RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

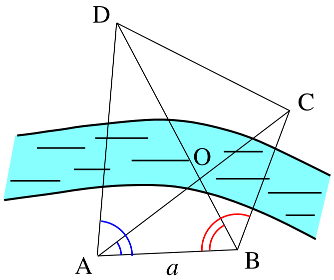
Des problèmes

80-1 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Il est bien connu que dans un trapèze le segment qui joint les milieux des côtés opposés non parallèles est égal à la demi-somme des deux bases. Mais qu'en est-il de la réciproque ?
Si le segment joignant les milieux de deux côtés opposés d'un quadrilatère est égal à la demi-somme des deux autres, ce quadrilatère est-il un trapèze ?

80-2 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Un triangle ABC est inscrit dans un cercle de centre O. Il s'agit de tracer l'orthocentre et le centre de gravité de ce triangle, mais on ne dispose comme outils de construction que d'un appareil permettant de tracer des droites parallèles et d'une règle. Donc, ni compas, ni équerre. Comment faire ?

80-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* : Le nombre a se termine par un 1 (en base dix). Montrer que l'équation $x^4 + a = 3y^8$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

80-4 *de Frédéric de Ligt (Montguyon) d'après un exercice proposé par Jean-Paul Guichard* :
Une parcelle a la forme d'un quadrilatère convexe. Les sommets A, B, C et D représentent les bornes. Une rivière traverse le terrain comme indiqué sur la figure. Un géomètre, qui veut estimer l'aire de la parcelle, se poste à la borne A et relève les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CAB}$. Puis il se rend à la borne B distante de a mètres et relève alors les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ABC}$.
Exprimer l'aire de la parcelle à l'aide des seules mesures prises par le géomètre.



Des solutions

76-1 *de Frédéric de Ligt* :
Dans une urne contenant N boules, n d'entre elles sont blanches. On extrait p boules de cette urne et, sans les regarder, on les dépose dans une seconde urne. On tire maintenant une boule de la seconde urne. Montrer que la probabilité que cette boule soit blanche est à nouveau de n / N.

Solution de l'auteur :

On peut trouver des informations sur l'historique de ce problème dans le livre de F.Jongmans *Eugène Catalan* (édité par la SBPM en 1996, pages 197 à 200), mais pas l'ombre d'une solution. Voici mon bricolage combinatoire.
On suppose bien sûr que $0 \leq n, p \leq N$. La probabilité P(B) de tirer une boule blanche lors du second tirage est la somme des probabilités de tirage d'une boule blanche lors du second tirage sachant qu'il y avait i boules blanches ($1 \leq i \leq \inf(n,p)$) dans le prélèvement de p boules. Cela se traduit par l'expression : $P(B) = \sum_{i=1}^{\inf(n,p)} \frac{\binom{n}{i}\binom{N-n}{p-i}}{\binom{N}{p}} \times \frac{i}{p}$. On a la suite d'égalités :

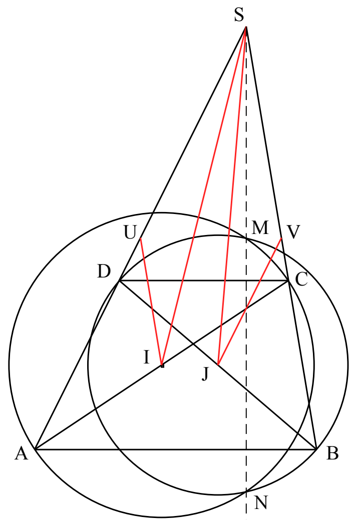
$$\sum_{i=1}^{\inf(n,p)} \frac{\frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{(N-n)!}{(p-i)!(N-n-p+i)!} \times \frac{i}{p}}{\frac{N!}{p!(N-p)!}} = \sum_{i=1}^{\inf(n,p)} \frac{n!(N-n)!(p-1)!(N-p)!}{(i-1)!(n-i)!(p-i)!(N-n-p+i)!N!} = \sum_{i=1}^{\inf(n,p)} \frac{\binom{N-p}{n-i}\binom{p-1}{i-1}}{\binom{N}{n}}.$$

Posons i' = i – 1, n' = n – 1, p' = p – 1 et N' = N – 1. L'expression devient $\sum_{i'=0}^{\inf(n',p')} \frac{\binom{N'-p'}{n'-i'}\binom{p'}{i'}}{\binom{N'}{n'}} \times \frac{n}{N}$.

Il reste maintenant à montrer que $\sum_{i'=0}^{\inf(n',p')} \frac{\binom{N'-p'}{n'-i'}\binom{p'}{i'}}{\binom{N'}{n'}} = 1$ pour aboutir à la conclusion.

On part pour cela de l'égalité : $(1+t)^{N'} = (1+t)^{p'}(1+t)^{N'-p'} = \sum_{j=0}^{p'} \binom{p'}{j} t^j \times \sum_{k=0}^{N'-p'} \binom{N'-p'}{k} t^k$.

Le coefficient de $t^{n'}$ vaut d'une part $\binom{N'}{n'}$ mais aussi $\sum_{s=0}^{\inf(n',p')} \binom{p'}{s}\binom{N'-p'}{n'-s}$ car si s > p' alors $\binom{p'}{s} = 0$ et si s > n' alors $\binom{N'-p'}{n'-s} = 0$. On a bien $P(B) = \frac{n}{N}$.



77-2 *de Jacques Chayé* :
« Les circonférences ayant pour diamètres les diagonales d'un trapèze ABCD se coupent sur la perpendiculaire aux bases menée du point d'intersection S des côtés obliques AD et BC. »
Extrait de *Problèmes mathématiques* par Ernest Lebon- Armand Colin (1898).

Solution de l'auteur :
Soit I, J, U, V les milieux de [AC], [BD], [AS], [BS] respectivement. S appartient à l'axe radical des deux cercles si et seulement si il a même puissance par rapport à ces deux cercles, c'est-à-dire si et seulement si $IS^2 - IA^2 = JS^2 - JB^2$.

Or : $IS^2 - IA^2 = 2\,\overrightarrow{SA}\bullet\overrightarrow{UI} = \overrightarrow{SA}\bullet\overrightarrow{SC} = SA \times SC \times \cos\widehat{ASB}$

$JS^2 - JB^2 = 2\overrightarrow{SB}\bullet\overrightarrow{VJ} = \overrightarrow{SB}\bullet\overrightarrow{SD} = SB \times SD \times \cos\widehat{ASB}$.

Mais $\frac{SA}{SB} = \frac{SD}{SC}$ donc $SA \times SC = SB \times SD$, ce qui prouve que la condition est remplie.

N.D.L.R. *Pour les collègues les plus jeunes, qui n'ont pas eu l'occasion de rencontrer pendant leurs études les notions de puissance d'un point par rapport à un cercle et d'axe radical de deux cercles, je conseille la lecture très éclairante du petit livre de Coxeter et Greitzer « Redécouvrons la géométrie » réédité aux éditions Jacques Gabay.*

78-1 *transmis par Louis Rivoallan d'après un problème paru dans « Le monde »* :
Un hexagone ABCDEF convexe est tel que les aires des triangles ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB ont tous la même aire. Quelle particularité géométrique a cet hexagone ?

Solution de Frédéric de Ligt :
Les triangles ABC et BCD ont la même aire et une base commune, à savoir [BC], les hauteurs correspondantes sont donc égales. On en déduit que les droites (AD) et (BC) sont parallèles. En considérant maintenant les triangles AFE et FED, on déduit que les droites (FE) et (AD) sont parallèles. Les côtés [BC] et [FE] sont donc parallèles. On raisonne de la même façon pour établir le parallélisme des côtés [AB] et [ED] ainsi que celui des côtés [CD] et [AF].
En définitive les côtés opposés de cet hexagone sont parallèles.

78-2 *de Frédéric de Ligt* :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{4+\sqrt{4-\sqrt{4+\sqrt{4-x}}}} = x$.

***Solution de Bruno Alaplantive :* Une simili narration**

Miroir mon beau miroir.

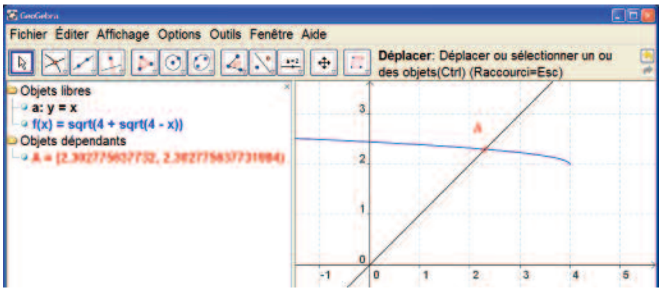
On remarque que si $\sqrt{4+\sqrt{4-x}} = x$, alors $\sqrt{4+\sqrt{4-\sqrt{4+\sqrt{4-x}}}} = \sqrt{4+\sqrt{4-x}} = x$. Sinon en posant $\sqrt{4+\sqrt{4-x}} = y$, il vient $\sqrt{4+\sqrt{4-y}} = x$, et par substitution de la deuxième dans la première : $\sqrt{4+\sqrt{4-\sqrt{4+\sqrt{4-y}}}} = y$. Il est clair que x et y jouent des rôles totalement symétriques et qu'au final $x = y$. L'équation (E) est ramenée à $\sqrt{4+\sqrt{4-x}} = x$ (E').

Impuissance de mon algèbre.

L'équation (E') renvoie une équation de degré 4 qui a 4 solutions non triviales dont seule celle qui est supérieure à 2 conviendra (en effet il faut $x > 0$ et $x < 4$ et aussi $x^2 - 4 > 0$; soit finalement $2 < x < 4$). J'ai tout de même un peu progressé : il n'y a qu'une seule solution.

Précision de Géogébra.

Selon ce bel outil, $x \approx 2{,}30277563773$ hum …



En mathématiques, la curiosité n'est pas un défaut !

Ne me contentant pas de vérifier que $\sqrt{4+\sqrt{4-2{,}30277563773}} \approx 2{,}30277563773$, mais regardant les nombres obtenus au fil du calcul, je *tombe* sur : $\sqrt{4-2{,}30277563773} \approx 1{,}30277563773$!!! Ainsi, en posant $\boldsymbol{x} = 2+\alpha$ où $0 < \alpha < 1$, il faudrait donc avoir $\sqrt{4-(2+\alpha)} = 1+\alpha$ soit encore $\sqrt{2-\alpha} = 1+\alpha$. Ah ! Une équation du second degré que je saurai résoudre.

Mais avant cela remarquons que $\sqrt{4+\sqrt{2-\alpha}} = \sqrt{4+1+\alpha} = \sqrt{5+\alpha}$ et ensuite que :

$$(2+\alpha)^2 = (1+(1+\alpha))^2 = 1+2\times(1+\alpha)+(1+\alpha)^2 = 1+2+2\alpha+2-\alpha = 5+\alpha .$$

Ainsi $x = 2+\alpha$ sera bien solution de (E') et donc de (E).

La seule solution positive de l'équation $\sqrt{2-\alpha} = 1+\alpha$ et bien comprise entre 0 et 1 est $\alpha = \dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$ et on obtient finalement

$$\boldsymbol{x} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

Insatisfaction.

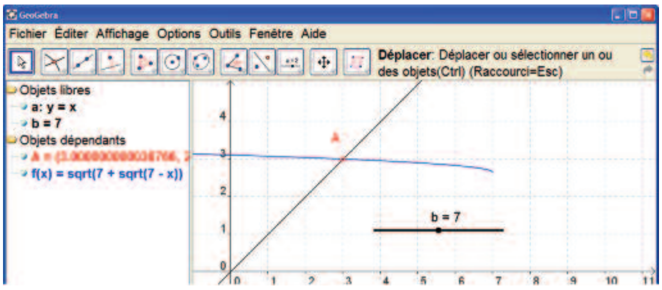
Je n'ai pas vu en quoi la condition $\sqrt{2-\alpha} = 1+\alpha$ était nécessaire. Dans cette narration, ce point est très court, pas dans mon bien-être…

Vers une lueur : décidément, en mathématiques la curiosité n'est pas un défaut !

Et pourquoi pas $\sqrt{5+\sqrt{5-\sqrt{5+\sqrt{5-x}}}} = x$

ou $\sqrt{6+\sqrt{6-\sqrt{6+\sqrt{6-x}}}} = x$ ou…

Force est de constater que la condition « nécessaire » se reproduit alors en $\sqrt{3-\alpha} = 1+\alpha$ ou en $\sqrt{4-\alpha} = 1+\alpha$ ou …, que certaines équations comme $\sqrt{3+\sqrt{3-x}} = x$ ou $\sqrt{7+\sqrt{7-x}} = x$ ou ... ont des solutions entières, (2 et 3 pour ces deux exemples).



À nouveau Géogébra permet à l'aide d'un curseur, calibré en pas entier, de visualiser. Ce curseur m'aura surtout forcé à écrire $f(x) = \sqrt{b+\sqrt{b-x}}$ et à considérer l'équation générale $\sqrt{b+\sqrt{b-x}} = x$.

Un petit grain de folie…

Quel suspense ! Quelle mise en page !

Ben voilà, j'ai tout bêtement regardé $\sqrt{b+\sqrt{b-x}} = x$ comme une équation d'inconnue b…

$\sqrt{b+\sqrt{b-x}} = x$ suppose $b > x > 0$, $\sqrt{b-x} = x^2-b$ suppose $x^2-b>0$, $b-x=(x^2-b)^2$.

Il vient alors $b^2-(2x^2+1)b+x^4+x=0$,

d'où $\Delta = (2x+1)^2 - 4(x^4 + x) = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 - 4x = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$;

et en supposant que $x > 1/2$, on aura $\sqrt{\Delta} = 2x - 1$.

Alors : soit $b = \dfrac{2x^2 + 1 + 2x - 1}{2}$ c'est-à-dire $b = x^2 + x$ ou encore $x^2 + x - b = 0$, mais cette solution est contraire aux hypothèses $b > x > 0$ et $x^2 - b > 0$;

soit $b = \dfrac{2x^2 + 1 - 2x + 1}{2}$, soit encore $x^2 - x + 1 - b = 0$. Cette dernière équation, d'inconnue x, n'a qu'une seule solution positive :

$$x = \frac{1 + \sqrt{4b - 3}}{2}$$

Remarque. En fouillant un peu plus, on verrait que :

- b doit être plus grand ou égal à 1 (à défaut, l'équation n'a pas de solution) ;
- rien n'oblige b à être entier ;
- pour $b = n^2 - n + 1$ où n est un entier naturel, x est alors entier ;
- …

Solution de l'auteur :

Soit les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{4 - x}$, $g : x \mapsto \sqrt{4 + x}$ et $\mathrm{H} = g \circ f \circ g \circ f$.

Le domaine de définition de H est [-140 ; 4] et H([-140 ; 4]) = $\left[2\, ; \sqrt{4 + \sqrt{2}}\right]$.

On peut donc restreindre sans perte la recherche des solutions de l'équation H(x) = x à l'intervalle [2 ; 3].

Sur l'intervalle [2 ; 3] H est dérivable et $\mathrm{H}' = (g' \circ f \circ g \circ f) \times (f' \circ g \circ f) \times (g' \circ f) \times f'$. Comme on a $f([2\,;\,3]) \subset [2\,;\,3]$, $g([2\,;\,3]) \subset [2\,;\,3]$, $f'([2\,;\,3]) \subset]0\,;\,1[$ et $g'([2\,;\,3]) \subset]0\,;\,1[$ on en déduit que $\mathrm{H}'([2\,;\,3]) \subset]0\,;\,1[$ et en particulier que H'(x) < 1 sur [2 ; 3].

La fonction $\boldsymbol{x \mapsto \mathrm{H}(x) - x}$ est strictement décroissante sur [2 ; 3] car H'(x) – 1 < 0 ; par ailleurs H(2) – 2 > 0 et H(3) – 3 < 0 ; il existe donc un unique réel x_0 dans l'intervalle [2 ; 3] tel que H(x_0) = x_0 et ce réel sera l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation H(x) = x.

Soit $h = g \circ f$, on a $\mathrm{H} = h \circ h$. Si on trouve, sur l'intervalle [2 ; 3], une solution à l'équation $h(x) = x$, ce sera la solution x_0 de H(x) = x car H(x) = $h(h(x)) = h(x) = x$.

Soit donc un réel x dans l'intervalle [2 ; 3] tel que $h(x) = x$, on a d'une part $f(x) = \sqrt{4 - x}$ et donc $f^2(x) = 4 - x$ et d'autre part $\sqrt{4 + f(x)} = x$ et donc $x^2 = 4 + f(x)$. En retranchant membre à membre les deux expressions obtenues on a l'égalité $x^2 - f^2(x) = f(x) + x$ ou encore $(x + f(x))(x - f(x)) = x + f(x)$. Comme x et $f(x)$ sont strictement positifs alors $f(x) + x$ est aussi strictement positif. Il faut donc que $f(x) - x = -1$ ou encore que $f(x) = x - 1$. Mais on a aussi $f(x) = x^2 - 4$. La solution de $h(x) = x$ doit vérifier $x - 1 = x^2 - 4$ ou encore $x^2 - x - 3 = 0$. La solution positive est $\dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$. On vérifie alors que cette valeur est bien solution de $h(x) = x$ sur [2 ; 3] et c'est en définitive l'unique solution de H(x) = x.

Rallye Mathématique Poitou-Charentes

25 février 2010

Le rallye s'est déroulé comme prévu, le 25 février dernier.
Le palmarès a été envoyé par courrier électronique aux établissements participants. Le dossier habituel contenant le palmarès, les solutions, les commentaires, ainsi que les lots pour les classes primés sera envoyé par le Rectorat le 5 mai prochain.
Les épreuves et le palmarès sont sur le site de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes (http://apmep.poitiers.free.fr/).

Pour l'équipe organisatrice : Jean Fromentin