RU-BRI-COLVAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.

Frédéric de Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Des problèmes

84-1 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

À propos de la suite de Syracuse.

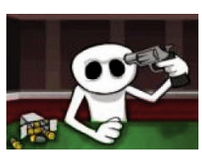
La suite de Syracuse peut être définie, comme on le sait, par :
x_0 entier donné supérieur ou égal à 1 ; $x_{n+1} = (3x_n + 1)/2$ si x_n est impair et $x_{n+1} = x_n / 2$ si x_n est pair.

Voici une question simple que l'on peut se poser à propos de cette suite.
Les premiers termes de la suite peuvent-ils constituer une suite croissante de longueur arbitraire ? En d'autres termes, N étant un entier donné supérieur ou égal à 1, peut-on déterminer x_0 de manière que $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N$?

84-2 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

Existe-t-il une fonction $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x)$ soit irrationnel si x est rationnel et rationnel si x est irrationnel ?

84-3 *de Louis-Marie Bonneval (Poitiers)* :



Tout le monde connaît le principe de la roulette russe. On peut y jouer sans danger avec un dé ordinaire : les deux joueurs lancent alternativement le dé, le premier qui sort le 6 a perdu. Quel est le risque de perdre de chacun ?

84-4 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

Extrait de *Géométrie. Classe de Mathématiques*. Maillard et Millet (1951, n° 253).

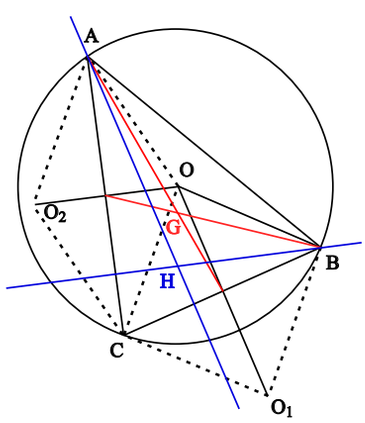
Construire trois cercles orthogonaux deux à deux ayant pour centre trois points donnés.

Des solutions

80-2 *de Louis Rivoallan* :

Un triangle ABC est inscrit dans un cercle de centre O. Il s'agit de tracer l'orthocentre et le centre de gravité de ce triangle mais on ne dispose comme outils de construction que d'un appareil permettant de tracer des droites parallèles et d'une règle. Donc, ni compas, ni équerre. Comment faire ?

Solution de Frédéric de Ligt :



On peut toujours choisir deux des trois sommets du triangle pour qu'ils soient non alignés avec O. On les note B et C. On trace la parallèle à (OB) passant par C et la parallèle à (OC) passant par B. Ces deux droites se coupent en O_1. Le quadrilatère OBO_1C est un losange. Le segment $[OO_1]$ est donc perpendiculaire à [BC] et le coupe en son milieu. On recommence la construction pour obtenir le losange OAO_2C. Deux médianes du triangle peuvent maintenant être tracées, d'où la construction du centre de gravité G. Par ailleurs la parallèle à (OO_1) passant par A et la parallèle à (OO_2) passant par B se coupent en l'orthocentre H.

82-2 *de Serge Parpay* :

Un exercice de vieille géométrie.

Lors d'une réunion de l'« Atelier Scientifique » de l'IREM de Poitiers, consacrée aux géométries non euclidiennes, Dominique Gaud a été amené à proposer un exercice de géométrie euclidienne. « On donne dans un plan un cercle (C) et deux points A et B quelconques hors du cercle. Construire le cercle (C') passant par A et B et orthogonal au cercle (C) ».

Solution de Jacques Chayé :

Supposons construit un cercle (Γ) vérifiant les conditions suivantes :

- il appartient au faisceau *F* orthogonal au faisceau *F'* des cercles passant par A et B ;
- il coupe (C) en deux points M et N.

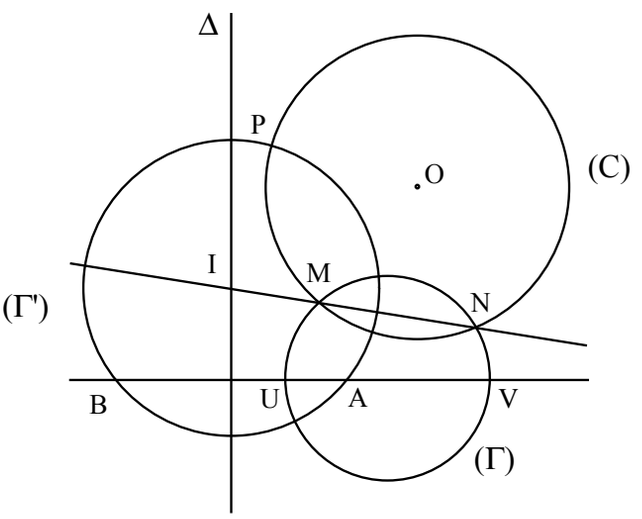
Si O n'est pas sur la droite (AB), la droite (MN) n'est pas perpendiculaire à (AB). Elle coupe la médiatrice de [AB] en un point I qui est extérieur au segment [MN], car les cercles du faisceau *F* n'ont aucun point commun avec Δ.

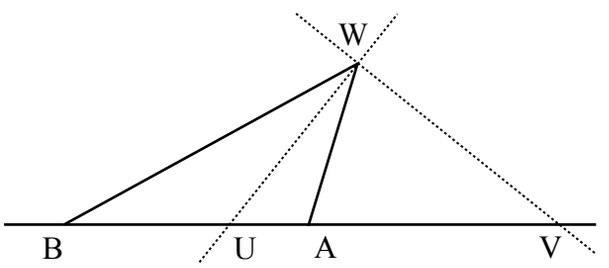
Le cercle (Γ') de centre I passant par A et B est orthogonal à (Γ), comme tous les cercles de *F'* ; sa puissance par rapport à (C) et (Γ) est égale à $\overline{IM} \times \overline{IN} = IO^2\text{-}R^2$, mais aussi à IA^2, puisque (Γ') est orthogonal à (Γ).

Soit P l'un des points communs à (C) et (Γ'), alors $IO^2\text{-}R^2 = IP^2$; le triangle IOP est donc rectangle en P, le cercle (Γ') est orthogonal au cercle (C).

On cherche donc un cercle du faisceau *F* coupant (C), ce qui amène à construire deux points U et V conjugués par rapport à A et B ; on peut, pour cela, prendre les pieds des bissectrices intérieures et extérieures de l'angle W du triangle ABW, le point W étant un point du plan n'appartenant pas à (AB).

Du choix de ce point W dépendra l'existence des points M et N et du point I.





Si O appartient à la droite (AB) et si en outre le rayon R de (C) est égal à celui du cercle du faisceau *F* qui a pour centre O, n'importe quel cercle passant par A et B convient ; sinon il n'y a pas de solution.

82-3 *de Serge Parpay* :

Triplets thypagoriciens !

On connaît les triplets pythagoriciens (a, b, c), nombres entiers tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Le prof Ila Ransor, dont le sérieux reste à prouver, veut savoir s'il existe des triplets thypagoriciens (a, b, c), nombres entiers (évidemment non carrés parfaits) tels que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$. Après tout pourquoi pas ?

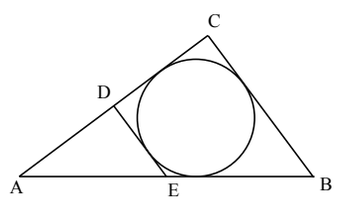
Solution de Jacques Chayé :

La condition est équivalente à : $a + b + 2\sqrt{ab}$ est un entier, c'est-à-dire : ab est un carré parfait, ou encore : les exposants des facteurs premiers de ab sont pairs. Pour les 20 premières valeurs de a et b on obtient les résultats suivants :

Exemple : $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		18	19	20
1	4			9					16							25				
2		8						18										32		
3			12									27								
4	9			16					25							36				
5					20															45
6						24														
7							28													
8		18						32										50		
9	16			25					36							49				
10										40										
11											44									
12			27									48								
13													52							
14														56						
15															60					
16	25			36					49							64				
17																	68			
18		32						50										72		
19																			76	
20					45															80

82-4 *de Louis Rivoallan* :
Dans le triangle ABC avec AC = 4, BC = 3 et AB = 5, montrer que le cercle inscrit est tangent à la droite passant par les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB].



Solution de Jacques Chayé :
Dans tout triangle, l'aire S, les longueurs a, b et c des côtés et le rayon r du cercle inscrit sont reliés par 2S = r(a + b + c). Ici (triangle rectangle en C), S = 6 donc r = 1. Soit D le milieu de [AC] : CD = 2 ; donc, [TT'], le diamètre du cercle inscrit parallèle à (AC), a une de ses extrémités sur la parallèle à (BC) passant par les milieux respectifs de [AC] et [AB].

83-2 *de Frédéric de Ligt* :
Dimensions intérieures
Ce carré est partagé en 4 rectangles. À l'intérieur de chacun d'eux est indiqué son périmètre. Retrouver la longueur du côté du carré ainsi que les dimensions (longueur et largeur) du rectangle de périmètre 1.

1	2
3	4

Solution de Jean-Paul Guichard

Le côté du carré vaut 10/8 et ceux du rectangle 1/8 et 3/8. Je n'ai pas fait dans l'originalité, mais plutôt dans du Cholesky 3ème… J'ai noté $x + t$ et $y + z$ les deux côtés du carré.
Donc $x + t = y + z$ et :
$2x + 2y = 1$ (1) ; $2x + 2z = 2$ (2) ;
$2y + 2t = 3$ (3) ; $2z + 2t = 4$ (4) ;
Donc par addition membre à membre :
$4x + 4y + 4z + 4t = 10$ ou $8y + 8z = 10$ (5)
grâce à l'égalité des côtés du carré.
(2) – (1) : $2z – 2y = 1$ ou $8z – 8y = 4$ (6).
(5) + (6) : $16z = 14$ ou $z = 14/16$ ou $z = 7/8$.
Avec (2) $x + z = 1$ donc $x = 1/8$. Avec (1) $x + y = 1/2$ donc $y = 3/8$. Avec (3) $y + t = 3/2$ donc $t = 9/8$.
On vérifie (4) et $x + t$ ou $y + z$ valent 10/8.

Solution de Nathalie Chevalarias

Les notations sont les mêmes que celles de Jean-Paul Guichard ; on part aussi des équations (1), (2), (3) et (4).

On choisit z comme paramètre et on a :
$y = -0{,}5 + z$, $x = 1 – z$ et $t = 2 – z$.
Comme la figure est un carré on doit avoir $x + t = y + z$ ce qui donne $x = 1/8$, $y = 3/8$, $z = 7/8$ et $t = 9/8$.
Le carré a pour côté $x + t = 10/8 = 5/4$, le rectangle de périmètre 1 a pour côtés 3/8 et 1/8.
Une solution plus élégante consiste à remarquer que 1 + 2 + 3 + 4 = 10 sera le double du périmètre du carré car on retrouve chaque côté deux fois ! Le périmètre du carré est donc 5, soit des côtés de 5/4.