

Edito

Pourquoi le bac ?

La fraude lors de l'épreuve de mathématiques en série S sonnera-t-elle le glas du baccalauréat général et technologique sous sa forme actuelle ?

L'impact des « fuites » est démultiplié à l'ère de l'Internet en raison de la diffusion désormais massive et instantanée de documents. Du coup, les discussions médiatisées se sont rapidement centrées autour de l'organisation même du baccalauréat. Pourtant, il serait regrettable de modifier la structure de cet examen symbolique sans se préoccuper de ses finalités.

Le baccalauréat conditionne les situations et types d'exercices qui sont travaillés en classe tout le long des années de lycée. En mathématiques, malgré diverses tentatives (ROC, questions ouvertes, QCM...), la majorité des questions incite encore aujourd'hui les élèves à apprendre des techniques ponctuelles qui ne font pas forcément sens pour eux.

Or d'après l'introduction commune aux nouveaux programmes, il faut « *donner à chaque élève la culture mathématique indispensable pour sa vie de citoyen et les bases nécessaires à son projet de poursuite d'étude* ». Suit une liste de compétences destinées à développer la démarche scientifique.

Il faudrait que toutes les conditions soient réunies pour enseigner cette démarche scientifique et que soient conçues des évaluations – jusqu'à l'épreuve du baccalauréat – incitant les élèves à exposer leur capacité à aborder un problème complexe et donc à personnaliser leurs réponses.

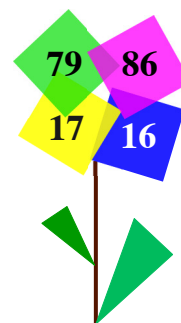
Évaluer non pas des connaissances scolaires vite oubliées mais de réelles compétences, voilà une condition pour qu'un baccalauréat nouveau soit reconnu à juste titre comme premier diplôme de l'enseignement supérieur.

Nicolas Minet

SOMMAIRE

Édito	p. 1
Comité de la Régionale du 22 juin 2011	p. 2
Journées Nationales de l'APMEP	p. 2
Autour du concept de dimension	p. 3
Rallye Mathématique Poitou-Charentes	p. 3
Enquête « Brevet des Collèges »	p. 3
Petite histoire de la grandeur Aire	p. 4 et 5
Vie de l'IREM	p. 5
Rubricol'age	p. 6 à 8
MATH.en.JEANS	p. 8

Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l'Enseignement
Public



Régionale de
Poitou-Charentes

n°85

Juillet 2011

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

APMEP : <http://apmep.poitiers.free.fr/>
Mél : apmep.poitiers@free.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros + Suppléments) : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Nicolas MINET
Comité de rédaction ...	F. de LIGT, L-M BONNEVAL N. MINET, J. FROMENTIN,
Imprimerie	IREM, Faculté des Sciences, B 26 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Éditeur	APMEP Rég. Poitou-Charentes
Siège social	IREM, Faculté des Sciences, B 26 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Dépôt légal	Juillet 2011

Vie de l'association

Comité de la Régionale - 22 juin 2011

Journée de la Régionale

La deuxième Journée de la Régionale aura lieu dans la cité scolaire Audouin Dubreuil à Saint Jean d'Angély le mercredi 5 octobre 2011. Planning retenu pour de la journée :

Conférence de Daniel Perrin sur l'enseignement de la géométrie.

Quatre ateliers débats en parallèle le matin : l'accompagnement personnalisé au lycée, l'aide en mathématiques au collège, l'évaluation du socle et des compétences au collège, et un point sur la réforme du lycée : bilan de la seconde, perspectives pour la première.

Quatre ateliers, en parallèle, l'après-midi : en attente des propositions des adhérents.

Nous prévoyons fin juin d'avertir par mél tous les professeurs de l'académie de la tenue de cette journée, d'annoncer la conférence inaugurale de Daniel Perrin, et de lancer un appel aux adhérents qui souhaiteraient animer un atelier.

Présentation aux stagiaires

Une présentation de l'APMEP a été faite aux stagiaires de mathématiques lors de leur dernière journée de formation le vendredi 17 juin à La Rochelle, avec distribution de bulletins de première adhésion, plaquettes « Visages de l'APMEP » et information de la tenue des Journées Nationales de Grenoble fin octobre.

Exposition

L'Espace Mendès-France a reversé la part qui nous revient pour la location de l'exposition « Comment tu comptes ? » au premier trimestre 2011. L'exposition sera conservée dans la Région l'an prochain, avant de circuler ailleurs en France. Elle pourrait notamment être montrée lors de la journée de la Régionale. Nicolas Minet offre à l'APMEP une ancienne machine à calculer qui pourra accompagner l'exposition l'année prochaine.

Pour la prochaine exposition, rendez-vous de Dominique Gaud (pour l'IREM) et Nicolas Minet (pour l'APMEP) avec Edith Cirot et Didier Moreau le 28 juin. Nous proposons comme thème « Les courbes ».

Interruption par un coup de téléphone de France Bleu La Rochelle sur la fraude au bac S !

Le National de l'APMEP vient de demander que soit repassée l'épreuve de mathématiques

Rallye

L'an prochain, le thème du Rallye tournera autour des « outils pour tracer ». La date retenue pour l'épreuve est le 21 02 2012

(date palindrome !). Une réflexion est lancée sur la création de trophées qui passeraient de classe gagnante en classe gagnante chaque année (sections du cube, sections du cône, nombre π , animation du théorème de Pythagore, planche de Galton...).

Corol'aire

Pour le Corol'aire de la rentrée, Sébastien Peyrot proposera un texte sur les nombreux problèmes actuellement posés par l'évaluation au collège (B2i, socle, note de vie scolaire,...)

Remboursement des frais

Nous évoquons l'importance des justificatifs à fournir lors de la venue de conférenciers par exemple : tout remboursement effectué par l'APMEP doit être justifié par des titres de transport ou des factures.

Conférence

Le compte-rendu de la conférence du 1^{er} juin à la Rochelle d'Aurélien Alvarez, rédigé par Louis-Marie Bonneval, a été mis en ligne par Jacques Germain sur notre site. Une fois de plus s'est posé le problème du nombre de présents lors d'une conférence organisée par l'APMEP. Il faut impérativement, à l'avenir, contacter avec plus d'insistance les professeurs locaux, peut-être coupler la conférence avec une rencontre des adhérents, ou une vente de brochures.

Un contact a été pris par Dominique Gaud avec Mathieu Blossier, du groupe Geogebra de l'IREM de Rouen, qui développe Geogebra 3D. Celui-ci a accepté le principe d'une présentation de ce nouveau produit. Pourquoi pas lors de l'année scolaire prochaine.

Enquêtes

Peu de réponses pour l'enquête de Pierre-Jean Robin sur la répartition des heures dédoublées en Seconde. Mais celui-ci persiste et relance un questionnaire simplifié, pour la rentrée, axé uniquement sur les mathématiques et sur l'Aide Personnalisée au lycée.

Calendrier

Comité le 14 septembre 2011 à 15h à l'IREM.

Départ de Marie-Claude

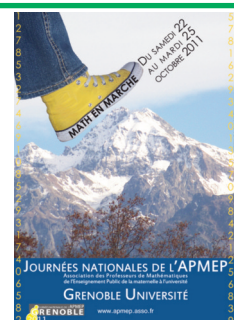
Marie-Claude Linard, secrétaire de l'IREM depuis 7 ans, est mutée à Bordeaux au 1^{er} septembre 2011. Notre Régionale s'associe à l'IREM pour la remercier de son aide précieuse à notre Association.

Nathalie Chevalarias

MATH EN MARCHÉ

Journées Nationales de l'A.P.M.E.P. à Grenoble

du samedi 22 au mardi 25 octobre 2011



Autour du concept de dimension

Conférence d'*Aurélien Alvarez* le 1^{er} juin à La Rochelle

Nous étions malheureusement peu nombreux, à la Maison des Sciences de l'Ingénieur du Pôle Sciences de l'université de La Rochelle, pour écouter Aurélien Alvarez, jeune maître de conférences à l'université d'Orléans. Son exposé était pourtant passionnant, illustré par des extraits du superbe film « Dimensions » qu'il a réalisé avec Etienne Ghys et Jos Leys¹, dont il nous a raconté la genèse et présenté quelques extraits.



L'orateur a présenté rapidement la **topologie**, branche des mathématiques créée par Henri Poincaré au début du XX^e siècle sous le nom d'analysis situs, qui étudie les invariants par déformation continue (homéomorphisme). La topologie différentielle étudie les **variétés différentiables** de dimension quelconque, la **dimension** pouvant être définie (Riemann 1859) comme le nombre de paramètres dont on a besoin pour se repérer sur une telle variété².

Ainsi la sphère ordinaire est de dimension 2, mais on peut envisager des sphères de dimension n . On découvre alors des choses étonnantes : la sphère de dimension 3 est « la plus ronde de toutes », en ce sens que c'est celle qui présente le plus de symétries. John Milnor a démontré que la sphère de dimension 7 admet 28 structures différentiables, alors que pour la sphère de dimension 4 on ne sait pas combien il y en a.

Curieusement, la dimension 4 semble très particulière : beaucoup de théorèmes sont valables dans toutes les dimensions sauf dans la dimension 4. Faut-il voir un lien avec le fait que l'espace de la relativité générale est de dimension 4 ? ou que $\mathbb{R}^4$ peut être muni d'une structure de corps (les quaternions) ?

Pour se représenter des objets en dimension 4, on peut s'inspirer de la cartographie, qui vise à représenter une sphère sur un plan. La **projection stéréographique** est une façon de le faire, qui conserve les angles et transforme les cercles en cercles. De même qu'elle permettrait à des êtres plats (comme ceux du « Flatland » d'Abbott) de se représenter des objets de l'espace de dimension 3, elle nous permet de visualiser des objets de l'espace de dimension 4. Ainsi le film « Dimensions » représente des polyèdres de $\mathbb{R}^4$. Notons au passage que s'il y a 5 polyèdres réguliers en dimension 3, il y en a 6 en dimension 4, et 3 dans toutes les dimensions supérieures.

Le film « Dimensions » évoque aussi la « fibration de Hopf », qui est une décomposition de l'espace en cercles.

Le débat qui a suivi l'exposé a permis notamment d'évoquer le rôle des images mentales dans la recherche mathématique, ainsi que le rôle ambivalent de l'ordinateur (outil puissant mais parfois trompeur).

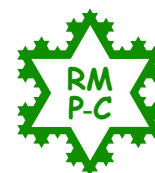
Merci à Aurélien Alvarez pour ce voyage dans les grandes dimensions, qui nous a confirmé que les mathématiciens les plus féconds savent mêler la rigueur et le rêve...

Louis-Marie BONNEVAL

¹ Les participants aux Journées de La Rochelle en 2008 ont trouvé le DVD dans leurs mallettes. On peut télécharger le film sur le site www.dimensions-math.org, qui fournit également de nombreux commentaires. Jos Leys est également l'auteur d'un étonnant site d'images mathématiques : <http://www.josleys.com/>

² La notion s'est enrichie depuis Riemann, et on peut aujourd'hui définir des dimensions non entières.

Rallye Mathématique Poitou-Charentes 21 02 2012



Des outils pour tracer



Tout ce que vous devez savoir à ce jour sur la prochaine édition du Rallye est indiqué ci-dessus.

La date de l'épreuve : un joli palindrome composé seulement des trois premiers chiffres de notre numération (nous ne l'avons pas fait exprès !).

Le thème de la recherche documentaire recouvre aussi bien le symétriseur et le pantographe que le compas, la règle, la ficelle, l'élastique...

Comme dans les éditions précédentes, nous préciserons les pistes de recherche et de travail pour chaque niveau dans l'épreuve d'entraînement.

Équipe Rallye

Pertinence du maintien du Brevet dans sa forme actuelle

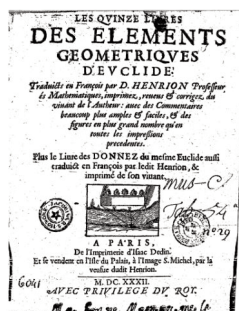
Pour se positionner à ce sujet, la Commission Collège de l'APMEP a besoin de l'avis motivé du plus grand nombre d'enseignants de collège, en particulier sur le sujet du brevet 2011 et les consignes de correction.

Par ailleurs, la Commission fera un bilan des différentes formes qu'a pu prendre la validation du socle commun cette année dans les établissements.

Adressez votre courrier à Catherine Chabrier, responsable de la Commission Collège : catherine.chabrier@ac-nice.fr,

Petite histoire de la grandeur Aire, en 5 épisodes

Jean-Paul Guichard



Dans les géométries anciennes, les problèmes d'aire sont des problèmes basés sur des constructions ou des découpages. Même si les civilisations se sont servies de formules pour évaluer des aires, elles ont dû, pour cela, modéliser terrains et objets par des figures géométriques, travailler sur ces figures, et utiliser des unités d'aire dépendantes des mesures de longueur en vigueur dans cette civilisation. Partons donc à la découverte.

Premier épisode : les aires chez Euclide

Dans « Les Éléments », Euclide traite des égalités d'aires de la façon suivante.

Dans le livre 1, il montre, dans la proposition 4, que deux triangles ayant deux côtés de même mesure et l'angle en commun sont « égaux » ; proposition qu'il utilise pour démontrer la **proposition 35** qui établit l'égalité des aires de deux parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles ; pour cela il utilise l'égalité des aires de deux triangles égaux (rectangles sur la figure), auxquelles il soustrait l'aire d'un triangle commun, ce qui donne deux trapèzes d'aires égales, puis l'égalité des aires des deux parallélogrammes, par ajout de l'aire d'un triangle commun.

Il généralise alors le résultat dans la **proposition 36** où il n'impose plus aux parallélogrammes que des bases égales et d'être dans les mêmes parallèles :

« Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux ».

Il traite le cas des triangles avec les mêmes principes que pour les parallélogrammes. Il fait alors le lien entre le triangle et le parallélogramme dans la **proposition 42** :

« Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à un triangle donné ».

Remarquons que l'angle peut être un angle droit et donc le parallélogramme cherché peut devenir le rectangle cherché.

Dans la **proposition 43**, il explique comment construire deux parallélogrammes de même aire dont l'un peut être donné et dont on peut fixer une des dimensions dans l'autre :

« Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux ».

Dans la **proposition 45**, il montre que pour tout polygone, on peut construire un parallélogramme de même aire en se servant des résultats précédents :

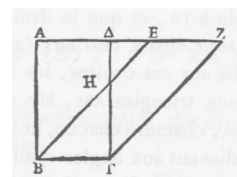
« Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée ».

Son raisonnement passe par la décomposition de la figure rectiligne en triangles qui, grâce à la proposition 42, peuvent être assimilés à des parallélogrammes au niveau de l'aire et qui, grâce à la proposition 43, peuvent avoir un côté de même mesure ce qui permet de tous les coller.

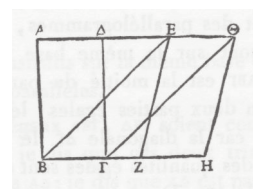
Comme dans la proposition 42, l'angle est à choisir, on peut en déduire que **toute figure rectiligne est égale à un rectangle**.

Le livre 1 se termine par la proposition 47 (théorème de Pythagore), qui montre l'égalité des aires de deux carrés avec celle d'un troisième, et la proposition 48 (sa réciproque). Cependant le théorème de Pythagore ne sera utilisé qu'au livre 2 pour construire un carré d'aire égale à celle d'un polygone. Donc toutes les propositions du livre 1 convergent vers la démonstration de la proposition 45, comme le montre très bien le schéma déductif du livre 1 donné par Bernard Vitrac dans le volume 1 de sa traduction des *Éléments* d'Euclide. Le résultat final du livre 1 est donc que tout polygone peut, par des constructions géométriques basées sur l'utilisation de la règle et du compas, se ramener à un parallélogramme de même aire, et donc à un rectangle de même aire. Toute figure polygonale peut se ramener à un rectangle de même aire. C'est ce que nous avons appelé la rectangulation des aires.

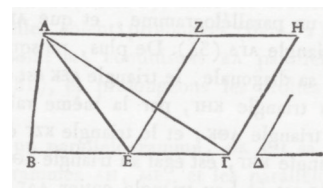
Remarquons que pour arriver à ce résultat Euclide utilise des constructions et non des découpages. Cependant, comme nous l'avons montré pour la proposition 35, Euclide enlève un « morceau » à une figure pour avoir des aires égales, ou complète par un « morceau ». Une certaine forme de découpage est donc présente dans l'argumentation euclidienne pour établir des égalités d'aires. Il est à noter que pour traiter les questions concernant ce que nous appelons « aire », Euclide parle d'un nouveau type d'égalité des figures, sans utiliser un nouveau mot pour cela. Une autre propriété se dégage à la fin du livre 1 : pour toute longueur donnée à l'avance, on peut construire un rectangle de même aire qu'un rectangle donné.



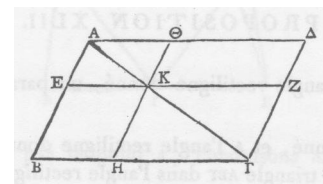
Proposition 35



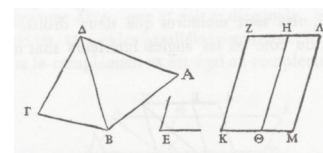
Proposition 36



Proposition 42



Proposition 43



Proposition 45

Le livre 2, quant à lui, résout le problème de la quadrature de tout polygone, qui constitue la **proposition 14**, et dernière, du livre 2 :

« Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée ».

Les outils du livre 1 ne suffisent plus pour répondre au questionnement du livre 2. Euclide va y construire une algèbre géométrique : identités remarquables, résolution des équations du second degré. Rectangles et carrés y sont les figures dominantes.

Le parallélogramme est la figure clé du livre 1 des *Éléments*, mais dans la pratique c'est le cas particulier du rectangle qui est intéressant : il est possible de construire un rectangle de même aire que celle de tout polygone donné a priori.

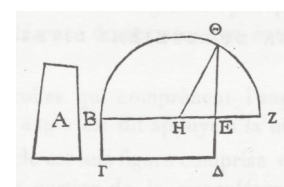
Cette propriété est à rapprocher du théorème de Hadwiger-Glur qui démontre que « deux polygones de même aire sont équidécomposables en un nombre fini d'étapes sous forme de triangles ». Les éléments d'Euclide sont bâtis comme s'il avait voulu démontrer ce théorème mais en s'arrêtant au seuil de la démonstration (la démonstration de ce théorème a été exposée à l'Université d'été de Saint Flour (1999) par Dominique Roux).

Pour les aires, comme pour les volumes, il est à remarquer qu'il n'y a aucune formule dans les *Éléments* d'Euclide : on compare uniquement des aires, les unes par rapport aux autres. Égalité des aires des parallélogrammes ou des triangles de même bases et compris entre des parallèles, donc de même hauteur. Aire double : « Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et qu'il est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle » (proposition 41). On ramène l'aire d'une figure à celle d'une autre figure de base : triangle, parallélogramme d'angle donné, carré.

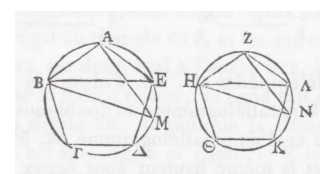
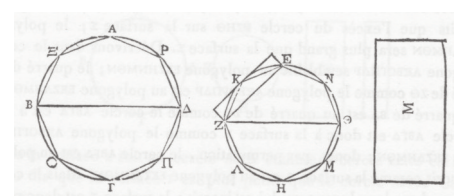
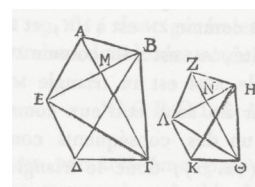
C'est au livre 6 que sera abordé le problème de la comparaison des aires des figures semblables : « Les figures rectilignes semblables sont entre elles en raison double des côtés homologues » (corollaire de la proposition 20). Donc proportionnalité des aires aux carrés des longueurs. Cette proposition s'obtient par triangulation du polygone et grâce à la proposition analogue pour les triangles : « Les triangles semblables sont entre eux en raison double des côtés homologues » (proposition 19).

Et ce n'est qu'au début du livre 12 qu'Euclide traite le cas de l'aire du cercle : « Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres » (proposition 2), après avoir établi que : « Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entre eux comme les carrés des diamètres » (proposition 1).

Le problème de la comparaison des aires des figures, sans aucune mesure, parcourt donc tout l'ouvrage d'Euclide.



Proposition 14



Vie de l'IREM



En ce mois de juin, nous avons fêté le départ à la retraite de Maryse Cheymol et Roger Terrochaire, et celui, pour Bordeaux, de notre secrétaire Marie-Claude Linard. D'autres nous rejoindront à la rentrée. N'hésitez pas à nous contacter si vous souhaitez participer à nos travaux. Après un an d'interruption, nos stages reprennent l'an prochain au niveau collège (voir ci-dessous). Par contre, nos propositions de stages lycée n'ont pas été retenues. Mais vous pourrez notamment nous retrouver lors de la Journée de la Régionale APMEP.

Jean SOUVILLE.

Stages IREM au PAF 2011-2012

L'IREM propose au PAF deux stages différents pour l'année 2011-2012, avec une expérimentation en classe entre ces deux journées si possible. Les inscriptions se feront en septembre, mais nous vous conseillons d'aller déjà prendre des renseignements sur le site académique.

[11A0130177](#) LES GRANDEURS - 6E : DES QUESTIONS AUX COMPETENCES FCE

[11A0130178](#) LES GRANDEURS 5A3E : DES QUESTIONS AUX COMPETENCES FCE

Le thème est le même : Motiver et structurer l'enseignement des mathématiques au collège en 6^{ème} (stage 177) ou en 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} (stage 178).

Motiver - en mettant en avant les grandes questions auxquelles les mathématiques apportent des réponses, en montrant que les connaissances et compétences au programme sont les outils qui permettent de répondre à ces grandes questions et en faisant étudier des situations centrées sur la vie des hommes.

Structurer - en organisant l'enseignement d'une année par l'étude d'un certain nombre de grandeurs et en organisant chaque chapitre autour de quelques grandes questions.

Le contenu du premier stage peut être perçu par les 4 brochures éditées par l'IREM (<http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/>, les deux autres à venir d'ici fin 2011). Ce stage est proposé depuis quelques années, mais a été annulé cette année. Ceux qui l'ont suivi sont invités à s'inscrire à l'autre stage ; les autres, notamment ceux qui pensaient le suivre cette année, devront s'y inscrire avant d'envisager le second.

Le stage 5^{ème} à 3^{ème} est réservé à ceux qui ont déjà fait le précédent ou qui sont déjà engagés dans la démarche que nous proposons. Nous essaierons de dégager une méthode pour organiser une année d'enseignement autour des grandeurs et de grandes questions. Ceux qui ont déjà fait le stage N1 et répondu à notre enquête seront prioritaires.

Nous souhaitons que vous soyez nombreux à vous inscrire, ne serait-ce que pour identifier votre demande de formation, même si le nombre de places est restreint cette année.

Jean-Paul Mercier

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Prolongement d'un exercice du rallye (Frédéric de Ligt)

Dans la dernière édition du Rallye Mathématique Poitou-Charentes les élèves de seconde ont eu à résoudre le problème suivant :

« Gagnez un point de plus »

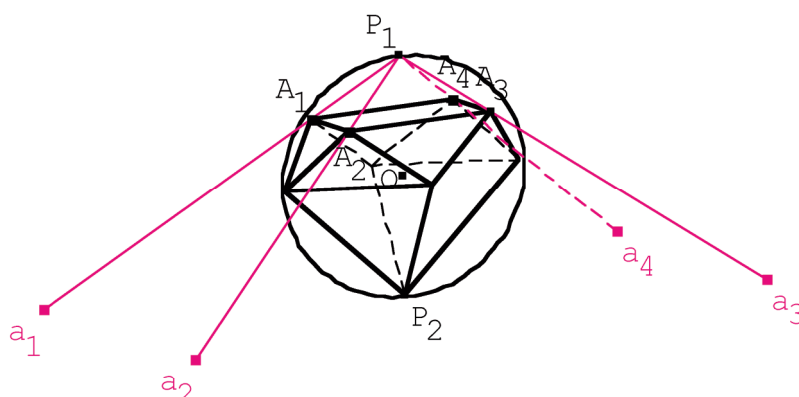
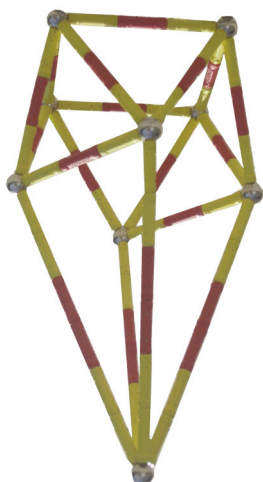
Dans la figure ci-contre, les 8 points sont reliés entre eux par des segments. De chaque point partent quatre segments et les segments ne se croisent pas. Pourriez-vous réaliser une figure qui vérifie la même propriété mais composée cette fois de 9 points ?

Voici les trois solutions proposées dans le corrigé.

Dans les tableaux de résultats mis en ligne sur Internet et qui ont été établis par des mathématiciens spécialistes de ces questions (la théorie des graphes), il n'est annoncé l'existence que d'une seule solution !

À première vue les trois solutions présentées sont pourtant bien différentes. Où est l'erreur ?

En y regardant de plus près, on peut déjà constater que ces trois figures comportent le même nombre de faces, d'arêtes et de sommets. Si l'on considère maintenant que l'étendue à l'extérieur d'une figure constitue aussi une face, le contour de la figure formant ses « côtés », on voit alors que les trois dessins comportent de plus le même nombre de triangles et de quadrilatères qui paraissent reliés entre eux de la même façon. Pour lever le doute je vous propose de passer en dimension supérieure et d'observer le solide ci-dessous construit à l'aide des pièces du jeu *Géomag* :



Les trois solutions peuvent alors être rattachées à cet unique solide. En voilà la raison détaillée en trois étapes.

Un point O est choisi à l'intérieur du solide qui sera le centre d'une sphère suffisamment grande pour contenir le solide dans son intérieur. Les sommets, les arêtes et les faces sont alors projetés sur la sphère depuis son centre.

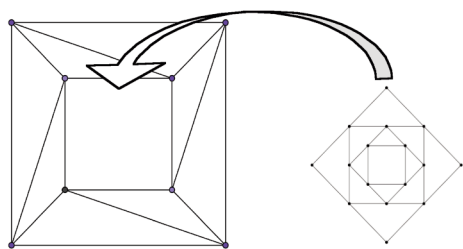
La sphère est alors partagée en autant de cellules que le solide possède de faces. On choisit ensuite un point P_1 à l'intérieur d'une de ces cellules qui sera le pôle nord et on projette les frontières de ces cellules sur un plan tangent à la sphère passant par le pôle sud P_2 (projection stéréographique). Les arcs qui se dessinent sur ce plan peuvent alors être rectifiés en des segments.

Différentes projections planes peuvent être obtenues selon le choix de la cellule où se trouve le pôle nord. Mais ce solide ne possède que trois types de faces : quadrilatère bordé par quatre triangles, triangle bordé par deux quadrilatères et un triangle, triangle bordé par trois triangles, et il n'y a donc que trois figures planes à en tirer ; celles présentées dans le corrigé du rallye. En théorie des graphes, ces trois figures n'en représentent donc qu'une seule car elles représentent le même solide. Quant à prouver qu'il n'y a bien qu'une seule « solution », ou, ce qui revient au même, qu'il n'y pas d'autres solides à 9 sommets d'où partent systématiquement 4 arêtes, c'est une autre affaire !

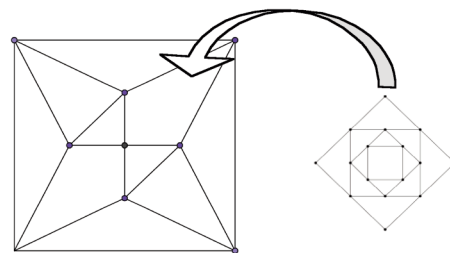
On peut ensuite se poser la question de savoir si l'on peut continuer à ajouter indéfiniment des points tout en continuant à respecter les contraintes imposées par l'énoncé du problème du Rallye.

La réponse est positive et on peut même s'imposer une contrainte supplémentaire : les faces de la figure (y compris le contour) sont uniquement constituées de triangles et/ou de quadrilatères.

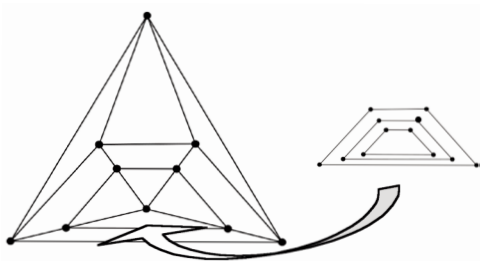
Pour un nombre de points de la forme $8 + 4k$ avec k entier :
exemple générique* avec $k = 4$



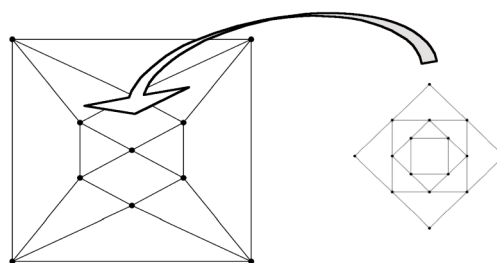
Pour un nombre de points de la forme $9 + 4k$ avec k entier :
exemple générique* avec $k = 4$



Pour un nombre de points de la forme $10 + 4k$ avec k entier :
exemple générique* avec $k = 3$



Pour un nombre de points de la forme $11 + 4k$ avec k entier :
exemple générique* avec $k = 4$



* Les petits dessins à l'origine des flèches sont transportés à l'intérieur des grands dessins, mais progressivement (en fonction des valeurs de k), les nouveaux points étant placés sur les côtés de la face désignée par l'extrémité de la flèche (ou autour du point désigné par l'extrémité de la flèche dans le troisième cas).

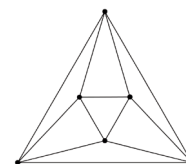
Un invariant

Une figure répondant à toutes les contraintes qui ont été posées doit toujours posséder exactement 8 faces triangulaires.

Preuve. Par le biais des propriétés de la projection stéréographique déjà évoquée, on peut montrer que les figures qui nous intéressent, comme le solide auquel elles correspondent, vérifient la relation d'Euler, à savoir : $F + S - A = 2$ (1) où F désigne le nombre de faces (y compris la face extérieure), S celui du nombre de sommets et A celui du nombre d'arêtes. Le fait que 4 segments partent de chaque sommet se traduit par la relation $2S = A$ (2). De ces deux premières équations on tire que $F - S = 2$. Si les faces sont constituées uniquement de x triangles et de y quadrilatères on a les égalités : $x + y = F$ et $3x + 4y = 2A$. À l'aide de ces deux dernières équations, de (2) et de (3) on tire alors facilement que $x = 8$. Il y a donc toujours exactement 8 triangles dans ce type de configurations.

On peut aussi en déduire que $6 + y = S$ et donc que le nombre minimum de points requis est de 6, ce qui se réalise avec la figure ci-contre.

Le cas de 7 points a jusqu'ici été soigneusement évité. Et pour cause ! Il vous est destiné.

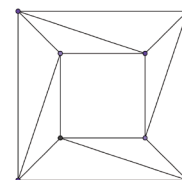


Des problèmes

85-1 de Frédéric de Ligt (Montguyon)

« Perdez un point ! ? »

Dans la figure ci-contre, les 8 points sont reliés entre eux par des segments. De chaque point partent quatre segments et les segments ne se croisent pas. Est-il possible de réaliser une figure qui vérifie la même propriété mais composée cette fois de seulement 7 points ?



85-2 de Jacques Chayé (Poitiers)

Un piéton marche à gauche sur le bord d'une route rectiligne large de 10 mètres, à la vitesse de 6 km/h. Une fois au point P, il se prépare à changer de côté, mais à 100 mètres derrière, arrive une voiture à la vitesse de 50 km/h. Si la voiture et le piéton conservent leurs vitesses, quel(s) point(s) du bord droit de la route celui-ci doit-il chercher à atteindre en ligne droite pour éviter l'accident ?

On modélisera le problème en assimilant voiture et piéton à des points.

Des solutions

84-1 de Jean-Christophe Laugier

La suite de Syracuse peut être définie, comme on le sait, par :

x_0 entier donné supérieur ou égal à 1 ; $x_{n+1} = (3x_n + 1)/2$ si x_n est impair et $x_{n+1} = x_n/2$ si x_n est pair.

Voici une question simple que l'on peut se poser à propos de cette suite :

Les premiers termes de la suite peuvent-ils constituer une suite croissante de longueur arbitraire ? En d'autres termes, N étant un entier donné supérieur ou égal à 1, peut-on déterminer x_0 de manière que $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N$?

Solution de Louis Rivoallan

Soit (u_n) une suite de Collatz croissante. On peut remarquer que tous ses termes sont impairs sauf le dernier. En effet si un terme de cette suite est pair, il est nécessairement le dernier puisque le suivant sera sa

moitié et donc lui sera inférieur. De plus $u_{p+1} = \frac{3u_p + 1}{2} > 1,5u_p > u_p$. Supposons donc que u_p soit

impair. Il s'écrit donc $2^k n - 1$ où n est un nombre impair. On peut raisonner à partir des puissances de 2, mais la situation est plus « claire » avec les nombres écrits en base 2. En base 2, cela se traduit par $u_p = n \times \overline{10\dots 0} - 1$, expression écrite avec exactement k zéros dans la partie surlignée.

Toujours en base 2, $u_{p+1} = \frac{\overline{11} \times n \times \overline{10\dots 0} - \overline{11} + 1}{10} = \overline{11} \times n \times \overline{10\dots 0} - 1$. Cette dernière expression ne contenant plus que $k - 1$

zéros. On « perd » un zéro à chaque étape. Un raisonnement par récurrence simple montre alors que si $u_0 = n \times \overline{10\dots 0} - 1$ s'écrit avec k zéros, la suite issue de ce terme sera croissante avec k termes. On peut donc trouver une suite croissante de longueur arbitraire.

84-2 de Jean-Christophe Laugier

Existe-t-il une fonction $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x)$ soit irrationnel si x est rationnel et rationnel si x est irrationnel ?

Solution de Louis Rivoallan

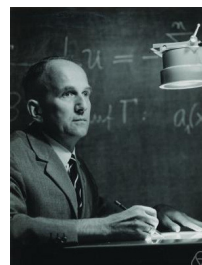
L'image par la fonction f d'un rationnel étant irrationnelle et l'image par f d'un irrationnel étant rationnelle, l'ensemble des images possède au moins deux éléments distincts. La fonction f étant continue, l'image de l'intervalle $[0; 1]$ est un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$ et tous les éléments de cet ensemble ont au moins un antécédent. L'ensemble des rationnels de $[0; 1]$ est dénombrable de même que sera dénombrable son image par f . Or l'ensemble des irrationnels de $[a; b]$ n'est pas dénombrable. Cela signifie donc qu'il existe au moins un irrationnel de $[a; b]$ qui n'a pas d'antécédent. Il y a donc une contradiction et l'hypothèse faite sur f est fausse.

Solution de l'auteur

La réponse est non. Soit en effet a et b des nombres rationnels tels que $a > f(0)$ et $b < f(1)$. Considérons la fonction affine φ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. On a $\varphi(x) = a + (b - a)x$. Puisque $f(0) < \varphi(0)$ et $f(1) > \varphi(1)$, il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $x_0 \in]0; 1[$ tel que $f(x_0) = \varphi(x_0)$. Si x_0 est rationnel, $\varphi(x_0)$, et par suite $f(x_0)$ est rationnel. De même, si x_0 est irrationnel, $\varphi(x_0)$ est irrationnel, donc $f(x_0)$ également. Il n'existe donc pas de fonction f satisfaisant à la condition de l'énoncé.

Solution de Gilles Bailly-Maitre

Soit la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$. Elle ne prend que des valeurs irrationnelles. Puisqu'elle est continue, elle est donc constante. Il existe donc un réel c non nul tel que $f(x) = x + c$. Mais alors $f(c) = 2c$ et on obtient une contradiction.



Lothar Collatz (1910-1990) auteur de la conjecture de Syracuse.

MATh.en.JEANS

Proposer aux élèves volontaires un atelier de recherche sur un thème en lien avec un chercheur.

Voir <http://mathenjeans.free.fr>.

Sachez que l'an prochain, le congrès MATh.en.JEANS se tiendra les 30 - 31 mars et 1^{er} avril sur le site du Futuroscope. C'est l'occasion de vous lancer dans l'aventure ! On en reparlera à la rentrée.

Jean Souville