

Petite histoire de la grandeur Aire, en 5 épisodes

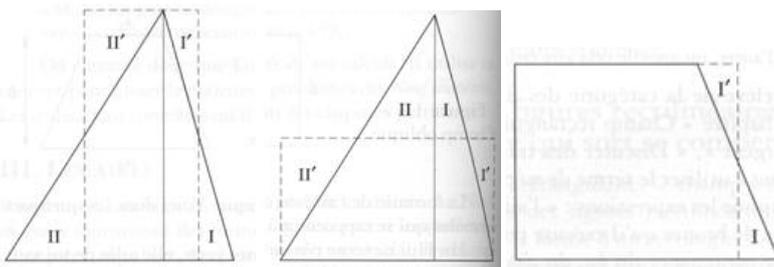
Jean-Paul Guichard



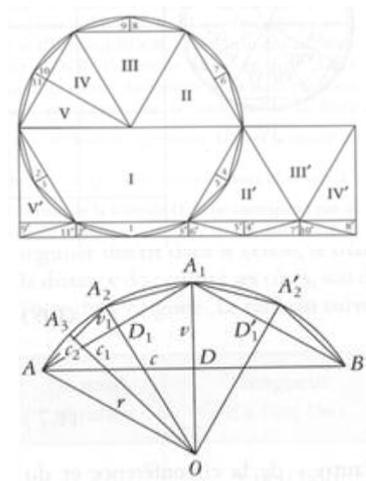
Deuxième épisode : les aires en Chine

Dans le livre « *Les neuf Chapitres – le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires* » (ouvrage du 1^{er} siècle avant notre ère), les aires constituent la grosse partie du premier chapitre (25 problèmes sur 38). D'ailleurs ce chapitre s'intitule : « *Champ rectangulaire* ». Le rectangle en est la figure clé comme le nom du chapitre nous l'indique. Toutes les autres aires s'y rapportent.

L'auteur traite successivement de l'aire du triangle, du champ oblique (de forme trapézoïdale) et du trapèze. Les formules d'aires de ces trois figures sont déduites de celle du rectangle par tracé d'un rectangle d'aire équivalente à celle de la figure donnée construit sur une partie de celle-ci de telle manière que les morceaux en plus correspondent aux morceaux en trop (« ce qui entre et ce qui sort se compense »). Ces quatre aires (qu'il appelle champ) constituent toutes les figures rectilinéaires étudiées. Puis il s'intéresse aux figures curvilignes.



Il va chercher à transformer un cercle en rectangle à l'aide de triangles. Le triangle joue alors le rôle de figure qui articule entre elles les aires rectilignes et les aires circulaires. La figure circulaire de base est le cercle. Son but est de construire un $2n$ -gone (avec n le plus grand possible) inscrit dans le cercle. Son idée est « plus l'on coupe fin, plus ce qui est perdu est petit ». Ce $2n$ -gone épouse alors ce cercle mais il n'est pas dit que sa circonférence est celle du cercle. L'aire de ce $2n$ -gone est calculée à l'aide de triangles qui permettent de construire un rectangle. Il trouve donc une approximation en fonction du rayon ou une formule exacte en fonction de la circonférence. Il va ensuite s'intéresser au segment de cercle (un champ en forme d'arc) puis à l'anneau circulaire (qu'il appelle champ en forme d'anneau). Pour le segment de cercle, son raisonnement prend à nouveau appui sur les triangles. Pour l'anneau circulaire, il se sert de ses résultats sur le cercle. Pour finir, il va alors s'intéresser à une surface courbe : la calotte sphérique.



Dans cette œuvre, les comparaisons d'aire se font par découpage et assemblage dans le but d'obtenir un rectangle. La figure clé est le rectangle, seulement la méthode diffère de la méthode grecque. On ne parle pas de transformation, on se restreint au découpage et à la superposition. Le rectangle est la figure emblématique de la grandeur aire, contrairement à Euclide qui, avec des considérations affines, peut se ramener au parallélogramme.

Remarquons que le problème de l'évaluation de l'aire du courbe tient une place de choix dans le chapitre. La méthode repose sur un découpage et une superposition, même approximative, qui permet de conclure. En classe de 6^{ème} il est intéressant d'intégrer ce problème de la mesure de l'aire des figures courbes, dont une étude débouche sur la formule de l'aire du cercle.

Références bibliographiques pour les 2 premiers épisodes.

EUCLIDE d'Alexandrie. *Les Éléments*. Livres I à IV, VI, IX, XII. Traduction et commentaires de B. Vitrac, introduction de M. Caveing. 4 volumes, Paris : PUF, 1990-2001. Vol.1. Introduction générale, Livres I à IV. Vol. 2. Livres V à IX. Vol. 3. Livres X. Vol. 4 Livres XI à XIII.

Les Œuvres d'Euclide. Trad. F. Peyrard. Paris : C.-F. Patris, 1819. Nouveau tirage augmenté d'une introduction par J. Itard, Paris : Blanchard, 1993. Première édition, Paris 1804 : *Les éléments de géométrie d'Euclide*, disponibles sur : <http://gallica2.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110982q.r=.langFR>.

LIU HUI. *Les Neuf Chapitres*, Chapitre 5. Traduction : K Chemla, Dunod, 2004.

Informations sur *Les Neuf Chapitres* sur :

http://www.univ-irem.fr/commissions/epistemologie/ressources/ress_ext/grands%20textes/neufchapters.htm