

Petite histoire de la grandeur Aire, en 5 épisodes

Jean-Paul Guichard

Troisième épisode

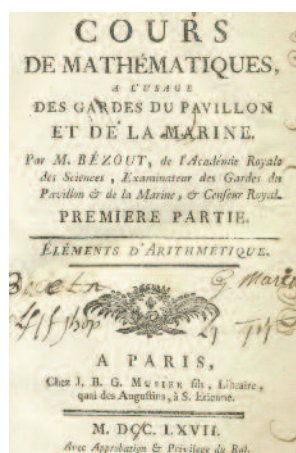
Des mesures agraires aux mesures d'aire en général : les unités

Pour traiter les questions concernant ce que nous appelons "aire", Euclide parle d'un nouveau type d'égalité des figures, sans utiliser un nouveau mot pour cela. Il utilise, entre autres, les notions de grandeurs égales ou inégales (les grandeurs qui sont double ou moitié d'une même grandeur sont égales entre elles), mais il n'utilise pas l'unité d'aire et en cela n'évalue pas une aire en se référant à une unité. De même pour Hilbert dont la définition qu'il donne de l'aire, bien des siècles plus tard, repose sur l'équidécomposabilité : deux figures P et P' sont équidécomposables s'il est possible d'écrire chacune d'elles sous forme de réunions de triangles isométriques n'empiétant pas l'un sur l'autre. Chez ces auteurs, l'aire est étudiée en tant que grandeur : sa mesure est laissée au domaine pratique. Voyons donc.

Dans la plupart des civilisations, les unités d'aire sont construites sur le modèle suivant : on choisit le **carré** comme unité de base, dont le côté est une unité du système des mesures de longueur en vigueur, puis on pave le plan de ce carré, et on dénombre les unités. Ainsi, chez les Sumériens, la plus petite unité de mesure des superficies est le « sar » valant 1 ninda carré soit un carré d'environ 5,94 m de côté. Ensuite les autres unités sont choisies sans qu'elles suivent forcément une règle précise. Toujours chez les Sumériens, les unités ne suivent pas une base précise, ainsi on a : 1 bur = 3 ebel ; 1 ebel = 6 iku ; 1 iku = 100 sar. Il est à noter qu'au milieu du premier millénaire, le système se perd et on évalue les surfaces par la quantité de grains nécessaire à leur ensemencement passant ainsi des aires aux capacités. De même on a vu apparaître des unités d'aire reposant sur des considérations anthropologiques. À titre d'exemple l'*hom-mée* ou la *fossée*, valant environ 400 m², correspondait à la surface que l'on pouvait labourer avec un fossoir en un jour, ou encore la *bicherée* ayant une aire équivalente à environ 2000 m² qui correspond à ce qu'on pouvait semer avec un bichet de grain. Ces unités agraires dépendaient sûrement de la nature du terrain ou encore de la vaillance de l'homme au travail, ou encore de la région. En tout cas, elles ne permettent pas de définir une unité d'aire à partir de laquelle on puisse bâtir un système de mesure des aires car elles ne se réfèrent pas à quelque chose de fixe, d'immuable.



Un fossoir



En France, certaines unités d'aire ont été construites en multipliant des unités de longueur différentes. Ainsi, on peut lire dans des ouvrages mathématiques destinés à la vulgarisation du système métrique décimal, comme dans l'*Arithmétique* de Bézout, une table pour convertir des « Toises-Pieds, Toises-Pouces, Toises-lignes et Toise-points en Mètres carrés » (dont l'utilisation n'est pas explicitée, mais dont on peut imaginer qu'elle était utile aux tailleurs par exemple...), puis une autre pour « réduire un nombre quelconque de mesures agraires anciennes, en mesures nouvelles et réciproquement » qui convertit des Toises carrées, Pouces carrés ou encore lignes carrées en mètres carrés. Ces constats amènent trois remarques.

On retrouve la forme rectangulaire (rare) et en général carrée pour créer des unités d'aire. Pourquoi créer des unités d'aires de formes différentes ?

Certaines unités, sont passées à la trappe de l'histoire. Parmi les unités du système actuel, y en a-t-il de désuètes ? Pourquoi travailler avec ? Travaille-t-on avec les unités adaptées ?

Les conversions d'un système à un autre sont nécessaires mais qu'en est-il des conversions au sein d'un même système ? Pourquoi et quand convertir dans nos usages sociaux ?

En France toujours, il existait des systèmes de correspondance des aires, ainsi l'arpent de Paris était composé de 100 perches carrées de 18 pieds de côté, soit 32400 pieds carrés puisque la perche carrée contenait 324 pieds carrés. On avait donc un système de correspondance où le calcul fractionnaire était nécessaire pour convertir ; il en allait d'ailleurs de même chez les Sumériens lorsqu'on regarde les égalités précédentes. Seulement la diffusion du système métrique décimal après la Convention a permis la création d'un nouveau système d'unités d'aire basé sur la réduction ou l'agrandissement du carré unité de dix en dix construisant ainsi le système des unités d'aire que nous utilisons encore aujourd'hui. Le système est donc le suivant : *une unité étant fixée, l'unité inférieure est cent fois moindre que l'unité fixée* (1 km² = 100hm² ; ... ; 1 cm² = 100 mm²). Le système, pour être opérationnel, a besoin d'avoir des unités « régulièrement réparties », de 100 en 100. Ce système peut alors se généraliser « à l'infini » puisqu'il repose sur la division ou la multiplication d'un carré unité par un nouveau carré d'aire 100 fois inférieure ou 100 fois supérieure. Remarquons que pour la mesure des terrains, m², dam², hm² sont devenus centiare, are et hectare par la loi du 18 germinal an 3 qui a donné un surnom républicain aux unités du système métrique. Et certaines de ces dénominations subsistent toujours, en particulier l'ha. Ce système d'unités, à l'image de la construction des nombres décimaux, permet de justifier une technique pour évaluer la mesure de l'aire de figures aux contours courbes. Les problèmes de mesure du courbe peuvent être abordés sous cet aspect.

Il est aussi à noter que cette technologie produit, explique et valide la formule de l'aire du rectangle. Elle produit la formule $A = L \times l$, valide la formule par la répétition à l'infini du découpage en encadrant de plus en plus finement les côtés, et justifie la formule par un dénombrement d'unités.