RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Des problèmes

81-1 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

La boite de diapo.

La boîte de diapositives est rectangulaire et elle est remplie entièrement. Les diapositives sont rangées dans l'ordre chronologique « horizontalement », numérotées 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … sur le première ligne, puis n ; $(n + 1)$; … sur la deuxième ligne, $(2n)$; $(2n + 1)$; … sur la troisième et ainsi de suite.

Il s'agit désormais de la classer dans l'ordre chronologique, mais cette fois-ci, « verticalement », la première colonne étant 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … ; $m - 1$, la seconde m ; $(m + 1)$; …, la troisième $2m$; $(2m + 1)$; … et ainsi de suite. Si je prends la diapositive numéro u_0, dans la configuration initiale, elle va prendre la place de la diapo u_1, qui elle même prendra la place de la diapositive u_2….

Peut-on définir simplement la fonction $u_{n+1} = f(u_n)$?

À quelle condition, si $u_0 \neq 1$ et $u_0 \neq n \times m$, la boîte sera-t-elle bien rangée après exactement $m \times n - 2$ manipulations ?

81-2 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Quels sont les couples d'entiers naturels (a, b) avec $1 < a \leq b$ tels que $11 \times \text{ppcm}(a,b) - 109 \times \text{pgcd}(a,b) = 1$?

81-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon) d'après un problème paru dans « La Recherche »* :

Ma calculatrice est dans un piteux état. Les seules touches d'opération à fonctionner sont les touches +, - et $1/x$ permettant d'additionner, de soustraire et d'inverser.

Puis-je quand même obtenir le produit de deux nombres donnés ?

81-4 *de Frédéric de Ligt (Montguyon) d'après une manipulation observée lors du congrès MATH.en.JEANS à Grenoble* :

On dispose d'une feuille carrée de côté a. A l'aide uniquement de pliages, il faut faire apparaître un segment de longueur $a/7$.

Des solutions

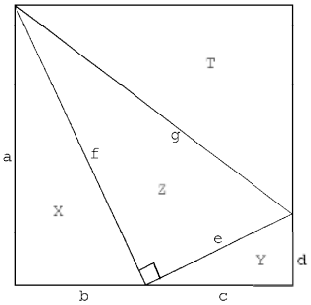
77-1 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Dans son livre, *Tommorow's math* (Oxford University Press, 1972, p.120), Stanley Ogilvy présente un problème ouvert, posé par Solomon Golomb (l'inventeur des polyominos) en 1971 : peut-on inscrire un triangle rectangle dans un carré, de la façon présentée ci-dessous, avec des longueurs entières pour tous les segments qui apparaissent sur la figure ?

Ce problème n'a pas dû rester bien longtemps sans réponse après la parution du livre. Qu'en pensez-vous ?

Solution de l'auteur :

A la lecture de sa présentation dans le livre d'Ogilvy, j'ai tout d'abord cru que ce problème était de même nature que celui de la boîte parfaite (non résolu) où il s'agit d'exhiber un parallélépipède rectangle d'arêtes et de diagonales entières (y compris la grande diagonale intérieure). Mais il n'en est rien. Je n'ai eu besoin d'utiliser que des résultats assez élémentaires d'arithmétique pour établir finalement l'impossibilité par un argument de descente infinie cher à Fermat. Avant que n'apparaisse enfin une contradiction il a fallu que je descende (encore) bien en profondeur dans « l'arborescence » des cas. Si un lecteur peut trouver un moyen plus économique et néanmoins « élémentaire » sa solution sera bienvenue.



Le problème se réduit à chercher des triangles X, Y et Z qui soient pythagoriciens, le triangle T ne pouvant alors que l'être. Première remarque à partir de considérations d'angles : les triangles X et Y doivent être semblables. Il devrait donc exister un triangle pythagoricien primitif semblable à X et Y. Notons u et v les longueurs entières des côtés de son angle droit et w son hypoténuse entière. On sait qu'alors les entiers u et v sont premiers entre eux et que u et v sont de parité différente et on peut décider que $u > v$. Il existe alors deux entiers k et k' tels que :

$b = kv$, $a = ku$, $f = kw$

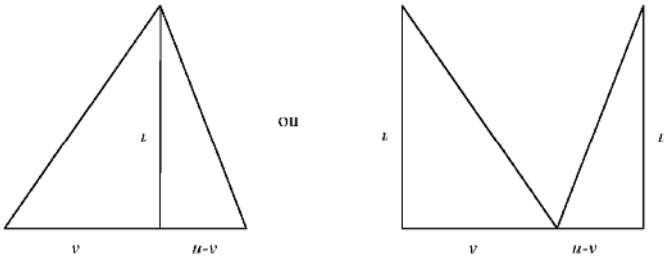
$d = k'v$, $c = a - b = k'u$ et $e = k'w$.

On tire de $b + (a - b) = a$ l'égalité $kv + k'u = ku$ ou encore $k'u = k(u - v)$. Comme u et $u - v$ sont premiers entre eux alors u divise k et $u - v$ divise k'. Il existe des entiers l et l' tels que $k = lu$ et $k' = l'(u - v)$.

En écrivant à nouveau l'égalité : $k'u = k(u - v) = l'(u - v)u = lu(u - v)$ on tire que $l = l'$, soit maintenant :

$$a = lu^2 \text{ , } b = luv, f = luw, d = l(u - v)v, a - b = l(u - v)u \text{ et } e = l(u - v)w.$$

En regardant plus particulièrement les expressions de f et de e, on voit que le triangle Z doit être semblable au triangle pythagoricien dont les côtés de l'angle droit ont comme longueurs u et $u - v$. Ce triangle est primitif car u et $u - v$ sont premiers entre eux et donc u et $u - v$ ont une parité différente. Le problème est désormais de trouver deux triangles pythagoriciens primitifs dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs respectives u, v et u, $u - v$.



L'entier u ne peut être impair sinon v et $u - v$ devraient être pairs et leur somme qui vaut u serait alors paire. On connaît la forme générale des triplets pythagoriciens primitifs, on peut alors écrire :
$u = 2mn = 2m'n'$, $v = m^2 - n^2$, $u - v = m'^2 - n'^2$ **avec *m* et *n* premiers entre eux et de parité différente, de même pour *m'* et *n'*.** D'où les égalités :

$$\mathbf{2mn = 2m'n' = m'^2 - n'^2 + m^2 - n^2 \ (1).}$$

Avec $mn = m'n'$, on peut écrire $m = PQ$, $n = RS$, $m' = PR$ et $n' = QS$ où **P, Q, R et S sont premiers entre eux deux à deux et un seul de ces quatre entiers est pair**. D'après (1), on a alors $2PQRS = (PQ)^2 - (RS)^2 + (PR)^2 - (QS)^2 = (Q^2 + R^2)(P^2 - S^2)$.
P et $P^2 - S^2$ sont premiers entre eux car P est premier avec $P + S$ et $P - S$. De même S est premier avec $P^2 - S^2$. D'où PS divise $Q^2 + R^2$. Par ailleurs Q est premier avec $Q^2 + R^2$, car si un nombre premier divisait Q et $Q^2 + R^2$ alors il diviserait Q^2 et donc R^2 et R par voie de conséquence. On établit de même que R et $Q^2 + R^2$ sont premiers entre eux.
On en déduit que $Q^2 + R^2$ divise 2PS. On ne peut avoir $2PS = Q^2 + R^2$ car si Q ou R était pair $Q^2 + R^2$ serait impair et l'égalité ne pourrait se réaliser, et si alternativement P ou S était pair 2PS serait divisible par 4 alors que $Q^2 + R^2$ ne pourrait l'être. On doit donc nécessairement avoir les deux équations :

$$\mathbf{2QR = P^2 - S^2 = (P - S)(P + S)\ (2)} \qquad \textbf{et} \qquad \mathbf{PS = Q^2 + R^2\ (3).}$$

P ou S ne peut être alors pair car $P^2 - S^2$ serait impair. C'est Q ou R qui est pair. Comme les deux équations sont symétriques en Q et R, on peut supposer que c'est Q qui est pair. On sait que $P^2 - S^2$ est divisible par 8 comme différence de deux carrés impairs et donc QR est au minimum divisible par 4. En reprenant l'équation (3) on voit que le reste dans la division par 4 de $Q^2 + R^2$ est toujours de 1, il en est alors de même pour PS. Il n'y que deux possibilités pour P et S. P et S ont, soit tous deux pour reste 1, soit tous deux pour reste 3 dans la division par 4. En conséquence leur somme P + S est paire mais ne peut être divisible par 4.

Q est désormais de la forme $2^rQ'$ avec $r > 1$. On peut écrire avec l'équation (2) :

$Q' = XY$, $R = ZT$, $P - S = 2^rXT$ et $P + S = 2ZY$ **avec X, Y, Z et T impairs et premiers entre eux deux à deux.**

Avec l'équation (3) on tire : $PS = (ZY + 2^{r-1}XT)(ZY - 2^{r-1}XT) = (ZY)^2 - (2^{r-1}XT)^2 = (2^rXY)^2 + (ZT)^2$.
D'où l'équation à résoudre :

$$\mathbf{Z^2(Y^2 - T^2) = 2^{2r-2}X^2(T^2 + 4Y^2) \quad (4)}$$

$Y^2 - T^2$ est divisible par 8 (Y et T sont impairs) donc $r > 2$.
Si $Y^2 - T^2$ et $T^2 + 4Y^2$ étaient premiers entre eux alors comme Z^2 est premier avec $2^{2r-2}X^2$ on aurait $Z^2 = T^2 + 4Y^2$ ou encore $Z^2 - T^2 = 4Y^2$ mais $Z^2 - T^2$ est divisible par 8 on devrait avoir Y pair, ce qui est contradictoire.

Notons donc $d > 1$ le $PGCD(Y^2 - T^2 ; T^2 + 4Y^2)$. La somme de ces deux expressions qui vaut $5Y^2$ est divisible par d. Par ailleurs, comme 2 ne divise pas $T^2 + 4Y^2$, $PGCD(T^2 + 4Y^2 ; 4Y^2 - 4T^2) = d$ et donc la différence de ces deux expressions qui vaut $5T^2$ est divisible par d. Comme Y et T sont premiers entre eux d ne peut qu'être égal à 5. L'équation (4) peut maintenant s'écrire sous la forme $Z^2(Y^2 - T^2)/5 = 2^{2r-2}X^2(T^2 + 4Y^2)/5$ avec les deux membres de l'égalité prenant des valeurs entières. On en tire les égalités $Z^2 = (T^2 + 4Y^2)/5$ et $2^{2r-2}X^2 = (Y^2 - T^2)/5$ ou encore $5Z^2 = T^2 + 4Y^2$ et $2^{2r-2}5X^2 = Y^2 - T^2$.

Par combinaison : $Z^2 + (2^{r-1}X)^2 = Y^2$ et $T^2 + (2^rX)^2 = Z^2$. On connaît la forme des solutions de ces deux équations :
$Z = s^2 - t^2$; $2^{r-1}X = 2st$; $Y = s^2 + t^2$ avec s et t premiers entre eux et l'un des deux est pair.
$T = s'^2 - t'^2$; $2^rX = 2s't'$; $Z = s'^2 + t'^2$ avec s' et t' premiers entre eux et l'un des deux est pair.
On en en particulier $2st = s't'$ et $s^2 - t^2 = s'^2 + t'^2$.
De $s^2 - t^2 = s'^2 + t'^2$ on peut tirer l'information que c'est t qui est pair et non pas s car si c'était le cas $s^2 - t^2$ donnerait un reste 3 dans la division par 4 alors que $s'^2 + t'^2$ donnerait un reste de 1 dans la même division. Comme on ne s'intéresse plus à T, s' et t' jouent des rôles symétriques, peu importe lequel des deux est pair, et on peut écrire :

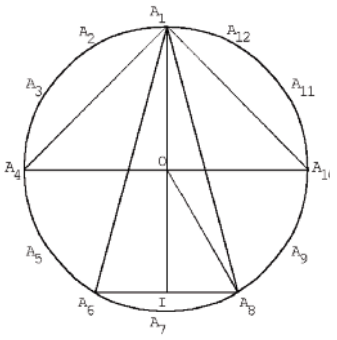
$2st = 2(X'Y')(Z'T'2^{r-2}) = (X'Z')(2^{r-1}Y'T')$ et $s^2 - t^2 = (X'Y')^2 - 2^{2r-4}(Z'T')^2 = (X'Z')^2 + (2^{r-1}Y'T')^2$.

D'où l'équation à résoudre **avec X', Y', Z' et T' premiers entre eux deux à deux et tous impairs :**

$$\mathbf{X'^2(Y'^2 - Z'^2) = 2^{2r-4}T^2(Z^2 + 4Y^2)\ (5).}$$

On retrouve formellement l'équation (4) sauf que 2^{2r-4} a remplacé 2^{2r-2}. On peut recommencer l'étude précédente autant de fois que nécessaire jusqu'à ce que $2^{2r-2i} < 2^3$ et alors il y a une contradiction car la différence de deux carrés présente dans l'égalité doit être divisible par 2^3.

77-3 *de Louis Rivoallan* :
Chacun sait que ce n'est pas parce que le périmètre d'un polygone augmente que l'aire de celui-ci augmente. Mais qu'en est-il si le polygone est inscrit dans un cercle ?



Solution de Frédéric de Ligt :
On répartit régulièrement 12 points $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ dans cet ordre sur un cercle de centre O et de rayon unité. On note I le milieu de la corde $[A_6A_8]$. On a facilement que :

$OI = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_1A_{10} = \sqrt{2}$ et $A_6A_8 = 1$.

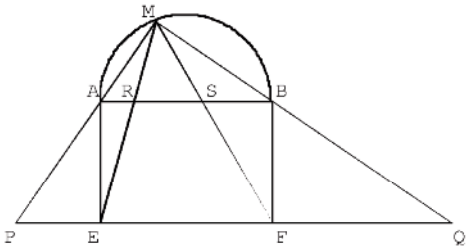
On note S_1 l'aire du triangle isocèle rectangle $A_1A_4A_{10}$ et P_1 son périmètre. On établit sans peine que $S_1 = 1$ et que $P_1 = 2(1+\sqrt{2}) \approx 4,828$. On note maintenant S_2 l'aire du triangle isocèle $A_1A_6A_8$ et P_2 son périmètre.

On trouve que $S_2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0,933$ et que $P_2 = 1+2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1+2\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 4,864$.

Pour ces deux triangles isocèles inscrits dans le même cercle on a $P_2 > P_1$ alors que $S_2 < S_1$.

78-4 *de Pierre Fermat* :
Sur le diamètre [AB] d'un demi-cercle on construit un rectangle ABFE dont le côté [AE] ou [BF] a une longueur égale à celle de la corde du quart du même cercle ou encore au côté du carré inscrit. A partir d'un point M du demi-cercle, on trace les segments [ME] et [MF]. Ces segments coupent le diamètre [AB] respectivement aux points R et S. Montrer qu'on a alors la relation :

$$AS^2 + BR^2 = AB^2.$$



Solution de Frédéric de Ligt :

Les triangles AEP, BFQ et PMQ sont semblables. On a en particulier $\frac{AE}{PE} = \frac{FQ}{BF} = \tan\hat{P}$ d'où AE.BF = PE.FQ (1).

Par hypothèse on a $AE = BF = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}EF$, l'égalité (1) peut donc s'écrire $2PE.FQ = EF^2$ (2).

Avec la propriété de Thalès dans les triangles PME, EMF et FMQ : $\frac{AR}{PE} = \frac{RS}{EF} = \frac{SB}{FQ}$ d'où $\frac{2AR.SB}{2PE.FQ} = \frac{RS^2}{EF^2}$ et en utilisant (2) on en déduit que $2AR.BS = RS^2$ (3). Ceci établi on va maintenant partir de l'égalité AS + BR = AB + RS pour aboutir à l'égalité demandée. On élève tout d'abord au carré, on développe et on fait un peu de calcul algébrique :

$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + RS^2 + 2AB.RS$
$= AB^2 + 2AR.BS + 2AB.RS$ à l'aide de l'égalité (3)
$= AB^2 + 2AR.BS + 2(AS + SB).RS$
$= AB^2 + 2AR.BS + 2AS.RS + 2SB.RS$
$= AB^2 + 2BS.(AR + RS) + 2AS.RS$
$= AB^2 + 2BS.AS + 2AS.RS$
$= AB^2 + 2AS.(BS + RS)$
$= AB^2 + 2AS.BR$

En ôtant la partie commune aux deux membres, à savoir 2AS.BR on obtient bien $AS^2 + BR^2 = AB^2$.

80-3 *de Louis Rivoallan* :
Le nombre *a* se termine par un 1 (en base 10). Montrer que l'équation $x^4 + a = 3y^8$ n'a pas de solution dans $\mathbf{N}^2$.

Solution de Frédéric de Ligt :
x^4 et y^8 sont congrus à 0 ou 1 modulo 5, et *a*, quant à lui, est congru à 1 modulo 5. Donc $x^4 + a$ est congru à 1 ou 2 modulo 5, tandis que $3\,y^8$ est congru à 0 ou 3 modulo 5. Il n'y a pas de solution entière possible pour cette équation.