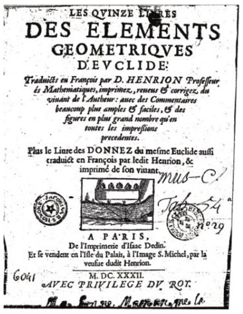
Petite histoire de la grandeur Aire, en 5 épisodes

Jean-Paul Guichard

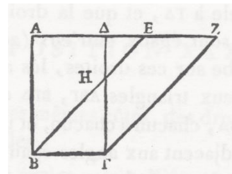

LES QVINZE LIVRES
DES ELEMENTS
GEOMETRIQVES
D'EVCLIDE:
Traduicts en François par D. HENRION Professeur és Mathematiques, imprimez, reueus & corrigez du viuant de l'Autheur: auec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles, & des figures en plus grand nombre qu'en toutes les impressions precedentes.
Plus le Liure des DONNEZ du mesme Euclide aussi traduict en François par ledit Henrion, & imprimé de son viuant.
A PARIS,
De l'Imprimerie d'Isaac Dedin.
Et se vendent en l'Isle du Palais, à l'Image S. Michel, par la veufue dudit Henrion.
M. DC. XXXII.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Dans les géométries anciennes, les problèmes d'aire sont des problèmes basés sur des constructions ou des découpages. Même si les civilisations se sont servies de formules pour évaluer des aires, elles ont dû, pour cela, modéliser terrains et objets par des figures géométriques, travailler sur ces figures, et utiliser des unités d'aire dépendantes des mesures de longueur en vigueur dans cette civilisation. Partons donc à la découverte.

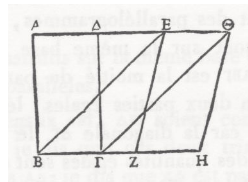
Premier épisode : les aires chez Euclide

Dans « Les Éléments », Euclide traite des égalités d'aires de la façon suivante.

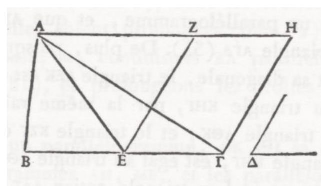
Dans le livre 1, il montre, dans la proposition 4, que deux triangles ayant deux côtés de même mesure et l'angle en commun sont « égaux » ; proposition qu'il utilise pour démontrer la **proposition 35** qui établit l'égalité des aires de deux parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles ; pour cela il utilise l'égalité des aires de deux triangles égaux (rectangles sur la figure), auxquelles il soustrait l'aire d'un triangle commun, ce qui donne deux trapèzes d'aires égales, puis l'égalité des aires des deux parallélogrammes, par ajout de l'aire d'un triangle commun.


Proposition 35

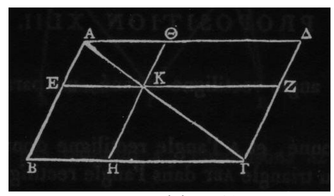
Il généralise alors le résultat dans la **proposition 36** où il n'impose plus aux parallélogrammes que des bases égales et d'être dans les mêmes parallèles :
« Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux ».


Proposition 36

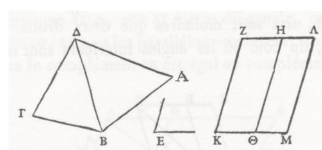
Il traite le cas des triangles avec les mêmes principes que pour les parallélogrammes. Il fait alors le lien entre le triangle et le parallélogramme dans la **proposition 42** :
« Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à un triangle donné ».
Remarquons que l'angle peut être un angle droit et donc le parallélogramme cherché peut devenir le rectangle cherché.


Proposition 42

Dans la **proposition 43**, il explique comment construire deux parallélogrammes de même aire dont l'un peut être donné et dont on peut fixer une des dimensions dans l'autre :
« Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux ».

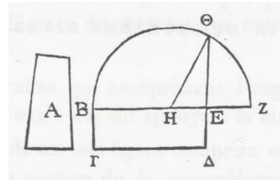

Proposition 43

Dans la **proposition 45**, il montre que pour tout polygone, on peut construire un parallélogramme de même aire en se servant des résultats précédents :
« Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée ».
Son raisonnement passe par la décomposition de la figure rectiligne en triangles qui, grâce à la proposition 42, peuvent être assimilés à des parallélogrammes au niveau de l'aire et qui, grâce à la proposition 43, peuvent avoir un côté de même mesure ce qui permet de tous les coller.
Comme dans la proposition 42, l'angle est à choisir, on peut en déduire que **toute figure rectiligne est égale à un rectangle**.


Proposition 45

Le livre 1 se termine par la proposition 47 (théorème de Pythagore), qui montre l'égalité des aires de deux carrés avec celle d'un troisième, et la proposition 48 (sa réciproque). Cependant le théorème de Pythagore ne sera utilisé qu'au livre 2 pour construire un carré d'aire égale à celle d'un polygone. Donc toutes les propositions du livre 1 convergent vers la démonstration de la proposition 45, comme le montre très bien le schéma déductif du livre 1 donné par Bernard Vitrac dans le volume 1 de sa traduction des Éléments d'Euclide. Le résultat final du livre 1 est donc que tout polygone peut, par des constructions géométriques basées sur l'utilisation de la règle et du compas, se ramener à un parallélogramme de même aire, et donc à un rectangle de même aire. Toute figure polygonale peut se ramener à un rectangle de même aire. C'est ce que nous avons appelons la rectangulation des aires.
Remarquons que pour arriver à ce résultat Euclide utilise des constructions et non des découpages. Cependant, comme nous l'avons montré pour la proposition 35, Euclide enlève un « morceau » à une figure pour avoir des aires égales, ou complète par un « morceau ». Une certaine forme de découpage est donc présente dans l'argumentation euclidienne pour établir des égalités d'aires. Il est à noter que pour traiter les questions concernant ce que nous appelons "aire", Euclide parle d'un nouveau type d'égalité des figures, sans utiliser un nouveau mot pour cela. Une autre propriété se dégage à la fin du livre 1 : pour toute longueur donnée à l'avance, on peut construire un rectangle de même aire qu'un rectangle donné.

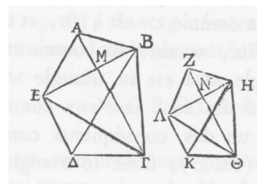
Le livre 2, quant à lui, résout le problème de la quadrature de tout polygone, qui constitue la **proposition 14**, et dernière, du livre 2 :
« Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée ».
Les outils du livre 1 ne suffisent plus pour répondre au questionnement du livre 2. Euclide va y construire une algèbre géométrique : identités remarquables, résolution des équations du second degré. Rectangles et carrés y sont les figures dominantes.
Le parallélogramme est la figure clé du livre 1 des Éléments, mais dans la pratique c'est le cas particulier du rectangle qui est intéressant : il est possible de construire un rectangle de même aire que celle de tout polygone donné a priori.



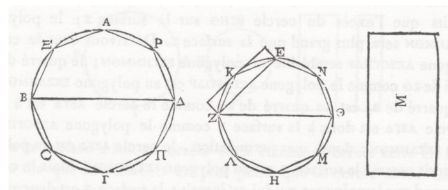
Proposition 14

Cette propriété est à rapprocher du théorème de Hadwiger-Glur qui démontre que « deux polygones de même aire sont équidécomposables en un nombre fini d'étapes sous forme de triangles ». Les éléments d'Euclide sont bâtis comme s'il avait voulu démontrer ce théorème mais en s'arrêtant au seuil de la démonstration (la démonstration de ce théorème a été exposée à l'Université d'été de Saint Flour (1999) par Dominique Roux).

Pour les aires, comme pour les volumes, il est à remarquer qu'il n'y a aucune formule dans les Eléments d'Euclide : on compare uniquement des aires, les unes par rapport aux autres. Égalité des aires des parallélogrammes ou des triangles de même bases et compris entre des parallèles, donc de même hauteur. Aire double : « Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et qu'il est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle » (proposition 41). On ramène l'aire d'une figure à celle d'une autre figure de base : triangle, parallélogramme d'angle donné, carré.



C'est au livre 6 que sera abordé le problème de la comparaison des aires des figures semblables : « Les figures rectilignes semblables sont entre elles en raison double des côtés homologues » (corollaire de la proposition 20). Donc proportionnalité des aires aux carrés des longueurs. Cette proposition s'obtient par triangulation du polygone et grâce à la proposition analogue pour les triangles : « Les triangles semblables sont entre eux en raison double des côtés homologues » (proposition 19).



Et ce n'est qu'au début du livre 12 qu'Euclide traite le cas de l'aire du cercle : « Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres » (proposition 2), après avoir établi que : « Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entre eux comme les carrés des diamètres » (proposition 1).
Le problème de la comparaison des aires des figures, sans aucune mesure, parcourt donc tout l'ouvrage d'Euclide.