Edito

Le sursis

En cette rentrée, le monde de l'éducation est en chantier et il est encore difficile d'y voir clair. La mise en place du socle commun dans les écoles et les collèges, les réformes du lycée et de la formation initiale des enseignants se mettent en place. Que va-t-il sortir de terre ? Il y a des inquiétudes légitimes qui s'expriment. La précipitation de la mise en place est-elle révélatrice de plans mal préparés ? Les critiques formulées par l'APMEP sont nombreuses tant sur la forme que sur le fond, je ne les rappelle pas, elles sont connues des adhérents de l'Association.

Le plus préoccupant reste pourtant à venir. Je cite un extrait de la synthèse des notes des correspondants académiques de l'Inspection Générale de l'Administration de l'Education nationale et de la Recherche parue en juillet 2010 : *Les difficultés budgétaires de la rentrée 2010 sont « minorées » par le choix de faire porter l'essentiel des suppressions d'emplois sur les stagiaires... Il est prévu, dès 2011, de reprendre les suppressions importantes d'emplois à l'Éducation Nationale (environ 16 000 emplois par an).* La situation est déjà tendue, la plupart des collègues sont au maximum légal de leur service. Dans quelles conditions notre discipline va-t-elle être enseignée ? Des classes plus nombreuses ? Le recours massif aux vacataires et aux contractuels (en mathématiques ils sont une denrée rare) ? Des aménagements sur les dispositions légales pour autoriser une augmentation des maxima de services ?

Il va falloir rester vigilant pour que les conditions de travail restent compatibles avec un enseignement mathématique de qualité.

Pour rebondir sur l'actualité, la France pourra-t-elle tenir longtemps le rang éminent qui est le sien au niveau international en mathématiques ? Pourra-t-elle continuer à récolter des médailles Fields comme celle que vient d'obtenir Cédric Villani ? Rien n'est moins sûr si le vivier est négligé.

Bonne rentrée à tous.

Frédéric de Ligt

SOMMAIRE

Association
des **P**rofesseurs
de **M**athématiques
de l' **E**nseignement
Public

Régionale de Poitou-Charentes

n°82

Septembre 2010

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

FREDERIC DE LIGT
3 RUE DE LA PIERRIERE
17270 MONTGUYON

APMEP : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél : apmep.poitiers@free.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros) + Suppléments : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Frédéric de LIGT
Comité de rédaction ...	F. de LIGT, L-M BONNEVAL N. MINET, J. FROMENTIN,
Imprimerie	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Éditeur	APMEP Rég. Poitou-Charentes
Siège social	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Dépôt légal	Septembre 2010

Vie de l'association

Ouvrages anciens du collège Henri IV

Le collège Henri IV de Poitiers (1 rue Louis Renard) a fêté ses 400 ans en 2008. À cette occasion il a voulu mettre en valeur son riche fonds d'ouvrages anciens. Une équipe de la Régionale APMEP a travaillé pendant trois ans (de septembre 2007 à juin 2010) sur les ouvrages scientifiques : livres et revues des XVIIe, XVIIIe, XIXe et XXe siècle.
Ce travail est maintenant terminé. Les ouvrages sont rangés dans une salle spécialement aménagée à proximité du CDI. Ils sont répertoriés dans un fichier Excel téléchargeable sur notre site http://apmep.poitiers.free.fr/
Une convention a été signée entre le collège Henri IV et la Régionale APMEP. La Régionale fera parvenir au collège la liste de ses adhérents. Tout adhérent APMEP peut consulter les ouvrages : il suffit qu'il se présente au CDI, le documentaliste lui ouvrira la salle et conservera sa carte d'identité pendant la durée de la consultation. Sauf demande écrite au chef d'établissement, les livres ne quittent pas le collège.
Allez consulter la liste des ouvrages : vous aurez sûrement envie de vous déplacer pour les feuilleter réellement !

Louis-Marie BONNEVAL

Exposition itinérante « Comment tu comptes ? » un succès qui ne faiblit pas

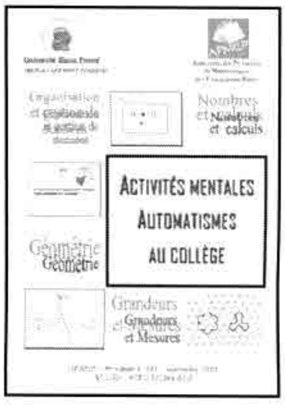
L'exposition « Comment tu comptes ? », se compose d'une série de 22 panneaux, de 5 bouliers et d'un DVD. Fruit de la collaboration de la Régionale APMEP, de l'IREM de Poitiers et de l'Espace Mendès France, elle retrace de façon claire et pédagogique la longue histoire du calcul : systèmes de numération, abaques, machines à calculer... Depuis l'an dernier, l'expo circule sans interruption d'établissement en établissement et les réservations sont prises jusqu'à la fin de cette année 2010. Si vous voulez la faire venir chez vous, il faudra patienter jusqu'au début de l'année prochaine. Le coût de la location est de 40 € par semaine. Une rotation entre établissements assez voisins est organisée de façon à réduire les frais de transport (l'expo est transportable dans un véhicule personnel).
L'exposition sera présente aux Journées Nationales de l'APMEP à Paris les 23, 24 et 25 octobre prochains.
Pour des informations complémentaires ou une réservation vous pouvez dès à présent prendre contact par mél : deligt@wanadoo.fr.

Journée de la Régionale

Lorsque ce numéro de Corol'aire vous parviendra, les inscriptions au PAF pour la Journée de la Régionale seront closes. En revanche, il vous restera peut-être quelques jours pour signaler, sur le site de la Régionale, que vous souhaitez prendre le déjeuner au restaurant du lycée de la Venise Verte. Nous devons en effet donner fin septembre le nombre de convives à l'intendance du lycée.
Il vous sera toujours possible de vous inscrire à la Journée début octobre auprès de Nicolas Minet (nicolasminet@ac-poitiers.fr).
À l'occasion de cette Journée, de nombreuses brochures APMEP, dont les dernières et en particulier la brochure « Activités mentales – Automatismes au collège », seront disponibles au prix adhérent. Profitez de cet évènement pour vous les procurer. Vous pouvez les réserver auprès de Jacques Germain (jacques.germain86@orange.fr) avant vendredi 8 octobre.

La page ci-contre, à afficher dans votre établissement, donne le planning de la Journée.
Rappelons ici les ateliers-débats du matin et les ateliers de l'après-midi :
Ateliers débats :
- L'évaluation par compétence et le socle commun au collège
- La réforme du lycée : la place des mathématiques dans l'accompagnement personnalisé en seconde.

Ateliers :
- La réforme du lycée : la place des mathématiques dans le module MPS.
- Jeux et mathématiques : activités à partir des brochures JEUX de l'APMEP.
- Les angles au collège : arpentage et navigation.
- Algorithmique.



Journée de la Régionale APMEP de POITOU-CHARENTES

La loi des séries :

hasard ou fatalité

Conférence de

Elise Janvresse

chargée de recherches au CNRS (Université de Rouen)

Dans le langage courant, la répétition de calamités a donné lieu à une expression dont les journalistes sont friands lorsqu'ils annoncent plusieurs catastrophes de nature similaire : la loi des séries. Mais cette loi en est-elle vraiment une ? Y a-t-il un sens caché derrière chaque coïncidence ? Et si ce n'était que pur hasard ? C'est ici que la théorie des probabilités vient à notre rescousse...
Nous illustrerons notre propos d'exemples tirés de la vie réelle : que penser de la série des crashs aériens d'août 2005 ? Peut-on faire confiance à une infirmière quand on constate que les décès sont plus nombreux pendant son service ? Nous verrons que la justice elle-même, si elle n'est pas éclairée par les mathématiques, peut se laisser prendre au piège de la loi des séries...

Mercredi 13 Octobre 2010
Lycée de la Venise Verte
71 rue Laurent Bonnevay
NIORT

8h45	– **Accueil**
9h15	– **Présentation de la journée**
9h30	– **Conférence**
11h	– **Deux ateliers-débats** en parallèle
12h30	– **Repas** sur place pour ceux qui le souhaitent
14h	– **Quatre ateliers** en parallèle
16h	– **Bilan** de la journée
17h	– **fin** de la journée

APMEP de Poitou-Charentes, IREM - Faculté des sciences, 40 Av. du Recteur Pineau, 86022 POITIERS Cedex

RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.
Frédéric de Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Des problèmes

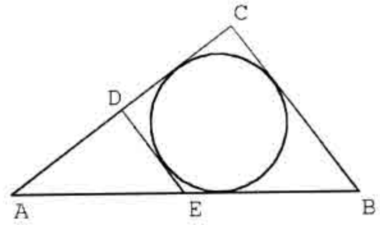
82-1 *de Serge Parpay (Niort)* :
Un défi *délicat.*
" ...respectable... was Dirac's appetite for mathematical games and puzzles that served no purpose at all beyond entertainment. Once, he have a devastating performance in a game that has been introduced at Göttingen in 1929. The challenge was to express any whole number using the number 2 precisely four times, and using well-known mathematical symbols. The first numbers are easy :
1 = (2 + 2) / (2 + 2) ; 2 = (2 / 2) + (2 / 2) ; 3 = (2 x 2) – (2 / 2) ; 4 = 2 + 2 + 2 – 2
Soon, the game becomes much more difficult, even for Göttingen's finest's mathematical minds. They spent hundreds of hours playing the game with ever-higher numbers – until Dirac found a simple and general formula enabling *any* number to be expressed using four 2s, entirely within the rules. He had rendered the game pointless."
The Strangest Man. The Hidden Life of Paul Dirac, Quantum Genius.
Graham Farmelo. *Faber and Faber, London, 2009.*

La solution de Dirac, qui ne comporte d'ailleurs 'éventuellement' que trois nombres 2, sera donnée dans le prochain numéro de Corol'aire... ainsi que les solutions de nos collègues !
Inutile de préciser que je n'ai pas cherché longtemps le problème ; il était plus raisonnable pour moi de filer voir la solution. Le livre cité est une biographie de Dirac mais aussi un panorama de la science et des savants mathématiciens et physiciens de son temps.

82-2 *de Serge Parpay (Niort)* :
Un exercice de vieille géométrie.
Lors d'une réunion de l'« Atelier Scientifique » de l'IREM de Poitiers, consacrée aux géométries non euclidiennes, Dominique Gaud a été amené à proposer un exercice de géométrie euclidienne. « On donne dans un plan un cercle (C) et deux points A et B quelconques hors du cercle. Construire le cercle (C') passant par A et B et orthogonal au cercle (C) ». *Les participants à la réunion ont dû réfléchir quelques instants. Le vieux prof Ila Ransor, qui a pourtant aimé de tels exercices au temps de la bonne vieille géométrie, a dû lui aussi réactiver tant bien que mal ses méninges pour résoudre ce problème.*

82-3 *de Serge Parpay (Niort)* :
Sérieux s'abstenir.
On connaît les triplets pythagoriciens (a, b, c), nombres entiers tels que $a^2 = b^2 + c^2$. Le prof Ila Ransor, dont le sérieux reste à prouver, veut savoir s'il existe des triplets « thypagoriciens » (a, b, c), nombres entiers (évidemment non carrés parfaits) tels que $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Après tout pourquoi pas ?

82-4 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Dans le triangle ABC avec AC = 4, BC = 3 et AB = 5, montrer que le cercle inscrit est tangent à la droite passant par les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB].



Des solutions

79-1 *de Walter Mesnier* :
Un bon athlète sait qu'il doit adapter sa vitesse à la distance parcourue. Pour une distance double, il doit réduire sa vitesse de 5%. Sachant qu'il court 10 km au rythme de 20 km/h, à quelle allure doit-il courir l'épreuve reine du 1500 m ? Quel sera alors son chrono ?
Question bis : Prouver que sur son 10 km, il y a obligatoirement une portion d'un km qu'il a parcouru en exactement 3 minutes.

Solution de Frédéric de Ligt :
On cherche une fonction continue f de $\mathbf{R}^{*+}$ dans $\mathbf{R}^{*+}$ telle que $f(2x) = 0{,}95f(x)$ (1). Dans cette équation fonctionnelle x désigne la distance parcourue en km et $f(x)$ la vitesse à adopter en km/h. La condition imposée est $f(10) = 20$.

On pourrait penser qu'alors l'équation (1) admet une unique solution $f_1 : x \to 20\times\left(\frac{x}{10}\right)^{\frac{\ln 0{,}95}{\ln 2}}$. Il n'en est rien. La fonction $f_2 : x \to e^{\sin\left(\frac{2\pi\ln\left(\frac{x}{10}\right)}{\ln 2}\right)}\times f_1(x)$ ferait aussi bien l'affaire et plus généralement toute fonction f de la forme $g \times f$ où g est continue sur $\mathbf{R}^{*+}$ et vérifie $g(2x) = g(x)$ et $g(10) = 1$. On va bien sûr choisir f_1 qui est la plus simple pour répondre à la question posée. $f_1(1{,}5) = 20\times 0{,}15^{\frac{\ln 0{,}95}{\ln 2}} \approx 23{,}0144$ (en km/h) et son chrono $t \approx \frac{1{,}5\text{km}}{23{,}0144\text{km/h}} \approx 3\,\text{min}\,54{,}64s$

Maintenant la question bis. À la vitesse de 20 km/h le coureur a parcouru les 10 km en 30 min. On définit tout d'abord la fonction d qui associe à chaque durée en min la distance parcourue en km depuis le départ pendant ce laps de temps. d est définie et continue sur [0 ; 30]. On définit ensuite la fonction $d' : x \to d(t+3) - d(t) - 1$. d' est continue sur [0 ; 27]. Par télescopage : $\sum_{k=0}^{9} d'(3k) = d(30) - d(0) - 10 = 0$. Si l'un des termes de la somme est nul, l'assertion est vérifiée. Sinon il existe au moins deux termes de signes contraires, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers k et k' entre 0 et 9 tels que $d'(3k) > 0$ et $d'(3k') < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe t_0 entre $3k$ et $3k'$ tel que $d'(t_0) = 0$.

79-2 *de Walter Mesnier* :
Héron d'Alexandrie est célèbre pour sa formule donnant l'aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés. Dans sa démonstration (purement géométrique), il donne deux applications numériques : (7 ; 8 ; 9) et (13 ; 14 ; 15). L'une des deux est « amusante » car elle évite l'extraction douloureuse de racines carrées.
Question 1 : Rappeler la formule d'Héron. Quelle est l'application numérique « amusante » ?
Question 2 : Existe-t-il d'autres dimensions (entières et consécutives) pour que le calcul de l'aire du triangle par la formule de Héron soit « amusant » ? (C'est-à-dire que l'aire soit aussi un nombre entier).

Solution de Frédéric de Ligt :

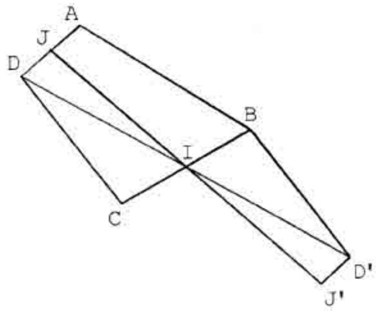
La formule de Héron bien connue $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donne l'aire du triangle en fonction des trois côtés a, b et c, s désignant le demi-périmètre du triangle. On utilise cette formule pour calculer l'aire du triangle de côtés 13, 14 et 15 et on trouve une valeur entière : 84.
Y a-t-il d'autres triangles à côtés entiers consécutifs et d'aire entière ?
Les trois longueurs peuvent s'écrire n – 1, n et n + 1 avec n entier plus grand que 2 (pour obtenir un vrai triangle). L'aire du triangle correspondant est donnée par l'expression : $\sqrt{\frac{3n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}=\sqrt{\frac{3n^2(n^2-4)}{16}}$. Pour obtenir une valeur entière il faut et il suffit que $\frac{3n^2(n^2-4)}{16}$ soit le carré d'un entier. Il est clair que n doit être pair. On pose donc n = 2n'. L'expression prend alors la forme $3n'^2(n'^2-1)$. On a alors, pour n' supérieur ou égale à 2, les équivalences suivantes :
$3n'^2(n'^2-1)$ est un carré $\Leftrightarrow$ $3(n'^2-1)$ est un carré $\Leftrightarrow$ n'^2-1 est le triple du carré d'un entier m non nul $\Leftrightarrow$ $n'^2-3m^2=1$.
On reconnaît une équation de Pell-Fermat* dont la résolution est classique. La solution fondamentale est n' = 2 et m = 1. La relation de récurrence $x_{i+2} = 2x_1x_{i+1} - x_i$ pour i entier avec $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$ donne les valeurs de n' dans l'ordre croissant. En la doublant on obtient alors la suite des longueurs possibles du côté médian.
On retrouve ainsi les triangles (3 ; 4 ; 5), (13 ; 14 ; 15) puis on découvre (51 ; 52 ; 53), (193 ; 194 ; 195) et ainsi de suite.
**Une référence récente à ce sujet : Théorie des nombres de Daniel Duverney aux éditions Dunod.*

79-3 *de Louis Rivoallan* :
Par combien de zéros se termine 2009! ?

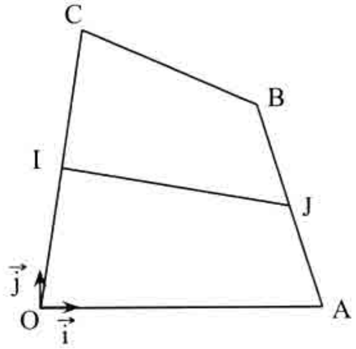
Solution de Frédéric de Ligt :
On peut écrire 2009 ! sous la forme 2^n5^mq où q n'est divisible ni par 2 ni par 5. Et 2009 ! se terminera par min(n ; m) zéros. Comme il est clair que $n > m$, il suffit de chercher l'entier m.
On calcule alors la somme [2009/5] + [2009/25] + [2009/125] + [2009/625] qui vaut 500 ([ ] désigne la partie entière d'un nombre). 2009 ! se termine par 500 zéros.

80-1 *de Jean-Christophe Laugier* :
Il est bien connu que dans un trapèze le segment qui joint les milieux des côtés opposés non parallèles est égal à la demi-somme des deux bases. Mais qu'en est-il de la réciproque ?
Si le segment joignant les milieux de deux côtés opposés d'un quadrilatère est égal à la demi-somme des deux autres, ce quadrilatère est-il un trapèze ?

Solution de l'auteur :



Première solution (géométrique) :
Soient donc un quadrilatère ABCD, I milieu de [BC], J milieu de [DA]. On suppose que IJ = (AB + DC)/2. Soit D' et J' les symétriques respectifs de D et J par rapport à I. DJD'J' est donc un parallélogramme. Par suite $\overrightarrow{D'J'} = \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AJ}$ et AJJ'D' est donc aussi un parallélogramme, d'où AD' = JJ' = 2JI = AB + DC. BD'CD étant un parallélogramme, on a DC = BD', d'où AD' = AB + BD'. Il s'ensuit que B appartient à [AD'] ; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD'}$ sont donc colinéaires de même sens et il en est de même de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ puisque $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD'}$. ABCD est bien un parallélogramme.



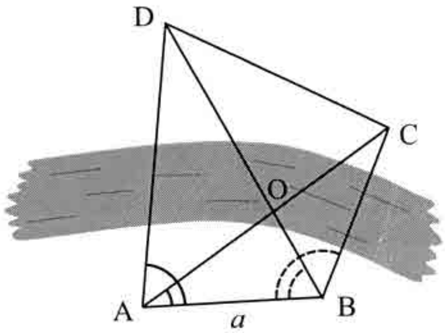
Deuxième solution (analytique)
Soit OABC un quadrilatère tel que OA + BC = 2IJ, I étant le milieu de [OC] et J le milieu de [AB]. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé avec $\vec{i}$ colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ et de même sens. On pose $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$ $(a > 0)$. Soit (c, c') les coordonnées de C, (b, b') les coordonnées de B. On a par hypothèse OA + BC = 2IJ d'où $a+\sqrt{(b-c)^2+(b'-c')^2} = 2\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b'}{2}-\frac{c'}{2}\right)^2}$.

En élevant au carré, et après simplification, il vient :

$a^2+(b-c)^2+(b'-c')^2+2a\sqrt{(b-c)^2+(b'-c')^2} = (a+b-c)^2+(b'-c')^2$ soit

$a^2+(b-c)^2+2a\sqrt{(b-c)^2+(b'-c')^2} = a^2+(b-c)^2+2a(b-c)$ d'où $\sqrt{(b-c)^2+(b'-c')^2} = b-c$. Par suite $b \geq c$ et $b' = c'$, ce qui signifie que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires de même sens donc que OABC est un trapèze (réduit à un triangle si b = c auquel cas B = C).

80-4 *de Frédéric de Ligt d'après un exercice proposé par Jean-Paul Guichard :*
Une parcelle a la forme d'un quadrilatère convexe. Les sommets A, B, C et D représentent les bornes. Une rivière traverse le terrain comme indiqué sur la figure. Un géomètre, qui veut estimer l'aire de la parcelle, se poste à la borne A et relève les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CAB}$. Puis il se rend à la borne B distante de *a* mètres et relève alors les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ABC}$.
Exprimer l'aire de la parcelle à l'aide des seules mesures prises par le géomètre.



Solution de l'auteur : On note A l'aire de ABCD, A_1 celle de AOB, A_2 celle de BOC, A_3 celle de COD et A_4 celle de DOA.

Lemme 1 : Dans tout quadrilatère convexe on a $A_1A_3 = A_2A_4$

Preuve : *On appelle* h_1 et h_2 *les projetés orthogonaux de* B *et* D *sur* (AC).
On a : $A_1 / A_2 = h_1OA / h_1OC$ *et* $A_4 / A_3 = h_2OA / h_2OC$. *D'où* $A_1 / A_2 = A_4 / A_3$. On utilise cette égalité pour factoriser : $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A_1 + A_2 + A_4A_2 / A_1 + A_4 = (A_1 + A_2)(A_1 + A_4) / A_1$ (1). On peut facilement établir la formule qui donne l'aire d'un triangle connaissant un côté et les deux angles qui lui sont adjacents. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2 : L'aire d'un triangle ABC est donnée par la formule $\dfrac{AB^2 \sin\widehat{A} \sin\widehat{B}}{2\sin(\widehat{A}+\widehat{B})}$ (2).

Preuve : *On part de la formule classique qui donne l'aire d'un triangle en fonction des deux côtés d'un triangle et de l'angle entre ces deux côtés, à savoir* $(AB \times AC) \times \sin\widehat{A} / 2$ (3). *On se sert ensuite de la loi des sinus, qui assure que* $AB / \sin\widehat{C} = AC / \sin\widehat{B}$, *pour obtenir une expression de* AC *que l'on substitue ensuite à* AC *dans la formule* (3). *On obtient la formule annoncée en observant que* $\sin(\widehat{A}+\widehat{B}) = \sin\widehat{C}$.

Tous les ingrédients sont maintenant réunis. On reprend l'expression (1) et on utilise la formule (2) en utilisant les notations suivantes : $a = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAD}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$, $\widehat{A_1} = \widehat{OAB}$, $\widehat{B_1} = \widehat{OBA}$, $\widehat{C_2} = \widehat{OCB}$, $\widehat{D_4} = \widehat{ODA}$ et $\widehat{O_1} = \widehat{AOB}$.

$A = \left(\dfrac{a^2\sin\widehat{A_1}\,\sin\widehat{B}}{2\sin\widehat{C_2}}\right)\left(\dfrac{a^2\sin\widehat{A}\,\sin\widehat{B_1}}{2\sin\widehat{D_4}}\right)\left(\dfrac{2\sin\widehat{O_1}}{a^2\sin\widehat{A_1}\sin\widehat{B_1}}\right)$. Après simplification par $\frac{1}{2}a^2\sin\widehat{A_1}\sin\widehat{B_1}$ on a enfin la formule désirée : $A = \dfrac{a^2\sin\widehat{B}\,\sin\widehat{A}\,\sin(\widehat{A_1}+\widehat{B_1})}{2\sin(\widehat{A_1}+\widehat{B})\sin(\widehat{A}+\widehat{B_1})}$.