RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.
Frédéric de Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Des problèmes

82-1 *de Serge Parpay (Niort)* :
Un défi *délicat.*
" ...respectable... was Dirac's appetite for mathematical games and puzzles that served no purpose at all beyond entertainment. Once, he have a devastating performance in a game that has been introduced at Göttingen in 1929. The challenge was to express any whole number using the number 2 precisely four times, and using well-known mathematical symbols. The first numbers are easy :
1 = (2 + 2) / (2 + 2) ; 2 = (2 / 2) + (2 / 2) ; 3 = (2 x 2) – (2 / 2) ; 4 = 2 + 2 + 2 – 2
Soon, the game becomes much more difficult, even for Göttingen's finest's mathematical minds. They spent hundreds of hours playing the game with ever-higher numbers – until Dirac found a simple and general formula enabling *any* number to be expressed using four 2s, entirely within the rules. He had rendered the game pointless."

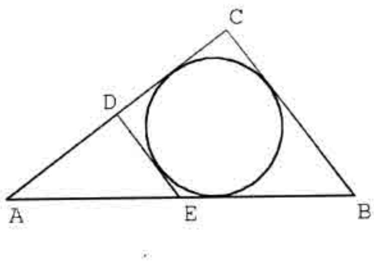
The Strangest Man. The Hidden Life of Paul Dirac, Quantum Genius.
Graham Farmelo. *Faber and Faber, London, 2009.*

La solution de Dirac, qui ne comporte d'ailleurs 'éventuellement' que trois nombres 2, sera donnée dans le prochain numéro de Corol'aire... ainsi que les solutions de nos collègues !
Inutile de préciser que je n'ai pas cherché longtemps le problème ; il était plus raisonnable pour moi de filer voir la solution. Le livre cité est une biographie de Dirac mais aussi un panorama de la science et des savants mathématiciens et physiciens de son temps.

82-2 *de Serge Parpay (Niort)* :
Un exercice de vieille géométrie.
Lors d'une réunion de l'« Atelier Scientifique » de l'IREM de Poitiers, consacrée aux géométries non euclidiennes, Dominique Gaud a été amené à proposer un exercice de géométrie euclidienne. « On donne dans un plan un cercle (C) et deux points A et B quelconques hors du cercle. Construire le cercle (C') passant par A et B et orthogonal au cercle (C) ». *Les participants à la réunion ont dû réfléchir quelques instants. Le vieux prof Ila Ransor, qui a pourtant aimé de tels exercices au temps de la bonne vieille géométrie, a dû lui aussi réactiver tant bien que mal ses méninges pour résoudre ce problème.*

82-3 *de Serge Parpay (Niort)* :
Sérieux s'abstenir.
On connaît les triplets pythagoriciens (a, b, c), nombres entiers tels que $a^2 = b^2 + c^2$. Le prof Ila Ransor, dont le sérieux reste à prouver, veut savoir s'il existe des triplets « thypagoriciens » (a, b, c), nombres entiers (évidemment non carrés parfaits) tels que $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Après tout pourquoi pas ?

82-4 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Dans le triangle ABC avec AC = 4, BC = 3 et AB = 5, montrer que le cercle inscrit est tangent à la droite passant par les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB].



Des solutions

79-1 *de Walter Mesnier* :
Un bon athlète sait qu'il doit adapter sa vitesse à la distance parcourue. Pour une distance double, il doit réduire sa vitesse de 5%. Sachant qu'il court 10 km au rythme de 20 km/h, à quelle allure doit-il courir l'épreuve reine du 1500 m ? Quel sera alors son chrono ?
Question bis : Prouver que sur son 10 km, il y a obligatoirement une portion d'un km qu'il a parcouru en exactement 3 minutes.

Solution de Frédéric de Ligt :
On cherche une fonction continue f de $\mathbf{R}^{*+}$ dans $\mathbf{R}^{*+}$ telle que $f(2x) = 0{,}95f(x)$ (1). Dans cette équation fonctionnelle x désigne la distance parcourue en km et $f(x)$ la vitesse à adopter en km/h. La condition imposée est $f(10) = 20$.

On pourrait penser qu'alors l'équation (1) admet une unique solution $f_1 : x \to 20\times\left(\frac{x}{10}\right)^{\frac{\ln 0{,}95}{\ln 2}}$. Il n'en est rien. La fonction $f_2 : x \to e^{\sin\left(\frac{2\pi\ln\left(\frac{x}{10}\right)}{\ln 2}\right)} \times f_1(x)$ ferait aussi bien l'affaire et plus généralement toute fonction f de la forme $g \times f$ où g est continue sur $\mathbf{R}^{*+}$ et vérifie $g(2x) = g(x)$ et $g(10) = 1$. On va bien sûr choisir f_1 qui est la plus simple pour répondre à la question posée. $f_1(1{,}5) = 20\times 0{,}15^{\frac{\ln 0{,}95}{\ln 2}} \approx 23{,}0144$ (en km/h) et son chrono $t \approx \frac{1{,}5\text{km}}{23{,}0144\text{km/h}} \approx 3\text{min}\,54{,}64s$

Maintenant la question bis. À la vitesse de 20 km/h le coureur a parcouru les 10 km en 30 min. On définit tout d'abord la fonction d qui associe à chaque durée en min la distance parcourue en km depuis le départ pendant ce laps de temps. d est définie et continue sur [0 ; 30]. On définit ensuite la fonction $d' : x \to d(t+3) - d(t) - 1$. d' est continue sur [0 ; 27]. Par télescopage : $\sum_{k=0}^{9} d'(3k) = d(30) - d(0) - 10 = 0$. Si l'un des termes de la somme est nul, l'assertion est vérifiée. Sinon il existe au moins deux termes de signes contraires, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers k et k' entre 0 et 9 tels que $d'(3k) > 0$ et $d'(3k') < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe t_0 entre $3k$ et $3k'$ tel que $d'(t_0) = 0$.

79-2 *de Walter Mesnier* :
Héron d'Alexandrie est célèbre pour sa formule donnant l'aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés. Dans sa démonstration (purement géométrique), il donne deux applications numériques : (7 ; 8 ; 9) et (13 ; 14 ; 15). L'une des deux est « amusante » car elle évite l'extraction douloureuse de racines carrées.
Question 1 : Rappeler la formule d'Héron. Quelle est l'application numérique « amusante » ?
Question 2 : Existe-t-il d'autres dimensions (entières et consécutives) pour que le calcul de l'aire du triangle par la formule de Héron soit « amusant » ? (C'est-à-dire que l'aire soit aussi un nombre entier).

Solution de Frédéric de Ligt :

La formule de Héron bien connue $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donne l'aire du triangle en fonction des trois côtés a, b et c, s désignant le demi-périmètre du triangle. On utilise cette formule pour calculer l'aire du triangle de côtés 13, 14 et 15 et on trouve une valeur entière : 84.
Y a-t-il d'autres triangles à côtés entiers consécutifs et d'aire entière ?
Les trois longueurs peuvent s'écrire n – 1, n et n + 1 avec n entier plus grand que 2 (pour obtenir un vrai triangle). L'aire du triangle correspondant est donnée par l'expression : $\sqrt{\frac{3n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \sqrt{\frac{3n^2(n^2-4)}{16}}$. Pour obtenir une valeur entière il faut et il suffit que $\frac{3n^2(n^2-4)}{16}$ soit le carré d'un entier. Il est clair que n doit être pair. On pose donc n = 2n'. L'expression prend alors la forme $3n'^2(n'^2 - 1)$. On a alors, pour n' supérieur ou égale à 2, les équivalences suivantes :
$3n'^2(n'^2 - 1)$ est un carré $\Leftrightarrow$ $3(n'^2 - 1)$ est un carré $\Leftrightarrow$ $n'^2 - 1$ est le triple du carré d'un entier m non nul $\Leftrightarrow$ $n'^2 - 3m^2 = 1$.
On reconnaît une équation de Pell-Fermat* dont la résolution est classique. La solution fondamentale est n' = 2 et m = 1. La relation de récurrence $x_{i+2} = 2x_1x_{i+1} - x_i$ pour i entier avec $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$ donne les valeurs de n' dans l'ordre croissant. En la doublant on obtient alors la suite des longueurs possibles du côté médian.
On retrouve ainsi les triangles (3 ; 4 ; 5), (13 ; 14 ; 15) puis on découvre (51 ; 52 ; 53), (193 ; 194 ; 195) et ainsi de suite.
**Une référence récente à ce sujet : Théorie des nombres de Daniel Duverney aux éditions Dunod.*

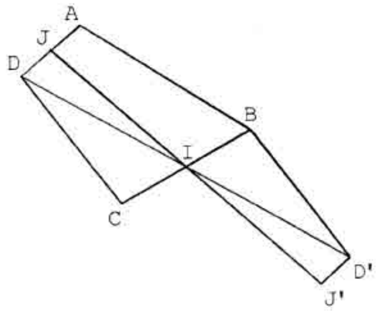
79-3 *de Louis Rivoallan* :
Par combien de zéros se termine 2009! ?

Solution de Frédéric de Ligt :
On peut écrire 2009 ! sous la forme 2^n5^mq où q n'est divisible ni par 2 ni par 5. Et 2009 ! se terminera par min(n ; m) zéros. Comme il est clair que $n > m$, il suffit de chercher l'entier m.
On calcule alors la somme [2009/5] + [2009/25] + [2009/125] + [2009/625] qui vaut 500 ([ ] désigne la partie entière d'un nombre). 2009 ! se termine par 500 zéros.

80-1 *de Jean-Christophe Laugier* :
Il est bien connu que dans un trapèze le segment qui joint les milieux des côtés opposés non parallèles est égal à la demi-somme des deux bases. Mais qu'en est-il de la réciproque ?
Si le segment joignant les milieux de deux côtés opposés d'un quadrilatère est égal à la demi-somme des deux autres, ce quadrilatère est-il un trapèze ?

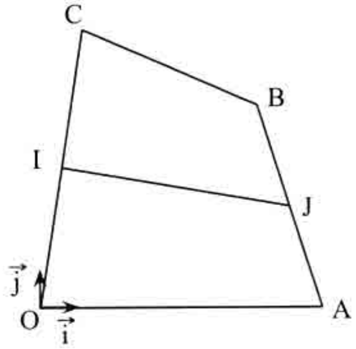
Solution de l'auteur :

Première solution (géométrique) :



Soient donc un quadrilatère ABCD, I milieu de [BC], J milieu de [DA]. On suppose que IJ = (AB + DC)/2. Soit D' et J' les symétriques respectifs de D et J par rapport à I. DJD'J' est donc un parallélogramme. Par suite $\overrightarrow{D'J'} = \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AJ}$ et AJJ'D' est donc aussi un parallélogramme, d'où AD' = JJ' = 2JI = AB + DC. BD'CD étant un parallélogramme, on a DC = BD', d'où AD' = AB + BD'. Il s'ensuit que B appartient à [AD'] ; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD'}$ sont donc colinéaires de même sens et il en est de même de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ puisque $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD'}$. ABCD est bien un parallélogramme.

Deuxième solution (analytique)



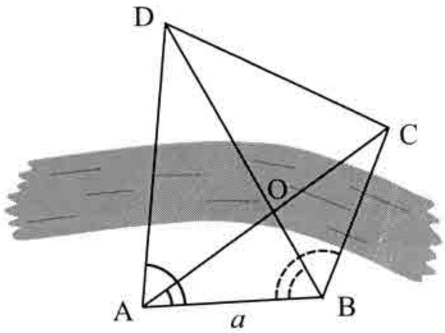
Soit OABC un quadrilatère tel que OA + BC = 2IJ, I étant le milieu de [OC] et J le milieu de [AB]. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé avec $\vec{i}$ colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ et de même sens. On pose $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$ $(a > 0)$. Soit (c, c') les coordonnées de C, (b, b') les coordonnées de B. On a par hypothèse OA + BC = 2IJ d'où $a+\sqrt{(b-c)^2+(b'-c')^2} = 2\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b'}{2}-\frac{c'}{2}\right)^2}$.

En élevant au carré, et après simplification, il vient :

$a^2+(b-c)^2+(b'-c')^2+2a\sqrt{(b-c)^2+(b'-c')^2} = (a+b-c)^2+(b'-c')^2$ soit

$a^2+(b-c)^2+2a\sqrt{(b-c)^2+(b'-c')^2} = a^2+(b-c)^2+2a(b-c)$ d'où $\sqrt{(b-c)^2+(b'-c')^2} = b-c$. Par suite $b \geq c$ et $b' = c'$, ce qui signifie que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires de même sens donc que OABC est un trapèze (réduit à un triangle si b = c auquel cas B = C).

80-4 *de Frédéric de Ligt d'après un exercice proposé par Jean-Paul Guichard :*



Une parcelle a la forme d'un quadrilatère convexe. Les sommets A, B, C et D représentent les bornes. Une rivière traverse le terrain comme indiqué sur la figure. Un géomètre, qui veut estimer l'aire de la parcelle, se poste à la borne A et relève les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CAB}$. Puis il se rend à la borne B distante de a mètres et relève alors les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ABC}$.

Exprimer l'aire de la parcelle à l'aide des seules mesures prises par le géomètre.

Solution de l'auteur : On note A l'aire de ABCD, A_1 celle de AOB, A_2 celle de BOC, A_3 celle de COD et A_4 celle de DOA.

Lemme 1 : Dans tout quadrilatère convexe on a $A_1A_3 = A_2A_4$

Preuve : *On appelle* h_1 et h_2 *les projetés orthogonaux de* B *et* D *sur* (AC).

On a : $A_1 / A_2 = h_1OA / h_1OC$ *et* $A_4 / A_3 = h_2OA / h_2OC$. *D'où* $A_1 / A_2 = A_4 / A_3$. On utilise cette égalité pour factoriser : $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A_1 + A_2 + A_4A_2 / A_1 + A_4 = (A_1 + A_2)(A_1 + A_4) / A_1$ (1). On peut facilement établir la formule qui donne l'aire d'un triangle connaissant un côté et les deux angles qui lui sont adjacents. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2 : L'aire d'un triangle ABC est donnée par la formule $\dfrac{AB^2 \sin\widehat{A} \sin\widehat{B}}{2\sin(\widehat{A}+\widehat{B})}$ (2).

Preuve : *On part de la formule classique qui donne l'aire d'un triangle en fonction des deux côtés d'un triangle et de l'angle entre ces deux côtés, à savoir* $(AB \times AC) \times \sin\widehat{A} / 2$ (3). *On se sert ensuite de la loi des sinus, qui assure que* $AB / \sin\widehat{C} = AC / \sin\widehat{B}$, *pour obtenir une expression de* AC *que l'on substitue ensuite à* AC *dans la formule* (3). *On obtient la formule annoncée en observant que* $\sin(\widehat{A}+\widehat{B}) = \sin\widehat{C}$.

Tous les ingrédients sont maintenant réunis. On reprend l'expression (1) et on utilise la formule (2) en utilisant les notations suivantes : $a = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAD}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$, $\widehat{A_1} = \widehat{OAB}$, $\widehat{B_1} = \widehat{OBA}$, $\widehat{C_2} = \widehat{OCB}$, $\widehat{D_4} = \widehat{ODA}$ et $\widehat{O_1} = \widehat{AOB}$.

$A = \left(\dfrac{a^2 \sin\widehat{A_1} \sin\widehat{B}}{2\sin\widehat{C_2}}\right)\left(\dfrac{a^2 \sin\widehat{A} \sin\widehat{B_1}}{2\sin\widehat{D_4}}\right)\left(\dfrac{2\sin\widehat{O_1}}{a^2 \sin\widehat{A_1} \sin\widehat{B_1}}\right)$. Après simplification par $\frac{1}{2}a^2 \sin\widehat{A_1} \sin\widehat{B_1}$ on a enfin la formule désirée : $A = \dfrac{a^2 \sin\widehat{B} \sin\widehat{A} \sin(\widehat{A_1}+\widehat{B_1})}{2\sin(\widehat{A_1}+\widehat{B}) \sin(\widehat{A}+\widehat{B_1})}$.