Edito
Première Journée de la Régionale

Pour fêter à notre manière le centenaire de l'APMEP, nous avons la joie de vous annoncer la naissance à la rentrée prochaine d'une Journée de la Régionale. L'idée n'est pas originale, de semblables manifestations existent déjà dans d'autres Régionales, aussi le chemin est bien balisé, mais pour les organisateurs cela reste quand même une aventure.
De quoi s'agit-il ?
Un mercredi entier consacré à se former, s'informer, discuter en toute convivialité. Au programme : une conférence présentée par Elise Janvresse sur les probabilités, deux plages d'ateliers en parallèle pour découvrir, pour débattre tant au niveau collège que lycée et, pour clore, une rencontre avec les membres du comité afin de discuter des perspectives de la Régionale.
À l'heure où les temps de rencontre non contraints entre collègues se font de plus en plus rares, voici l'occasion d'une saine respiration pédagogique.
Malgré les coupes sombres opérées dans le volume horaire attribué à la formation continue, il a été possible d'insérer dans le PAF notre Journée ainsi que celles d'Ile de France (à ne pas manquer, centenaire oblige !). Il ne faudra pas oublier de vous y inscrire à la rentrée afin d'obtenir un ordre de mission sans frais pour ceux qui travaillent le mercredi matin.
Mais cette offre n'est pas réservée aux seuls adhérents de l'APMEP, elle est ouverte à tous les collègues de l'académie qui pourront ainsi découvrir ou mieux connaître notre association, ses objectifs et son action. Je sais que je peux compter sur vous pour donner un maximum de publicité à l'évènement.
Un grand merci à Nicolas Minet pour avoir pris en charge son organisation.
Rendez-vous donc le mercredi 13 octobre au lycée de la Venise Verte à Niort pour cette première Journée de la Régionale. Mais avant cela tous les membres du comité s'associent à moi pour vous souhaiter de bonnes et reposantes vacances.

Frédéric de Ligt

SOMMAIRE

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

79 86 17 16

Régionale de Poitou-Charentes

n°81

Juillet 2010

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

APMEP : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél : apmep.poitiers@free.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros) + Suppléments : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication .... Frédéric de LIGT
Comité de rédaction … F. de LIGT, L-M BONNEVAL N. MINET, J. FROMENTIN,
Imprimerie ………….. IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Éditeur ………………. APMEP Régionale de Poitiers
Siège social …………. IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Dépôt légal .... Juillet 2010

Vie de l'association

Comité de la Régionale - mercredi 2 juin 2010

L'exposition itinérante « Comment tu comptes ? »

Nicolas Minet et Jacques Germain vont rencontrer Edith Cirot, de l'Espace Mendès France, le mercredi 9 juin afin de négocier un avenant au contrat signé entre la Régionale et L'EMF. Il s'agirait de partager à parts égales les recettes rapportées par la location de l'exposition au-delà de 20 emprunts. Cela permettrait à la Régionale de rentrer dans ses frais (une centaine d'euros pour la confection d'étuis protecteurs). Il a aussi été décidé de demander à cette occasion si le DVD que l'EMF a réalisé pouvait être prêté gracieusement afin de compléter l'exposition itinérante (NDLR : l'Espace Mendès France a accepté toutes nos demandes). Des bons de commandes et des adhésions vont être glissés dans les enveloppes contenant le contrat envoyé aux établissements. Dès la rentrée scolaire 5 bouliers vont accompagner les panneaux. Une affiche va être réalisée par un des membres du comité pour accompagner l'exposition aux Journées Nationales d'Île de France et dans les établissements.

Journée de la Régionale. Centenaire de l'Association

Les Journées Nationales et la Journée de la Régionale (le 13 octobre) ont été inscrites au PAF. L'organisation de la Journée de la Régionale a été planifiée. Frédéric de Ligt et Nicolas Minet vont contacter le lycée de la Venise Verte pour obtenir des précisions sur les salles disponibles et les repas. Une préinscription est envisagée. Un message en ce sens sera envoyé aux collègues sur la liste de diffusion académique.

Réforme du lycée

Dominique Gaud présente au comité le nouveau programme de 1ère S applicable à la rentrée 2011. La part de la géométrie est en forte baisse. Le balisage n'est pas suffisant. Il se demande si la participation de l'APMEP à la consultation sur ces programmes est bien utile étant donné le peu d'écoute qu'elle a en ce moment au ministère.

Formation initiale et continue.

Jean Souville a présenté les perspectives pour l'an prochain. Les nouvelles sont inquiétantes. Les budgets sont en très forte baisse et l'offre de formation continue sera très modeste. L'IUFM n'est plus décisionnaire. Pour la formation initiale, les enseignants ayant réussi le concours vont devoir assurer 16 h de cours par semaine devant les élèves. « C'est en se jetant à l'eau qu'on apprend à nager ». Il y a quelques noyades en perspective.

Nouvelle orientation du Rallye

Une réunion de travail est programmée le mercredi 16 juin pour réfléchir à une nouvelle maquette du Rallye. Jean Souville fait savoir que l'université de Poitiers est intéressée pour donner une plus grande visibilité au Rallye en organisant par exemple une remise des prix précédée d'une conférence. Le but avoué étant de faire découvrir l'université aux collégiens afin de les inciter à s'orienter davantage dans les filières scientifiques. Cela aurait aussi pour avantage d'attirer quelques sponsors.

Livres anciens. Don IUFM

L'inventaire des livres scientifiques anciens et moins anciens ayant été mené à son terme, l'équipe qui s'en est chargée a proposé de tenir le prochain comité au collège Henri IV de Poitiers afin de présenter à tous son travail. Le comité donne son accord. Jacques Chayé se charge de prendre les contacts nécessaires. Une convention a déjà été signée avec le collège qui permet aux adhérents de la Régionale, sur présentation d'une carte d'identité, d'aller consulter sur place ces ouvrages exceptionnels. La liste des titres est consultable sur le site de la Régionale. Des détails seront fournis dans le prochain Corol'aire. Une convention a également été signée avec la médiathèque de l'IUFM de Poitiers afin que la Régionale puisse récupérer les ouvrages qu'elle destine au pilon. Trois caisses de livres de préparation au concours de professeur des écoles sont déjà venues enrichir notre stock.

Le National

Les différentes contributions de la Régionale au texte d'orientation de l'APMEP ont été prises en compte par le comité national. Certaines ont été intégrées dans le corps du texte définitif. Le comité de la Régionale a voté contre l'envoi d'un don au National pour l'organisation du colloque du centenaire.

Corol'aire

Le Corol'aire 81 paraîtra début juillet.

Calendrier

Le prochain comité se tiendra le mercredi 29 septembre à 15 h au collège Henri IV.

Frédéric de Ligt

Journées Nationales de l'APMEP
23 - 26 octobre 2010
Paris

D'UN SIÈCLE À L'AUTRE,
LE PARI DES MATHÉMATIQUES

Journée de la Régionale

Le Lycée de la Venise Verte accueillera, le mercredi 13 octobre 2010, la Journée de la Régionale Poitou-Charentes de l'APMEP.

Son objectif principal est de favoriser rencontres et échanges entre les enseignants de mathématiques de l'académie, qu'ils soient ou non adhérents à l'APMEP. D'ailleurs un message a été envoyé au sujet de cette Journée de la Régionale par l'académie à tous les professeurs de mathématiques sur leur boîte académique.

Voir ci-contre le planning prévu pour cette Journée

Tout au long de la journée, les brochures de l'APMEP seront mises en vente au prix adhérent pour tous.

Un bulletin d'inscription (notamment pour l'intendance) peut être téléchargé sur le site de la Régionale.

Il est vivement conseillé de s'inscrire par ailleurs à cette journée début septembre via le **P**lan **A**cadémique de **F**ormation (procédure indiquée dans la lettre de rentrée des IPR).

En effet, cette procédure permettra la délivrance d'un ordre de mission sans frais pouvant s'avérer utile aux participants ayant cours le mercredi matin pour justifier leur absence auprès des chefs d'établissement.

Le Comité de la Régionale Poitou-Charentes de l'APMEP

8h45 – Accueil café
9h15 – Présentation de la journée
9h30 – Conférence : ***la loi des séries : hasard ou fatalité*** par Elise Janvresse, chargée de recherches au CNRS (Université de Rouen).
11h – Deux ateliers-débat en parallèle :
- L'évaluation par compétences et le socle commun au collège
- La réforme du lycée : la place des mathématiques dans l'accompagnement personnalisé en Seconde

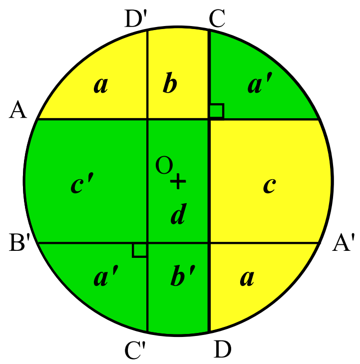
12h30 – Repas sur place pour ceux qui le souhaitent
14h – Quatre ateliers en parallèle :
- La réforme du lycée : la place des mathématiques dans le module MPS
- Jeux et Mathématiques
- Les angles au collège : arpentage et navigation
- Algorithmique

16h – Bilan de la journée, présentation du Comité, perspectives de la Régionale.
17h – fin de la journée

Défi-Collège

Solution du défi du supplément au n° 80 de Corol'aire.

Serge Parpay proposait de faire apparaître sur le dessin ci-contre la différence entre les aires des zones verte et jaune.
En traçant les symétriques [A' B'] et [C' D'] des cordes [A B] et [C D] par rapport au centre O du cercle, on obtient neuf zones, dont huit se correspondent deux à deux au niveau des aires. la neuvième désignée par la lettre *d* correspond à la différence entre les aires des zones verte et jaune.



Nouveaux défis de Serge Parpay

Pour le collège

On donne dans le plan quatre points A, B, C et D tels que AB = CD et BC = AD.
Que peut–on dire de la disposition de ces quatre points ?

Plutôt pour des secondes

Soit un trapèze isocèle ABCD de bases [AB] et [CD] et tel que AD = a et $AC = a\sqrt{2}$.
Montrer que AB.CD = a^2.

Défi-École !

Le canard enchaîné du 02/06/10

Les ateliers MATh.en.JEANS

Près d'une quinzaine d'enseignants sont venus au lycée Haut Val de Sèvre de Saint-Maixent pour apprécier la prestation de ces chercheurs en herbe qui ont participé aux ateliers MATh.en.JEANS des collèges Jules Verne d'Angoulême et La Fontaine de Montlieu-Lagarde ainsi que du lycée Saint-Joseph de Bressuire.

Après une présentation générale de ces ateliers et de l'Association MATh.en.JEANS par Gilles Maréchal du lycée Saint-Joseph, les élèves ont pris le relais.

Si les élèves de collège ont été plus impressionnés que leurs aînés de lycée pour intervenir en public, leurs interventions ont été tout aussi captivantes, les diaporamas les aidant largement tous à la communication de leur recherche ; et d'ailleurs, sans leurs animations très bien conçues, nous n'aurions pas pu comprendre tellement ces recherches étaient poussées, même pour les plus jeunes.

La grippe H1N1 a lancé les élèves sur un réseau quadrillé dont certaines cellules (cases) malades contaminaient d'autres cellules en suivant une règle de contamination bien précise. Quelles dispositions initiales des cellules malades entraînent une contamination totale du réseau ?

Un jeu de Nim dans lequel chaque joueur ne peut pas prendre plus du double d'allumettes que son adversaire au coup précédent a fait apparaître les nombres de la suite de Fibonacci dans la recherche d'une stratégie gagnante. Les élèves ont relevé sans peine le défi dans une partie avec un enseignant de l'assistance.

Le défi des lycéens était de retrouver la forme originale d'un dessin dont la photocopie avait rendu plus ou moins flous les contours ? Pour quels types de dessins pouvait-on la retrouver et comment ? Là encore, les animations étaient très parlantes.

Comme après une conférence, l'assistance a posé des questions aux intervenants sur leurs recherches et aux enseignants - animateurs sur la création et le fonctionnement de ces ateliers. De nouveaux ateliers vont-ils voir le jour dans notre Régionale ? C'est, bien sûr, ce que nous espérons à la suite de cette rencontre.

Quand les maths sont en jeu...

Nouvelle République Niort 12/06/10

Pendant près d'une année scolaire, 1.200 élèves de l'Hexagone ont planché sur des problèmes de maths. Parmi eux, des Bressuirais, fidèles de l'exercice.

La Grippe HINI attaque. Problèmes de chapeaux. La faute-O-copieuse... Derrière ces titres énigmatiques, des problèmes mathématiques, sur lesquels une cinquantaine de collégiens et lycéens de l'académie ont planché toute l'année. A raison de deux heures par semaine, à partir d'exercices numériques ou géométriques proposés par deux véritables chercheurs originaires de Poitiers et Bordeaux, une dizaine d'élèves de cinq établissements (1) se sont creusé la tête.

Tous volontaires et pas forcément dotés de la bosse des maths. *« Ce sont des élèves qui ne connaissent pas forcément leurs cours par cœur et qui ne veulent pas qu'on leur casse les pieds avec la théorie, mais qui accrochent bien sur les problèmes*, explique Frédéric Le Ligt, président régional de l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public). *Ceux-là, il faut aussi leur donner à manger ! »*

Pendant des mois, les élèves de tous niveaux se sont approprié leur problème, l'ont retourné dans tous les sens. Libres d'essayer, de se tromper et de réessayer à leur guise, tels des chercheurs. Un luxe qu'élèves et professeurs ne peuvent pas toujours s'offrir le reste de l'année. *« L'objectif étant d'allier le ludique et les maths pures. »*

Cinq établissements de l'académie de Poitiers ont participé cette année aux ateliers. Parmi eux, le lycée Saint-Joseph de Bressuire, à l'origine de panneaux d'exposition.

La preuve par sept avec le lycée Saint-Joseph

Une fois quelques solutions trouvées, il a fallu les présenter sous forme de diaporama, dans un amphi bondé à Grenoble, en mars dernier, à l'occasion du congrès national de l'association nationale Math.en.jeans, coordinatrice du projet. L'occasion pour les moins matheux de briller de par leurs compétences informatiques par exemple. *« C'est aussi l'intérêt de ces échanges, à chacun d'apporter sa pierre. »* Au lycée Saint-Joseph de Bressuire, on en redemande. *« Voilà sept ans que l'on participe »*, souligne Gilles Maréchal, professeur de maths donc, qui y voit, comme son confrère Frédéric Le Ligt, un antidote, même modeste, au désamour dont souffrent toujours les mathématiques auprès des jeunes. *« C'est une manière de lutter contre cette image poussiéreuse et rébarbative, encore tenace. Et de prouver que même avec un niveau collège, on peut faire de vraies maths et que cela peut même être amusant. »*

N.P.

(1) Lycées du Bois-d'Amour à Poitiers et Saint-Joseph à Bressuire, collèges Marguerite-de-Valois et Jules-Verne à Angoulême et collège La Fontaine à Montlieu-la-Garde.

Nouvelle République du Centre-Ouest du 12/06/10

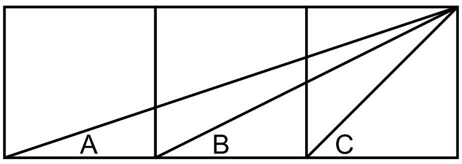
Hommage à Martin Gardner

Martin Gardner, né en 1914, est un nom bien connu pour une génération de lecteurs du magazine *Pour la Science*, l'édition française du *Scientific American*. De 1956 à 1981, il y a fait œuvre de journaliste scientifique en y tenant la rubrique *Mathematical Games*. Avec elle, il intéressa aux mathématiques un nombre incalculable de lecteurs, réussissant la tâche difficile de vulgariser cette matière, notamment dans le domaine des « mathématiques récréatives ». Par cette rubrique, et les nombreux ouvrages qu'il en tira, Martin Gardner est probablement la personne qui a le plus fait pour populariser les mathématiques en général et les «mathématiques récréatives» en particulier.
À titre personnel, c'est dans ses ouvrages — Problèmes et divertissements mathématiques T 1 (Dunod 1964) et T 2 (Dunod 1965), Mathématiques Magie et Mystère (Dunod 1966) et Nouveaux divertissements mathématiques (Dunod 1970) — que j'ai puisé les jeux et problèmes qui m'ont permis de créer puis d'alimenter le club « Jeux et mathématiques » dans mon collège dans les années 1970. D'autres ouvrages plus récents, sont cités ci-dessous.
Martin Gardner nous a quitté le 22 mai 2010. Pour lui rendre hommage et vous associer à cet hommage, Serge Parpay vous propose quelques petits problèmes tirés de ses divers ouvrages.

Jean Fromentin

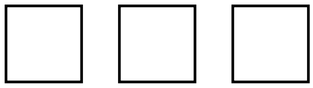
En n'utilisant que la géométrie élémentaire, sans aucun calcul de trigonométrie, démontrer que l'angle C est égal à la somme des angles A et B (Voir figure ci-dessous).

(*Math'Circus - Bibliothèque « Pour la science » - Belin 1982*)



Écrivez un nombre premier dans chacune des trois cases ci-dessous. Il ne doit pas y avoir deux nombres égaux et l'utilisation de 0 et de 1 est interdite. Le nombre de trois chiffres ainsi obtenu doit être un multiple de chacun des trois nombres premiers le composant.

(*Casse-tête dans le cosmos – Dunod 1982*)



Intercalez entre chaque paire de chiffres voisins de la suite ci-dessous

1 2 3 4 5 6 7 8 9

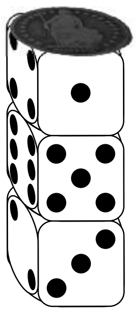
soit le signe *plus*, soit le signe *moins*, soit rien du tout. Les chiffres qui ne seront pas séparés par l'un de ces signes font donc partie de nombres de plusieurs chiffres.
Par exemple, 123 + 45 – 67 + 89 = 100. C'est, selon Rendrag la seule façon d'obtenir le nombre 100 en n'utilisant pas plus de trois signes.
À votre tour, et en utilisant autant de signes *plus* ou *moins* que vous voulez, essayez d'obtenir un total de 556. Il existe une seule solution.

(*Casse-tête dans le cosmos – Dunod 1982*)

Magie

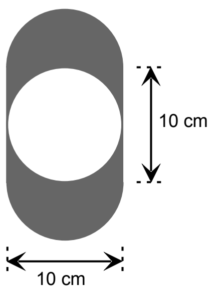
Pouvons-nous dire le chiffre du dessus de chaque dé ?

(*L'univers ambidextre - Seuil 1985*)



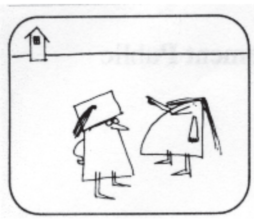
Une plaque de métal est formée d'un carré de dix centimètres de côté avec deux demi-cercles sur deux côtés opposés (voir figure ci-contre). Si on enlève du centre un disque de dix centimètres de diamètre, quelle sera la surface de la nouvelle plaque ?

(*Math'Festival - Bibliothèque « Pour la science » - Belin 1981*)



Professeur Cantorbaki :

J'ai inventé un nouveau casse-tête pour torturer vos méninges.



Combien ai-je d'animaux domestiques sachant que tous sauf deux sont des chiens, tous sauf deux sont des chats et tous sauf deux sont des perroquets ?

(*Haha - Bibliothèque « Pour la science » - Belin 1979*)

RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Des problèmes

81-1 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

La boite de diapo.

La boîte de diapositives est rectangulaire et elle est remplie entièrement. Les diapositives sont rangées dans l'ordre chronologique « horizontalement », numérotées 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … sur le première ligne, puis n ; $(n + 1)$; … sur la deuxième ligne, $(2n)$; $(2n + 1)$; … sur la troisième et ainsi de suite.

Il s'agit désormais de la classer dans l'ordre chronologique, mais cette fois-ci, « verticalement », la première colonne étant 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … ; $m - 1$, la seconde m ; $(m + 1)$; …, la troisième $2m$; $(2m + 1)$; … et ainsi de suite. Si je prends la diapositive numéro u_0, dans la configuration initiale, elle va prendre la place de la diapo u_1, qui elle même prendra la place de la diapositive u_2….

Peut-on définir simplement la fonction $u_{n+1} = f(u_n)$?

À quelle condition, si $u_0 \neq 1$ et $u_0 \neq n \times m$, la boîte sera-t-elle bien rangée après exactement $m \times n - 2$ manipulations ?

81-2 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Quels sont les couples d'entiers naturels (a, b) avec $1 < a \leq b$ tels que $11 \times \text{ppcm}(a,b) - 109 \times \text{pgcd}(a,b) = 1$?

81-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon) d'après un problème paru dans « La Recherche »* :

Ma calculatrice est dans un piteux état. Les seules touches d'opération à fonctionner sont les touches +, - et $1/x$ permettant d'additionner, de soustraire et d'inverser.

Puis-je quand même obtenir le produit de deux nombres donnés ?

81-4 *de Frédéric de Ligt (Montguyon) d'après une manipulation observée lors du congrès MATH.en.JEANS à Grenoble* :

On dispose d'une feuille carrée de côté a. A l'aide uniquement de pliages, il faut faire apparaître un segment de longueur $a/7$.

Des solutions

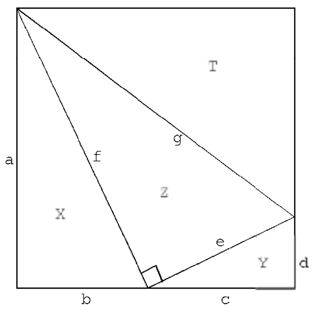
77-1 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Dans son livre, *Tommorow's math* (Oxford University Press, 1972, p.120), Stanley Ogilvy présente un problème ouvert, posé par Solomon Golomb (l'inventeur des polyominos) en 1971 : peut-on inscrire un triangle rectangle dans un carré, de la façon présentée ci-dessous, avec des longueurs entières pour tous les segments qui apparaissent sur la figure ?

Ce problème n'a pas dû rester bien longtemps sans réponse après la parution du livre. Qu'en pensez-vous ?

Solution de l'auteur :

A la lecture de sa présentation dans le livre d'Ogilvy, j'ai tout d'abord cru que ce problème était de même nature que celui de la boîte parfaite (non résolu) où il s'agit d'exhiber un parallélépipède rectangle d'arêtes et de diagonales entières (y compris la grande diagonale intérieure). Mais il n'en est rien. Je n'ai eu besoin d'utiliser que des résultats assez élémentaires d'arithmétique pour établir finalement l'impossibilité par un argument de descente infinie cher à Fermat. Avant que n'apparaisse enfin une contradiction il a fallu que je descende (encore) bien en profondeur dans « l'arborescence » des cas. Si un lecteur peut trouver un moyen plus économique et néanmoins « élémentaire » sa solution sera bienvenue.



Le problème se réduit à chercher des triangles X, Y et Z qui soient pythagoriciens, le triangle T ne pouvant alors que l'être. Première remarque à partir de considérations d'angles : les triangles X et Y doivent être semblables. Il devrait donc exister un triangle pythagoricien primitif semblable à X et Y. Notons u et v les longueurs entières des côtés de son angle droit et w son hypoténuse entière. On sait qu'alors les entiers u et v sont premiers entre eux et que u et v sont de parité différente et on peut décider que $u > v$. Il existe alors deux entiers k et k' tels que :

$b = kv$, $a = ku$, $f = kw$

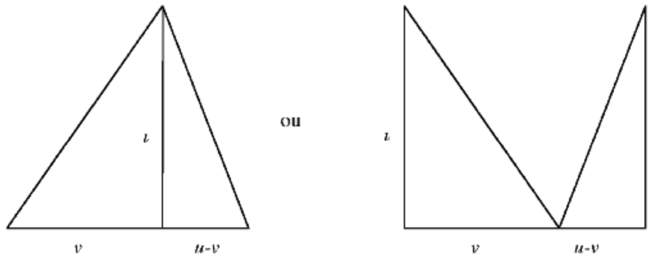
$d = k'v$, $c = a - b = k'u$ et $e = k'w$.

On tire de $b + (a - b) = a$ l'égalité $kv + k'u = ku$ ou encore $k'u = k(u - v)$. Comme u et $u - v$ sont premiers entre eux alors u divise k et $u - v$ divise k'. Il existe des entiers l et l' tels que $k = lu$ et $k' = l'(u - v)$.

En écrivant à nouveau l'égalité : $k'u = k(u - v) = l'(u - v)u = lu(u - v)$ on tire que $l = l'$, soit maintenant :

$$a = lu^2,\ b = luv,\ f = luw,\ d = l(u - v)v,\ a - b = l(u - v)u \text{ et } e = l(u - v)w.$$

En regardant plus particulièrement les expressions de f et de e, on voit que le triangle Z doit être semblable au triangle pythagoricien dont les côtés de l'angle droit ont comme longueurs u et $u - v$. Ce triangle est primitif car u et $u - v$ sont premiers entre eux et donc u et $u - v$ ont une parité différente. Le problème est désormais de trouver deux triangles pythagoriciens primitifs dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs respectives u, v et u, $u - v$.



L'entier u ne peut être impair sinon v et $u - v$ devraient être pairs et leur somme qui vaut u serait alors paire. On connaît la forme générale des triplets pythagoriciens primitifs, on peut alors écrire :
$u = 2mn = 2m'n'$, $v = m^2 - n^2$, $u - v = m'^2 - n'^2$ **avec *m* et *n* premiers entre eux et de parité différente, de même pour *m'* et *n'*.** D'où les égalités :

$$\mathbf{2mn = 2m'n' = m'^2 - n'^2 + m^2 - n^2 \ (1).}$$

Avec $mn = m'n'$, on peut écrire m = PQ, n = RS, m' = PR et n' = QS où **P, Q, R et S sont premiers entre eux deux à deux et un seul de ces quatre entiers est pair**. D'après (1), on a alors $2PQRS = (PQ)^2 - (RS)^2 + (PR)^2 - (QS)^2 = (Q^2 + R^2)(P^2 - S^2)$. P et $P^2 - S^2$ sont premiers entre eux car P est premier avec P + S et P – S. De même S est premier avec $P^2 - S^2$. D'où PS divise $Q^2 + R^2$. Par ailleurs Q est premier avec $Q^2 + R^2$, car si un nombre premier divisait Q et $Q^2 + R^2$ alors il diviserait Q^2 et donc R^2 et R par voie de conséquence. On établit de même que R et $Q^2 + R^2$ sont premiers entre eux.
On en déduit que $Q^2 + R^2$ divise 2PS. On ne peut avoir $2PS = Q^2 + R^2$ car si Q ou R était pair $Q^2 + R^2$ serait impair et l'égalité ne pourrait se réaliser, et si alternativement P ou S était pair 2PS serait divisible par 4 alors que $Q^2 + R^2$ ne pourrait l'être. On doit donc nécessairement avoir les deux équations :

$$\mathbf{2QR = P^2 - S^2 = (P - S)(P + S) \ (2) \qquad \text{et} \qquad PS = Q^2 + R^2 \ (3).}$$

P ou S ne peut être alors pair car $P^2 - S^2$ serait impair. C'est Q ou R qui est pair. Comme les deux équations sont symétriques en Q et R, on peut supposer que c'est Q qui est pair. On sait que $P^2 - S^2$ est divisible par 8 comme différence de deux carrés impairs et donc QR est au minimum divisible par 4. En reprenant l'équation (3) on voit que le reste dans la division par 4 de $Q^2 + R^2$ est toujours de 1, il en est alors de même pour PS. Il n'y que deux possibilités pour P et S. P et S ont, soit tous deux pour reste 1, soit tous deux pour reste 3 dans la division par 4. En conséquence leur somme P + S est paire mais ne peut être divisible par 4.

Q est désormais de la forme $2^rQ'$ avec $r > 1$. On peut écrire avec l'équation (2) :

$Q' = XY$, $R = ZT$, $P - S = 2^rXT$ et $P + S = 2ZY$ **avec X, Y, Z et T impairs et premiers entre eux deux à deux.**

Avec l'équation (3) on tire : $PS = (ZY + 2^{r-1}XT)(ZY - 2^{r-1}XT) = (ZY)^2 - (2^{r-1}XT)^2 = (2^rXY)^2 + (ZT)^2$.
D'où l'équation à résoudre :

$$\mathbf{Z^2(Y^2 - T^2) = 2^{2r-2}X^2(T^2 + 4Y^2) \quad (4)}$$

$Y^2 - T^2$ est divisible par 8 (Y et T sont impairs) donc $r > 2$.
Si $Y^2 - T^2$ et $T^2 + 4Y^2$ étaient premiers entre eux alors comme Z^2 est premier avec $2^{2r-2}X^2$ on aurait $Z^2 = T^2 + 4Y^2$ ou encore $Z^2 - T^2 = 4Y^2$ mais $Z^2 - T^2$ est divisible par 8 on devrait avoir Y pair, ce qui est contradictoire.

Notons donc $d > 1$ le PGCD($Y^2 - T^2$; $T^2 + 4Y^2$). La somme de ces deux expressions qui vaut $5Y^2$ est divisible par d. Par ailleurs, comme 2 ne divise pas $T^2 + 4Y^2$, PGCD($T^2 + 4Y^2$; $4Y^2 - 4T^2$) = d et donc la différence de ces deux expressions qui vaut $5T^2$ est divisible par d. Comme Y et T sont premiers entre eux d ne peut qu'être égal à 5. L'équation (4) peut maintenant s'écrire sous la forme $Z^2(Y^2 - T^2)/5 = 2^{2r-2}X^2(T^2 + 4Y^2)/5$ avec les deux membres de l'égalité prenant des valeurs entières. On en tire les égalités $Z^2 = (T^2 + 4Y^2)/5$ et $2^{2r-2}X^2 = (Y^2 - T^2)/5$ ou encore $5Z^2 = T^2 + 4Y^2$ et $2^{2r-2}5X^2 = Y^2 - T^2$.

Par combinaison : $Z^2 + (2^{r-1}X)^2 = Y^2$ et $T^2 + (2^rX)^2 = Z^2$. On connaît la forme des solutions de ces deux équations :
$Z = s^2 - t^2$; $2^{r-1}X = 2st$; $Y = s^2 + t^2$ avec s et t premiers entre eux et l'un des deux est pair.
$T = s'^2 - t'^2$; $2^rX = 2s't'$; $Z = s'^2 + t'^2$ avec s' et t' premiers entre eux et l'un des deux est pair.
On en en particulier $2st = s't'$ et $s^2 - t^2 = s'^2 + t'^2$.
De $s^2 - t^2 = s'^2 + t'^2$ on peut tirer l'information que c'est t qui est pair et non pas s car si c'était le cas $s^2 - t^2$ donnerait un reste 3 dans la division par 4 alors que $s'^2 + t'^2$ donnerait un reste de 1 dans la même division. Comme on ne s'intéresse plus à T, s' et t' jouent des rôles symétriques, peu importe lequel des deux est pair, et on peut écrire :

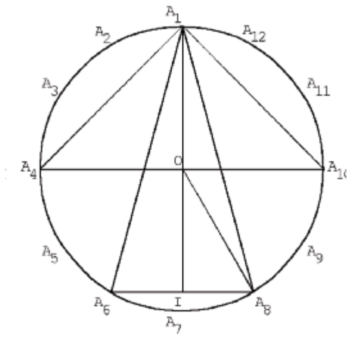
$$2st = 2(X'Y')(Z'T'2^{r-2}) = (X'Z')(2^{r-1}Y'T') \quad \text{et} \quad s^2 - t^2 = (X'Y')^2 - 2^{2r-4}(Z'T')^2 = (X'Z')^2 + (2^{r-1}Y'T')^2.$$

D'où l'équation à résoudre **avec X', Y', Z' et T' premiers entre eux deux à deux et tous impairs :**

$$\mathbf{X'^2(Y'^2 - Z'^2) = 2^{2r-4}T^2(Z^2 + 4Y^2) \ (5).}$$

On retrouve formellement l'équation (4) sauf que 2^{2r-4} a remplacé 2^{2r-2}. On peut recommencer l'étude précédente autant de fois que nécessaire jusqu'à ce que $2^{2r-2i} < 2^3$ et alors il y a une contradiction car la différence de deux carrés présente dans l'égalité doit être divisible par 2^3.

77-3 *de Louis Rivoallan* :
Chacun sait que ce n'est pas parce que le périmètre d'un polygone augmente que l'aire de celui-ci augmente. Mais qu'en est-il si le polygone est inscrit dans un cercle ?



Solution de Frédéric de Ligt :
On répartit régulièrement 12 points A_1, A_2, …, A_{12} dans cet ordre sur un cercle de centre O et de rayon unité. On note I le milieu de la corde $[A_6A_8]$. On a facilement que : $OI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $A_1A_{10} = \sqrt{2}$ et $A_6A_8 = 1$.

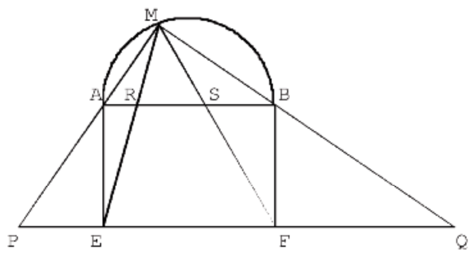
On note S_1 l'aire du triangle isocèle rectangle $A_1A_4A_{10}$ et P_1 son périmètre. On établit sans peine que $S_1 = 1$ et que $P_1 = 2(1+\sqrt{2}) \approx 4{,}828$. On note maintenant S_2 l'aire du triangle isocèle $A_1A_6A_8$ et P_2 son périmètre.

On trouve que $S_2 = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}933$ et que $P_2 = 1 + 2\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 4{,}864$.

Pour ces deux triangles isocèles inscrits dans le même cercle on a $P_2 > P_1$ alors que $S_2 < S_1$.

78-4 *de Pierre Fermat* :
Sur le diamètre [AB] d'un demi-cercle on construit un rectangle ABFE dont le côté [AE] ou [BF] a une longueur égale à celle de la corde du quart du même cercle ou encore au côté du carré inscrit. A partir d'un point M du demi-cercle, on trace les segments [ME] et [MF]. Ces segments coupent le diamètre [AB] respectivement aux points R et S. Montrer qu'on a alors la relation :

$$AS^2 + BR^2 = AB^2.$$



Solution de Frédéric de Ligt :

Les triangles AEP, BFQ et PMQ sont semblables. On a en particulier $\dfrac{AE}{PE} = \dfrac{FQ}{BF} = \tan \hat{P}$ d'où AE.BF = PE.FQ (1).

Par hypothèse on a $AE = BF = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}EF$, l'égalité (1) peut donc s'écrire $2PE.FQ = EF^2$ (2).

Avec la propriété de Thalès dans les triangles PME, EMF et FMQ : $\dfrac{AR}{PE} = \dfrac{RS}{EF} = \dfrac{SB}{FQ}$ d'où $\dfrac{2AR.SB}{2PE.FQ} = \dfrac{RS^2}{EF^2}$ et en utilisant (2) on en déduit que $2AR.BS = RS^2$ (3). Ceci établi on va maintenant partir de l'égalité AS + BR = AB + RS pour aboutir à l'égalité demandée. On élève tout d'abord au carré, on développe et on fait un peu de calcul algébrique :

$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + RS^2 + 2AB.RS$
$= AB^2 + 2AR.BS + 2AB.RS$ à l'aide de l'égalité (3)
$= AB^2 + 2AR.BS + 2(AS + SB).RS$
$= AB^2 + 2AR.BS + 2AS.RS + 2SB.RS$
$= AB^2 + 2BS.(AR + RS) + 2AS.RS$
$= AB^2 + 2BS.AS + 2AS.RS$
$= AB^2 + 2AS.(BS + RS)$
$= AB^2 + 2AS.BR$

En ôtant la partie commune aux deux membres, à savoir 2AS.BR on obtient bien $AS^2 + BR^2 = AB^2$.

80-3 *de Louis Rivoallan* :
Le nombre a se termine par un 1 (en base 10). Montrer que l'équation $x^4 + a = 3y^8$ n'a pas de solution dans $\mathbf{N}^2$.

Solution de Frédéric de Ligt :
x^4 et y^8 sont congrus à 0 ou 1 modulo 5, et a, quant à lui, est congru à 1 modulo 5. Donc $x^4 + a$ est congru à 1 ou 2 modulo 5, tandis que $3y^8$ est congru à 0 ou 3 modulo 5. Il n'y a pas de solution entière possible pour cette équation.