RU-BRI-COLLAGES

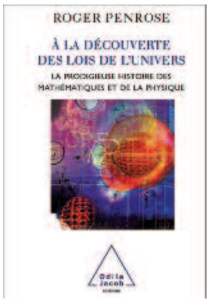
Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt@gmail.com (***attention au changement d'adresse !***)

L'œil le plus juste ne vaut pas la règle. Proverbe chinois

Un courrier de Serge Parpay

Un exercice de seconde du Rallye Poitou-Charentes 2011 (« Les disques magiques de Roger Penrose ») proposait à partir d'un disque découpé en secteurs de retrouver tous les nombres 1, 2, …, en prenant soit les nombres de chacun des secteurs, soit la somme des nombres inscrits dans deux ou plusieurs secteurs consécutifs. Ainsi, pour le disque de la figure 3, on peut retrouver tous les nombres de 1 à 21. Il était demandé de reconstituer les disques pour les cas d'un disque de 2 secteurs (nombres 1 à 3), d'un disque de 3 secteurs (nombres 1 à 7), d'un disque de 4 secteurs (nombres 1 à 13). Pourquoi ces nombres 3, 7, 13 ? Quel est le cas suivant ?



Dans le livre de Roger Penrose « *À la découverte des lois de l'univers »,* les « disques magiques » étaient présentés d'une façon plus complexe, en lien avec les plans projectifs finis.

À l'intérieur d'un cercle (figure 1) tourne un disque divisé en secteurs séparés par des flèches (figure 2). Pour la position de la figure 3, on obtient sur le cercle, au bout des flèches, les nombres 0, 1, 4, 14, 16. Une rotation de $5\pi/21$ donne les nombres 5, 6, 9, 19, 0. Une rotation de $11\pi/21$ donne les nombres 11, 12, 15, 4, 6. Pour chacun des nombres p du cercle, par exemple 11, il n'y a qu'une rotation possible amenant une flèche sur p, l'autre sur 0, et la somme des nombres des secteurs consécutifs concernés est p ; par exemple : pour 14, les secteurs 1, 3, 10 donnent bien $1 + 3 + 10 = 14$, et pour 11, les secteurs 2, 5, 1, 3 donnent bien $2 + 5 + 1 + 3 = 11$.

Voici à titre d'information d'autres disques : (1, 2, 7, 4, 12, 5), (1, 2, 10, 19, 4, 7, 7, 9, 5), (1, 2, 4, 8, 16, 5, 18, 9, 10). Et il y en a d'autres encore plus grands !

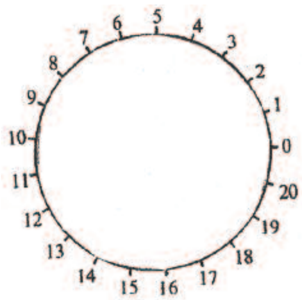


Figure 1

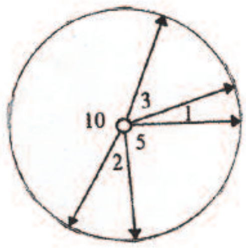


Figure 2

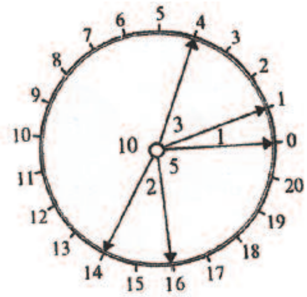


Figure 3

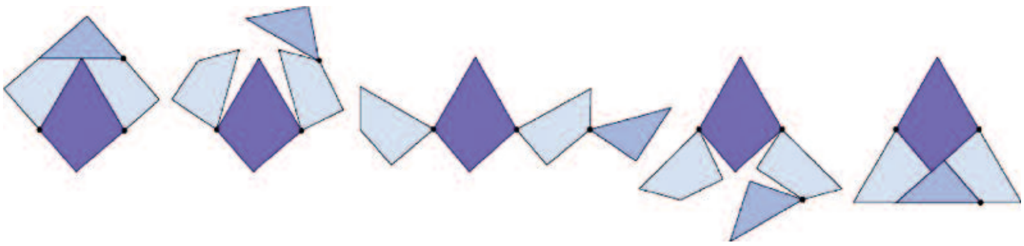
Roger Penrose précise que les « disques magiques » sont équivalents à ce qu'on appelle les « ensembles différence parfaits ». Il renvoie aux livres de J.Howie, *« On the SQ-universality of T6 groups », Forum Math1, p.269-271,* et de J.W..P. Hirschfeld, *« Projective Geometry over Finite Fields », Clarendon Press, Oxford (2ième édition)* que des lecteurs plus savants voudront peut-être consulter. Bon courage et bien amicalement !

PS : Je ne sais pas si de telles manipulations sont susceptibles d'intéresser les élèves ; quoiqu'il en soit, elles sont plutôt curieuses et sortent de l'ordinaire.

Des problèmes

86-1 *de Serge Parpay (Niort)*

Henry Ernest Dudeney (ci-contre) est connu pour ses énigmes et ses puzzles. Le puzzle ci-dessous fut présenté en 1905 à la Royal Society de Londres. Un assemblage articulé de trois quadrilatères et un triangle peut se déformer et donner soit un triangle équilatéral soit un carré. Les figures ci-dessous sont des étapes de la transformation. On peut construire soi-même un tel puzzle (en imaginant les articulations). Une étude des figures sera suivie de constructions géométriques à la règle et au compas **uniquement**, puis évidemment du découpage.



À vous de jouer !

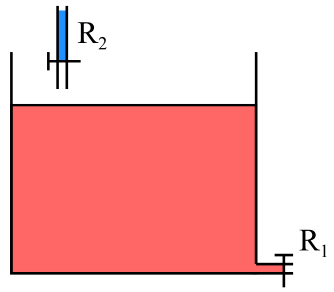
Il est possible de calculer les caractéristiques de chacune des pièces du puzzle, mais le calcul est parfois laborieux. Rien ne vaut, pour « un vieux nostalgique », la bonne vieille géométrie.

86-2 *de Serge Parpay (Niort)*
Montrer que la fonction $((a + b)^2 + 3a + b)/2$ fournit une correspondance 1-1 explicite entre les nombres naturels et les couples (a, b) de nombres naturels.

« À la découverte des lois de l'univers », Roger Penrose (Editions Odile Jacob-Sciences).

86-3 *de Jacques Chayé (Poitiers)*
Une manière de mettre de l'eau dans son vin
Une cuve contient un volume V de vin.
On répète plusieurs fois l'opération suivante :
1. Prélèvement dans la cuve d'un volume v à l'aide du robinet R_1.
2. Introduction d'un volume v d'eau à l'aide du robinet R_2.
3. Homogénéisation du mélange.

Quel est le volume d'eau dans la cuve à la fin de la $n^{\text{ième}}$ étape ?



Des solutions

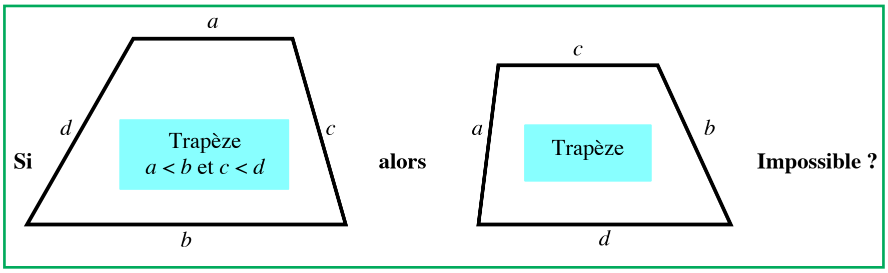
81-1 *de Louis Rivoallan*
La boîte de diapos
La boîte de diapositives est rectangulaire (n x m) et elle est remplie entièrement. Les diapositives sont rangées dans l'ordre chronologique « horizontalement », numérotées 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … sur la première ligne, puis n ; $(n + 1)$; … sur la deuxième ligne, $(2n)$; $(2n + 1)$; … sur la troisième ligne et ainsi de suite.
Il s'agit désormais de la classer dans l'ordre chronologique, mais cette fois-ci, « verticalement », la première colonne étant 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … ; $m – 1$, la seconde m ; $(m + 1)$; …, la troisième $2m$; $(2m + 1)$; … et ainsi de suite. Si je prends la diapositive numéro u_0, dans la configuration initiale, elle va prendre la place de la diapositive u_1, qui elle-même prendra la place de la diapositive u_2 …

Peut-on définir simplement la fonction $u_{p+1} = f(u_p)$?

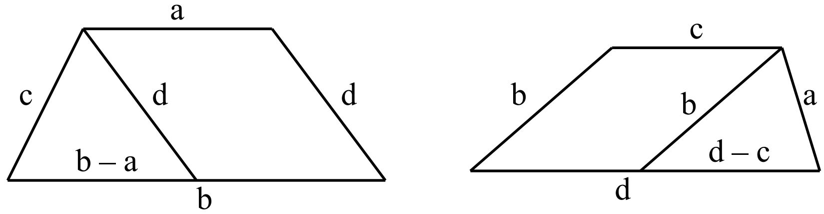
À quelle condition, si $u_0 \neq 1$ et $u_0 \neq n \times m$, la boîte sera-t-elle bien rangée après exactement n x $m – 2$ manipulations ?

Solution de Frédéric de Ligt
La diapositive numéro $mk + r$ ira à la place de la diapositive numéro $k + nr$ pour tout k compris entre 0 et $n – 1$ et pour tout r compris entre 0 et $m – 1$ (bornes comprises). Donc si $u_p = mk + r$ alors $u_{p+1} = k + nr$. En notant [ ] la partie entière d'un nombre, on a $[u_p / m] = k$ et $r = u_p - m[u_p / m]$. $u_{p+1} = [u_p / m] + n(u_p - m[u_p / m])$.
Et finalement, l'expression de f : $u_{p+1} = f(u_p) = n\, u_p - [u_p / m](mn – 1)$.
Pour ranger la boîte en $nm – 2$ manipulations, il faut et il suffit que les diapositives numéro 0 et $nm – 1$ soient les deux seules diapositives qui restent à leur place ou, dit autrement, que f n'admette que ces deux points fixes. Une condition nécessaire et suffisante est donc que $mk + r \neq k + nr$ ou encore que $(m-1)k \neq (n-1)r$, ce qui peut se traduire par $(m – 1)$ et $(n – 1)$ premiers entre eux.

83-1 *de Serge Parpay*



Solution de l'auteur
On suppose que les deux trapèzes existent et on partage alors chacun en un triangle et un parallélogramme comme indiqué sur les figures ci-contre.



L'inégalité triangulaire donne dans les deux triangles : c + (b –a) > d et a + (d –c) > b mais c + b ne peut à la fois être strictement plus grand et strictement plus petit que a +d. Les deux trapèzes ne peuvent donc exister simultanément.

84-3 *de Louis-Marie Bonneval*
Tout le monde connaît le principe de la roulette russe. On peut y jouer sans danger avec un dé ordinaire : les deux joueurs lancent alternativement le dé, le premier qui sort le 6 a perdu. Quel est le risque de perdre de chacun ?

Solution de Louis Rivoallan

Un calcul à l'aide de probabilités conditionnelles montre que la probabilité que le premier joueur perde est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $(5/6)^2$ et de premier terme 1/6, tandis que la probabilité que ce soit le second qui perde est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $(5/6)^2$ également mais de premier terme 5/36. Tous calculs faits, on trouve respectivement 6/11 pour le premier et 5/11 pour le second. Le petit programme écrit en Turbo Pascal « valide » cette réponse :

```
Program roulette_russe;
Uses Crt; {pour utiliser des procédures existantes dans cette bibliothèque}Const n = 1000000;  {nombre de parties à effec-
tuer}
Var
A_joue, fini: Boolean; {fini est vrai lorsque une partie est terminée; A_joue est vrai lorsque c'est le joueur A qui joue}
a,b: longint;  {a est le nombre de parties perdues par A, b est le nombre de parties perdues par B}
BEGIN  {début du programme}
 a:=0;b:=0;  {initialisation des compteurs}
Randomize;   {initialisation du générateur de nombres aléatoires}
Repeat   {chaque boucle correspond à une partie jouée}
A_joue:=TRUE;  { initialisation de A_joue, puisque c'est A qui joue le premier}
Repeat   {chaque boucle dorrespond à un lancer de dé, ou de tir au pistolet, au choix}
fini:= random(6)=1;  {le nombre aléatoire est 0;1; ...; 5. Si le nombre aléatoire est 1, le joueur a perdu}
If fini Then
Begin If A_joue then a:=a+1 Else b:=b+1 End  {Lorsque la partie est finie, on regarde qui l'a perdue}
Else A_joue:= Not A_joue ; {et si elle n'est pas finie, c'est au tour de l'autre de jouer}
Until fini  ;  {la partie est finie, on passe à la suivante}
Until a+b=n;   {tant qu'on n'a pas effectué toutes les parties, on continue, sinon on s'arrête }
writeln((a/n -6/11) )  ; {pour tester l'hypothèse}
Repeat until KeyPressed;   {astuce pour pouvoir lire sur l'écran}
END
```

Solution de l'auteur

Appelons A le premier joueur, B le second. Nous supposerons bien entendu que le dé est régulier. Notons respectivement SA et SB les évènements « A sort 6 le premier », « B sort 6 le premier », p et p' leurs probabilités.

1ère méthode

Si A ne tire pas 6 au premier coup, B se trouve dans la situation de A au début du jeu. Autrement dit, en notant E l'événement « Le 6 ne sort pas au premier coup », $P_E(SB) = P(SA)$. Or SB implique E, donc $P(SB) = P(E \cap SB) = P(E)P_E(SB)$.

D'où $p' = \frac{5}{6}p$. D'autre part p + p' = 1, car la probabilité que le 6 ne sorte pas est nulle (c'est $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$).

On en déduit que $p = \frac{6}{11}$ et $p' = \frac{5}{11}$.

2ème méthode

Appelons D la durée de la partie, c'est-à-dire le rang de la première apparition du 6. D suit la loi géométrique de paramètre 1/6 :

$P(D=n) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ pour tout n naturel non nul.

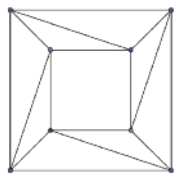
$$p = P(D\text{ est impair}) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{6}\times\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{k} = \frac{6}{11}.$$

$$p' = P(D\text{ est pair}) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k+1} = \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{k} = \frac{5}{6}p = \frac{5}{11}.$$

85-1 *de Frédéric de Ligt*

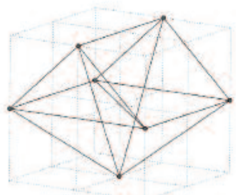
« Perdez un point ! ? »

Dans la figure ci-contre, les 8 points sont reliés entre eux par des segments. De chaque point partent quatre segments et les segments ne se croisent pas. Est-il possible de réaliser une figure qui vérifie la même propriété mais composée cette fois de seulement 7 points ?



Non solution de Bruno Alaplantive

Je ne trouve pas d'argumentation satisfaisante à une réponse négative ; ce dont je m'excuse *platement.* Mais il m'apparaît qu'à la Région de la bravitude, on ne soit pas tenu à la planitude (pour ne pas dire platitude ; ce qui en constituerait assurément)… !!! Auquel cas une solution possible est donnée ci-contre.



Solution de l'auteur

Pour prouver l'impossibilité de réaliser la liaison demandée entre 7 points on va montrer un peu plus et se passer de la contrainte de n'utiliser que des segments pour s'en tenir à de simples arêtes. C'est alors en fait une conséquence du célèbre théorème de Kuratowski (1930) :

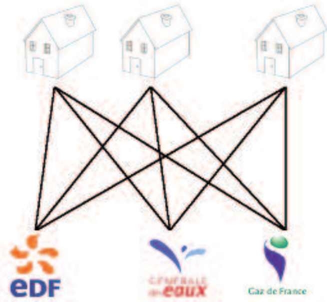
Un graphe est planaire si et seulement si il contient un sous-graphe qui est une subdivision de $K_{3,3}$ ou de K_5.

Nous n'utiliserons ici qu'une partie (assez facile à démontrer) de cette étonnante propriété :

Un graphe dont un des sous-graphes est une subdivision de $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Quelques éclaircissements

- Ajouter des sommets sur les arêtes d'un graphe G le transforme en un graphe G' appelé subdivision de G. Il est assez intuitif de voir que si G n'est pas planaire, G' ne l'est pas non plus.
- Le graphe K_5 qui ne nous servira pas est formé de cinq points où chacun des points est relié à tous les autres. Il part donc quatre arêtes de chaque sommet.
- Le graphe $K_{3,3}$ est représenté ci-contre. Vous aurez sans doute reconnu une configuration classique dont on peut montrer sans trop de difficulté, en travaillant la formule d'Euler, qu'elle n'est pas planaire (c'est le fameux problème insoluble des trois maisons qu'il faut relier à l'eau, au gaz et à l'électricité sans que les raccordements ne se croisent).

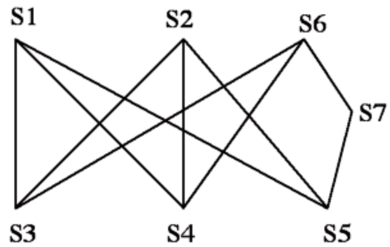


Revenons maintenant au problème posé. Puisque les sommets ne sont pas tous reliés entre eux (sinon il partirait 6 arêtes de chaque sommet), on peut en trouver deux, disons S1 et S2, qui ne sont pas reliés entre eux. Notons alors S3, S4, S5, S6 et S7 les autres sommets. Comme S1 et S2 sont tous deux reliés à quatre des ces cinq sommets, ils en ont donc au moins trois en commun.

Premier cas. S'ils en ont quatre en commun, disons S3, S4, S5 et S6 alors le dernier sommet S7 est aussi obligatoirement relié à ces quatre sommets. Il apparaît donc dans ce cas un sous-graphe du type $K_{3,3}$ constitué des deux triplets de points {S1 ; S2 ; S7} et {S3 ; S4 ; S5}. Par conséquent il se trouve toujours au moins deux arêtes qui se croisent.

Second cas. S'ils en ont seulement trois en commun, disons S3, S4 et S5, le sommet S1 est alors relié à S6 ou S7, choisissons S6, S2 est donc relié à S7.

- Dans le cas où S6 et S7 ne sont pas reliés entre eux, ils sont donc tous deux reliés à S3, S4 et S5. Les deux triplets de points {S1 ; S2 ; S7} et {S3 ; S4 ; S5}, par exemple, sont les sommets d'un graphe de type $K_{3,3}$. La conclusion est la même qu'auparavant.
- Dans le cas où S6 et S7 sont reliés entre eux, ils sont aussi tous deux reliés à deux des trois points S3, S4, S5. Ils ne peuvent avoir qu'un seul de ces points en commun car dans le cas où ils auraient les deux mêmes en commun il n'arriverait que deux arêtes sur le troisième sommet alors que tous les autres sommets seraient déjà saturés. Disons que S6 est relié à S3 et S4 alors que S7 est relié à S4 et S5. Le graphe obtenu contient alors un sous-graphe (figure ci-contre) qui est une subdivision de $K_{3,3}$. La conclusion est identique aux cas précédents.

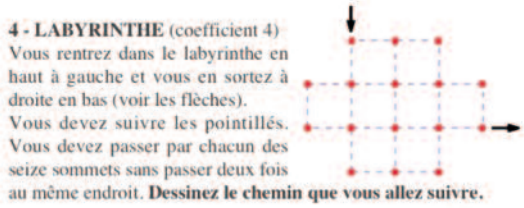


26ème Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques Quarts de finale

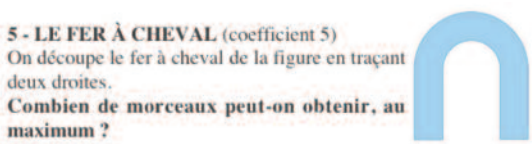
Organisé par la FFJM (Fédération Française des Jeux Mathématiques), ce 26ème championnat est à nouveau ouvert aux Écoles (classes de CE2 et de CM), aux Collèges et aux Lycées.

Pour les Écoles, l'inscription d'une classe aux quarts de finale nécessite une participation d'au moins 7 élèves. Pour un effectif inférieur, les élèves peuvent participer individuellement. La participation financière est de 18 € par classe.

Pour les Collèges et Lycées, les élèves peuvent participer en plus (ou uniquement) au championnat des Jeux littéraires. Pour que l'inscription de l'établissement soit valide, il faut qu'il y ait au moins 12 participants en tout (championnat mathématique seul, championnat littéraire seul ou les deux). La participation financière par collégien est de 2 € pour une épreuve et de 3 € pour deux épreuves. Pour les lycéens, elle est respectivement de 2,50 € et de 4 €.



4 - LABYRINTHE (coefficient 4)
Vous rentrez dans le labyrinthe en haut à gauche et vous en sortez à droite en bas (voir les flèches). Vous devez suivre les pointillés. Vous devez passer par chacun des seize sommets sans passer deux fois au même endroit. **Dessinez le chemin que vous allez suivre.**



5 - LE FER À CHEVAL (coefficient 5)
On découpe le fer à cheval de la figure en traçant deux droites.
Combien de morceaux peut-on obtenir, au maximum ?

Vous pouvez télécharger les bulletins d'inscription ainsi que les énoncés de ces quarts de finale sur le site de la FFJM (ffjm.org) en bas de la page d'accueil. Ce bulletin est à renvoyer avant le 31 décembre pour les Collèges et Lycées, avant le 15 janvier pour les Écoles à l'adresse suivante :

Championnat FFJM, 8 rue Bouilloux-Laffont, 75015 Paris.

Contact : Patricia Maltempi 01 44 26 08 37 (les Lu. et Me. entre 9h et 16h), pmaltempi@wanadoo.fr