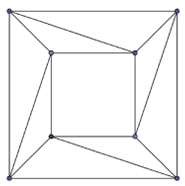
RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.

Frédéric de Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Prolongement d'un exercice du rallye (*Frédéric de Ligt)*

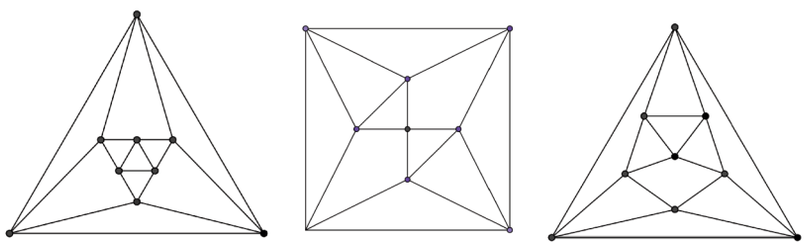


Dans la dernière édition du Rallye Mathématique Poitou-Charentes les élèves de seconde ont eu à résoudre le problème suivant :

« Gagnez un point de plus »

Dans la figure ci-contre, les 8 points sont reliés entre eux par des segments. De chaque point partent quatre segments et les segments ne se croisent pas. Pourriez-vous réaliser une figure qui vérifie la même propriété mais composée cette fois de 9 points ?

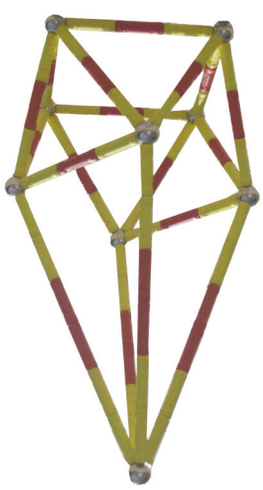
Voici les trois solutions proposées dans le corrigé.

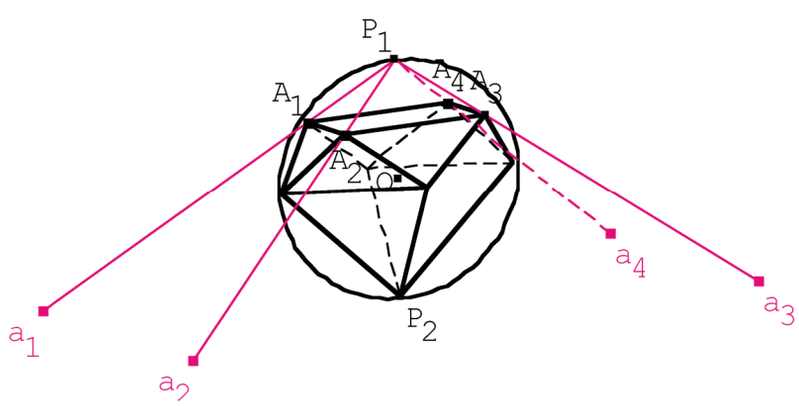


Dans les tableaux de résultats mis en ligne sur Internet et qui ont été établis par des mathématiciens spécialistes de ces questions (la théorie des graphes), il n'est annoncé l'existence que d'une seule solution !

À première vue les trois solutions présentées sont pourtant bien différentes. Où est l'erreur ?

En y regardant de plus près, on peut déjà constater que ces trois figures comportent le même nombre de faces, d'arêtes et de sommets. Si l'on considère maintenant que l'étendue à l'extérieur d'une figure constitue aussi une face, le contour de la figure formant ses « côtés », on voit alors que les trois dessins comportent de plus le même nombre de triangles et de quadrilatères qui paraissent reliés entre eux de la même façon. Pour lever le doute je vous propose de passer en dimension supérieure et d'observer le solide ci-dessous construit à l'aide des pièces du jeu *Géomag* :





Les trois solutions peuvent alors être rattachées à cet unique solide. En voilà la raison détaillée en trois étapes.

Un point O est choisi à l'intérieur du solide qui sera le centre d'une sphère suffisamment grande pour contenir le solide dans son intérieur. Les sommets, les arêtes et les faces sont alors projetés sur la sphère depuis son centre.

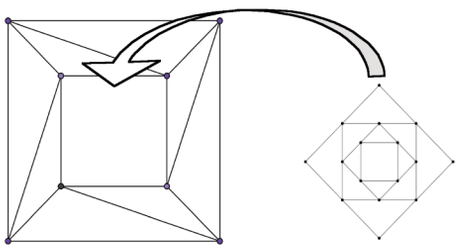
La sphère est alors partagée en autant de cellules que le solide possède de faces. On choisit ensuite un point P_1 à l'intérieur d'une de ces cellules qui sera le pôle nord et on projette les frontières de ces cellules sur un plan tangent à la sphère passant par le pôle sud P_2 (projection stéréographique). Les arcs qui se dessinent sur ce plan peuvent alors être rectifiés en des segments.

Différentes projections planes peuvent être obtenues selon le choix de la cellule où se trouve le pôle nord. Mais ce solide ne possède que trois types de faces : quadrilatère bordé par quatre triangles, triangle bordé par deux quadrilatères et un triangle, triangle bordé par trois triangles, et il n'y a donc que trois figures planes à en tirer ; celles présentées dans le corrigé du rallye. En théorie des graphes, ces trois figures n'en représentent donc qu'une seule car elles représentent le même solide. Quant à prouver qu'il n'y a bien qu'une seule « solution », ou, ce qui revient au même, qu'il n'y pas d'autres solides à 9 sommets d'où partent systématiquement 4 arêtes, c'est une autre affaire !

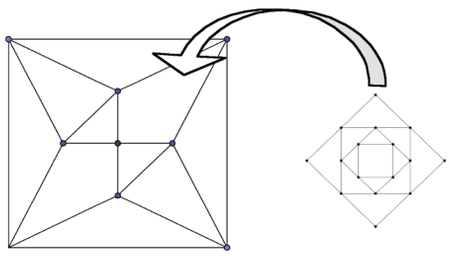
On peut ensuite se poser la question de savoir si l'on peut continuer à ajouter indéfiniment des points tout en continuant à respecter les contraintes imposées par l'énoncé du problème du Rallye.

La réponse est positive et on peut même s'imposer une contrainte supplémentaire : les faces de la figure (y compris le contour) sont uniquement constituées de triangles et/ou de quadrilatères.

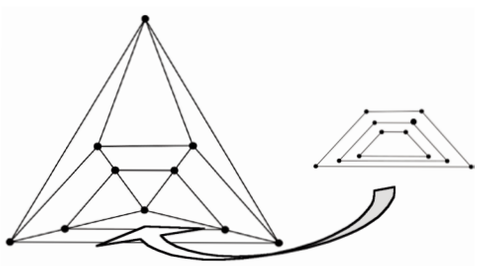
Pour un nombre de points de la forme $8 + 4k$ avec k entier : exemple générique* avec $k = 4$



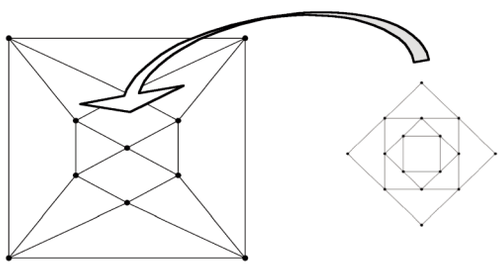
Pour un nombre de points de la forme $9 + 4k$ avec k entier : exemple générique* avec $k = 4$



Pour un nombre de points de la forme $10 + 4k$ avec k entier : exemple générique* avec $k = 3$



Pour un nombre de points de la forme $11 + 4k$ avec k entier : exemple générique* avec $k = 4$

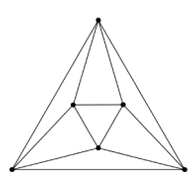


** Les petits dessins à l'origine des flèches sont transportés à l'intérieur des grands dessins, mais progressivement (en fonction des valeurs de k), les nouveaux points étant placés sur les côtés de la face désignée par l'extrémité de la flèche (ou autour du point désigné par l'extrémité de la flèche dans le troisième cas).*

Un invariant

Une figure répondant à toutes les contraintes qui ont été posées doit toujours posséder exactement 8 faces triangulaires.

Preuve. Par le biais des propriétés de la projection stéréographique déjà évoquée, on peut montrer que les figures qui nous intéressent, comme le solide auquel elles correspondent, vérifient la relation d'Euler, à savoir : F + S – A = 2 (1) où F désigne le nombre de faces (y compris la face extérieure), S celui du nombre de sommets et A celui du nombre d'arêtes. Le fait que 4 segments partent de chaque sommet se traduit par la relation 2S = A (2). De ces deux premières équations on tire que F – S = 2.
Si les faces sont constituées uniquement de x triangles et de y quadrilatères on a les égalités : $x + y = F$ et $3x + 4y = 2A$. À l'aide de ces deux dernières équations, de (2) et de (3) on tire alors facilement que $x = 8$. Il y a donc toujours exactement 8 triangles dans ce type de configurations.
On peut aussi en déduire que 6 + y = S et donc que le nombre minimum de points requis est de 6, ce qui se réalise avec la figure ci-contre.



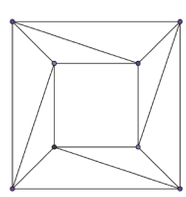
Le cas de 7 points a jusqu'ici été soigneusement évité. Et pour cause ! Il vous est destiné.

Des problèmes

85-1 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)*

« Perdez un point ! ? »

Dans la figure ci-contre, les 8 points sont reliés entre eux par des segments. De chaque point partent quatre segments et les segments ne se croisent pas. Est-il possible de réaliser une figure qui vérifie la même propriété mais composée cette fois de seulement 7 points ?



85-2 *de Jacques Chayé (Poitiers)*

Un piéton marche à gauche sur le bord d'une route rectiligne large de 10 mètres, à la vitesse de 6 km/h. Une fois au point P, il se prépare à changer de côté, mais à 100 mètres derrière, arrive une voiture à la vitesse de 50 km/h. Si la voiture et le piéton conservent leurs vitesses, quel(s) point(s) du bord droit de la route celui-ci doit-il chercher à atteindre en ligne droite pour éviter l'accident ?
On modélisera le problème en assimilant voiture et piéton à des points.

Des solutions

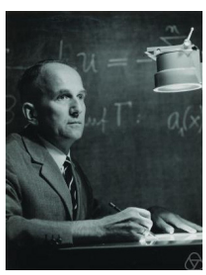
84-1 *de Jean-Christophe Laugier*

La suite de Syracuse peut être définie, comme on le sait, par :

x_0 entier donné supérieur ou égal à 1 ; $x_{n+1} = (3x_n + 1)/2$ si x_n est impair et $x_{n+1} = x_n/2$ si x_n est pair.

Voici une question simple que l'on peut se poser à propos de cette suite :
Les premiers termes de la suite peuvent-ils constituer une suite croissante de longueur arbitraire ? En d'autres termes, N étant un entier donné supérieur ou égal à 1, peut-on déterminer x_0 de manière que $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N$?

Solution de Louis Rivoallan



Lothar Collatz (1910-1990) auteur de la conjecture de Syracuse.

Soit (u_n) une suite de Collatz croissante. On peut remarquer que tous ses termes sont impairs sauf le dernier. En effet si un terme de cette suite est pair, il est nécessairement le dernier puisque le suivant sera sa moitié et donc lui sera inférieur. De plus $u_{p+1} = \dfrac{3u_p + 1}{2} > 1{,}5u_p > u_p$. Supposons donc que u_p soit impair. Il s'écrit donc $2^k n - 1$ où n est un nombre impair. On peut raisonner à partir des puissances de 2, mais la situation est plus « claire » avec les nombres écrits en base 2. En base 2, cela se traduit par $u_p = n \times \overline{10...0} - 1$, expression écrite avec exactement k zéros dans la partie surlignée.

Toujours en base 2, $u_{p+1} = \dfrac{\overline{11} \times n \times \overline{10...0} - \overline{11} + 1}{\overline{10}} = \overline{11} \times n \times \overline{10...0} - 1$. Cette dernière expression ne contenant plus que k - 1 zéros. On « perd » un zéro à chaque étape. Un raisonnement par récurrence simple montre alors que si $u_0 = n \times \overline{10...0} - 1$ s'écrit avec k zéros, la suite issue de ce terme sera croissante avec k termes. On peut donc trouver une suite croissante de longueur arbitraire.

84-2 *de Jean-Christophe Laugier*

Existe-t-il une fonction $f : [0 ; 1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x)$ soit irrationnel si x est rationnel et rationnel si x est irrationnel ?

Solution de Louis Rivoallan

L'image par la fonction f d'un rationnel étant irrationnelle et l'image par f d'un irrationnel étant rationnelle, l'ensemble des images possède au moins deux éléments distincts. La fonction f étant continue, l'image de l'intervalle [0 ; 1] est un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$ et tous les éléments de cet ensemble ont au moins un antécédent. L'ensemble des rationnels de [0 ; 1] est dénombrable de même que sera dénombrable son image par f. Or l'ensemble des irrationnels de $[a ; b]$ n'est pas dénombrable. Cela signifie donc qu'il existe au moins un irrationnel de $[a ; b]$ qui n'a pas d'antécédent. Il y a donc une contradiction et l'hypothèse faite sur f est fausse.

Solution de l'auteur

La réponse est non. Soit en effet a et b des nombres rationnels tels que $a > f(0)$ et $b < f(1)$. Considérons la fonction affine φ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. On a $\varphi(x) = a + (b - a)x$. Puisque $f(0) < \varphi(0)$ et $f(1) > \varphi(1)$, il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $x_0 \in]0 ; 1[$ tel que $f(x_0) = \varphi(x_0)$. Si x_0 est rationnel, $\varphi(x_0)$, et par suite $f(x_0)$ est rationnel. De même, si x_0 est irrationnel, $\varphi(x_0)$ est irrationnel, donc $f(x_0)$ également. Il n'existe donc pas de fonction f satisfaisant à la condition de l'énoncé.

Solution de Gilles Bailly-Maitre

Soit la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$. Elle ne prend que des valeurs irrationnelles. Puisqu'elle est continue, elle est donc constante. Il existe donc un réel c non nul tel que $f(x) = x + c$. Mais alors $f(c) = 2c$ et on obtient une contradiction.

MATh.en.JEANS

Proposer aux élèves volontaires un atelier de recherche sur un thème en lien avec un chercheur.
Voir http://mathenjeans.free.fr.

Sachez que l'an prochain, le congrès MATh.en.JEANS se tiendra les 30 - 31 mars et 1er avril sur le site du Futuroscope. C'est l'occasion de vous lancer dans l'aventure ! On en reparlera à la rentrée.

Jean Souville