20	1/30						
su-bad	empan	24,75 cm	15	1	3/4	1/2						
kus	pied	33 cm	20	4/3	1	2/3						
Kus /U	coudée	49,5 cm	30	2	3/2	1						
Kus-ara	pas	74,25 cm	45	3	9/4	3/2	1					
gi	canne	2,97 m	180	112	9	6	4	1				
ninda	borne	5,94 m	360	24	18	12	8	2	1			
Su	corde	59,40 m	3600	240	180	120	80	20	10	1		
Us	stade	356,40 m		1440	1080	720	480	120	60	6	1	
danna	Lieue	10692 m						3600	1800	180	30	1

Dans certaines tablettes, comme A24194 (voir l'encadré de la page suivante) contenant une série de 247 problèmes (sorte de banque de problèmes de même type avec des variantes), on peut voir l'usage des opérations sur les longueurs : addition, soustraction, partage, fraction de fraction. Mais les problèmes sont des problèmes de calcul de surface de rectangles et non de périmètre.

Sur d'autres tablettes (voir C. Proust), on peut lire des listes de données sur les dimensions : *sag largeur*, *uš longueur*, *uš-sag longueur-largeur (designant un calcul dépendant des deux dimensions)*, *uš-an-na longueur supérieure*, *uš-ki-ta largeur supérieure*, *uš-gid₂-da longueur la plus longue*, *uš-buru₃ profondeur*... Les mésopotamiens savaient donc décrire les diverses dimensions d'un quadrilatère. On y remarque ce qui est lié aux bases d'un trapèze ou à la section d'un cône ou d'une pyramide tronquée.

Les longueurs sont plutôt rencontrées dans les calculs de surface ou de volume. Mais nous trouvons des calculs de longueurs liés au cercle ou aux comparaisons proportionnelles comme dans les tablettes BM 85210 et BM 85194. Dans la tablette BM 85210 (voir ci-contre), on a une application simple de la proportionnalité, une utilisation des quotients de longueurs, des proportions et une belle description d'une règle de trois.

Une statue, au Louvre, montre un prince-architecte Gudea muni d'une règle, d'un stylet et d'un plan. La règle est graduée en seize sections, comportant des graduations de un à six séparées par des intervalles vides. L'architecte avait une place très élevée dans la hiérarchie de ces civilisations.

Quant à la tablette BM 85194 (voir ci-contre), elle est la plus ancienne trace du calcul de la circonférence du cercle avec la formule « 3 fois le diamètre ». Ce calcul s'inscrit dans un calcul de volumes.



Tablette, avec un plan d'architecte gravé, sur les genoux de Gudea, gouverneur de Lagash. Statue vers - 2120

Extraits de tablettes

1) Calculs de longueurs dans un calcul d'aire

*igi-14- gal2 uš [sag]
 à a-ra2 2 [a-na uš ugu]
 sag diri [2.29 dah]
 igi-7-gal2 igi-11- gal2*

Au 1/14 de la longueur, la largeur et deux fois l'excédent de la longueur sur la largeur, ajouter 2.29 ; le 1/7 du 1/11

(Tab. A24194)



Location de champ



Comptabilité

2) Calcul d'une longueur et d'une distance

Trouve (le problème de) la ville. La hauteur de la muraille est 3 ninda. La marche est une demi-coudée. La hauteur de la marche est 1 40 coudée. Qu'est l'escalier ? Quelle longueur dois-je franchir pour que je prenne la ville ennemie de Marduk ?

Toi, dénoue l'inverse de 1 40, la hauteur de la marche, tu trouveras 36. Porte 36 à 2 30, la marche, tu trouveras 1 30. Porte 1 30 à 4, la hauteur de la muraille, tu trouveras 4 30. Tu franchiras une longueur de 4 30. C'est la façon d'opérer.

(Tab. BM 85210)

3) Circonférence du cercle

Toi, la circonférence est un sosse, qu'est le diamètre ? Soustrais le tiers d'un sosse, la circonférence, tu trouveras 20 ; le diamètre est 20. Double 5 l'enflure, tu trouveras 10. Ajoute 10 à 20, le diamètre, tu trouveras 30 ; c'est le diamètre. Triple tu trouveras 1.30 : la circonférence de l'excavation est 1.30. ...

La suite montre l'utilisation de la circonférence pour calculer l'aire du disque – le sol, puis ensuite calculer des volumes de terre à déplacer...

(Tab. BM 85194)

Fragment de cône d'argile inscrit mentionnant le creusement d'un canal par Urukagina, roi de Lagash vers - 2350



Journées Nationales de l'APMEP à METZ

Conférence d'ouverture :

La meilleure et la pire des erreurs de Poincaré

de **Cédric Villani** (médaille Fields en 2010)



Conférence de clôture :

Les preuves sans mots

par **Xavier Viennot** accompagné, dans sa conférence, par le violoniste **Gérard Duchamp**