Edito

Les ateliers MATh.en.JEANS, vous connaissez ?*

Il s'agit d'ateliers scientifiques où des élèves volontaires, de différents niveaux, découvrent la recherche en mathématiques. Différents sujets sont proposés par un chercheur. Les élèves de deux établissements, jumelés pour l'occasion, se répartissent alors par petits groupes selon les sujets retenus. Ils vont alors les travailler toute l'année au sein d'un atelier scientifique. Des séminaires sont organisés tous les deux mois où les élèves des deux établissements et le chercheur vont se rencontrer pour faire le point. Un congrès annuel réunit fin mars tous les participants. Les élèves présentent alors leurs résultats sous forme d'exposés en amphi ou d'animations sur le forum. Des articles sont ensuite rédigés par les élèves en vue d'une publication qui peut prendre diverses formes.

L'association MATh.en.JEANS existe depuis plus de vingt ans. Elle soutient et coordonne les ateliers scientifiques qui se sont inscrits auprès d'elle. L'APMEP la parraine depuis ses débuts.

Je vous présente cette dynamique association car j'ai eu l'occasion pour la première fois cette année de participer à cette passionnante aventure avec quelques élèves et j'engage tous les collègues à faire de même. Je reviens du congrès annuel MATh.en.JEANS, qui se tenait à Grenoble (1200 participants !) et j'ai ramené des élèves enthousiasmés.

Les difficultés pour monter un tel atelier existent. Comment trouver un collège partenaire ? Où trouver un chercheur ? Comment financer les déplacements ? Dans les régions où MATh.en.JEANS est bien implanté, c'est l'association qui met en relation les personnes mais dans notre académie c'est plus difficile. Et c'est là où je voulais en venir dans cet édito. Pour que puissent s'organiser de tels ateliers en Poitou-Charentes, sans trop d'obstacles à surmonter, il faudrait que se tisse un réseau. Or qui mieux que la Régionale, avec ses outils de communication et ses adhérents, peut aider à l'initier ?

Dans un premier temps, le plus simple est d'aller visiter le site http://matenenjeans.free.fr pour vous faire une idée.

Si l'aventure vous tente, dépêchez-vous d'inscrire un atelier scientifique dans votre projet d'établissement et faites-nous le savoir. La Régionale pourra sans doute vous aider à trouver des partenaires.

Le 9 juin prochain, à 15 h, au lycée du Val de Sèvre de Saint-Maixent, la Régionale organise une présentation de 5 ateliers MATh.en.JEANS qui se sont déroulés cette année dans notre académie (niveaux collège et lycée). Des élèves et des enseignants viendront faire partager leur expérience, présenter leurs travaux et répondre aux questions. Venez nombreux !

Frédéric de Ligt.

* **M**éthode d'**A**pprentissage des **Th**éories mathématiques **en** **J**umelant des **E**tablissements pour une **A**pproche **N**ouvelle du **S**avoir

SOMMAIRE

Association des **P**rofesseurs de **M**athématiques de l' **E**nseignement **P**ublic

Régionale de Poitou-Charentes

n°80

Mars 2010

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

APMEP : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél : apmep.poitiers@free.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros) + Suppléments : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Frédéric de LIGT
Comité de rédaction …	F. de LIGT, L-M BONNEVAL N. MINET, J. FROMENTIN,
Imprimerie …………..	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Éditeur ……………….	APMEP Régionale de Poitiers
Siège social ………….	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Dépôt légal	Mars 2010

Vie de l'IREM

Redynamiser : la recherche continue.

La recherche menée depuis 2005 en partenariat avec l'INRP (projet CDAMPERES), pour redynamiser l'enseignement des mathématiques en l'articulant sur de grandes questions, se poursuit.
Suite à cette recherche, l'équipe collège rédige :
- d'une part des articles pour « Repères IREM » (voir notamment celui de Fabrice Tarra dans le numéro 78 de janvier 2010,
- d'autre part des brochures « Enseigner les mathématiques en 6ème à partir des grandeurs ». La première, sur les angles, est sortie fin octobre 2009, la seconde, sur les durées, vient de sortir, quatre autres sont actuellement en chantier…

Et en même temps, l'équipe collège poursuit cette recherche en s'attaquant aux autres années du collège.
L'équipe lycée a dû reprendre sa recherche sur l'organisation de l'année de seconde, suite à la modification du programme, et à une discussion autour du choix des grandes questions sur lesquelles articuler l'enseignement : dans l'état actuel du projet au niveau de la classe de seconde elles sont différentes d'un domaine à l'autre (géométrie, fonctions, probabilités, algorithmique), mais certains souhaiteraient trouver, comme pour la classe de 6ème, des questions transversales qui font appel à différents domaines au programme.

Diverses présentations de cette recherche ont été faites dans des colloques et séminaires, avec toujours un accueil très favorable. La dernière a eu lieu le 18 mars au CIRM (Marseille - Luminy) lors d'un atelier au colloque national des IREM : on peut en avoir un aperçu en allant sur le Portail des IREM.
Nous avons également d'excellents échos (y compris de la part des IPR) des stages organisés sur ces questions, ceci malgré les dysfonctionnements au niveau de l'inscription à ces stages.
C'est pourquoi nous avons décidé de proposer à nouveau ces stages l'an prochain, sous forme de stages d'offre, pour lesquels nous souhaitons avoir un maximum d'inscriptions d'équipes, même si bien entendu les candidatures isolées restent possibles. Nous invitons tous les collègues intéressés par cette nouvelle manière d'organiser leur enseignement, à en discuter avec les membres de l'équipe de maths de leur établissement… Une candidature au stage de plusieurs membres permettrait une mise en œuvre plus facile…
Nous espérons aussi proposer pour les enseignants de collège ayant déjà suivi le stage, de suivre un niveau 2, qui abordera l'ensemble des quatre années du collège…

N.B. : Yves CHEVALLARD, dont la « théorie anthropologique du didactique » sert de base théorique à notre recherche, vient de recevoir de l'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) le prix Freudenthal qui récompense *« a outstanding achievement in mathematics education research »* voir : http://mathunion.org/icmi/home ou le site educmath http://educmath.inrp.fr/ où il a signé le 29 mars un éditorial : http://educmath.inrp.fr/Educmath/la-parole-a/yves-chevallard/edito.pdf

L'IREM et les réformes

Le socle au primaire et au collège, la réforme du lycée, la masterisation de la formation des enseignants, autant de réformes lourdes de conséquences auxquelles nous sommes confrontés.
L'équipe IREM a accumulé une expérience et un degré d'expertise, qui lui permettent d'une part de nourrir de fortes craintes vu la manière dont ces réformes sont menées, et d'autre part d'être en première ligne pour les accompagner…
Et en même temps, l'ampleur des tâches et des possibilités qui risquent d'être peu importantes (puisqu'il semble que l'attribution de décharges sera très limitée) nous obligera à faire des choix : chacun devant trouver l'équilibre entre participer à la vie de son établissement et à celle de l'IREM, et l'IREM lui-même entre la recherche, la formation initiale et la formation continue…
Choix d'autant plus difficiles que beaucoup d'aspects des réformes sont encore inconnus…
Prenons l'exemple de la formation des enseignants. Celle-ci demande une véritable alternance, enseigner la didactique et la pédagogie à des étudiants qui ne sont pas confrontés à des situations d'enseignement n'a guère de sens. Inversement, mettre à plein temps sans un véritable accompagnement des jeunes lauréats des concours sans formation professionnelle préalable risque d'engendrer des catastrophes et de n'être qu'un immense gâchis, pour les jeunes concernés et la suite de leur carrière, pour leurs tuteurs, et pour les élèves…
On trouvera ci-joint la lettre que nous avons envoyée aux instances de l'université (IUFM inclus) et aux IPR, donnant un minimum d'exigences sans lesquels l'IREM ne s'engagera pas à accompagner les futurs lauréats aux concours.

J'écris ces lignes au retour d'une semaine au CIRM de Marseille-Luminy pour le colloque « Les mathématiciens face à l'enseignement de leur discipline » réalisé à l'occasion des 40 ans des IREM et des 20 ans de la revue « Repères IREM ». Chacun a pu souligner le foisonnement des productions et des réalisations des IREM, hélas encore trop peu visibles, mais qui nous donnent des compétences et donc un devoir de vigilance dans ces temps difficiles…

Vous l'aurez compris, nous avons tous besoin de lieux comme l'IREM où peuvent se monter des actions de recherche et de formation de qualité. Mais l'équipe actuelle est déjà engagée sur beaucoup de chantiers. Elle a besoin d'être renouvelée et renforcée. N'hésitez pas à nous contacter.

Jean SOUVILLE, directeur de l'IREM.
irem@univ-poitiers.fr

Les extraits de la lettre du 28 février 2010 du directeur de l'IREM aux responsables de l'université et aux IPR, concernant la formation des lauréats des concours (CAPES-Agreg) 2010, sont dans l'encadré, page suivante.

Actuellement, les stagiaires (PLC2 de Mathématiques) ont beaucoup de difficultés, malgré leur service réduit, à gérer leur enseignement (préparation des cours, gestion de la classe, etc.).

Ceux qui seront stagiaires l'an prochain n'ayant eu aucune formation professionnelle (puisque notamment la majorité auront refusé de faire un stage en responsabilité) seront confrontés aux mêmes difficultés, mais ne pourront pas y faire face si leur service est à temps plein et s'ils ne disposent pas de moment dans la semaine où ils peuvent se rencontrer et bénéficier d'une formation et d'une aide.

En conséquence, il nous paraît indispensable :

***1.** de prévoir une formation avant la rentrée, par exemple de 12 heures les lundi 30 et mardi 31 Août, centrée sur la prise en main de la classe, un survol des notions de base de la didactique et de la pédagogie, et les différentes questions administratives…*

***2.** de prévoir une rencontre de 3h minimum chaque semaine, ce qui permet, outre une formation sur le principe de l'alternance, au plus près de l'exercice du métier, de leur permettre d'exprimer librement leurs difficultés, entre eux et avec des formateurs chevronnés non directement liés à leur établissement.*

***3.** de ne pas trop alourdir leur semaine. Un service de 12h nous semble déjà très lourd, le porter à 15h mettrait certains en difficulté, au-delà on multiplierait les abandons, congés maladie avec de lourdes conséquences pour les intéressés, mais également pour l'encadrement des élèves…*

(…)

Toutefois, aux 75 heures obligatoires prévues ci-dessus, peuvent être ajoutés de manière optionnelle, des formations :

- d'une part transdisciplinaires (sur l'institution scolaire, les élèves, les familles, la classe, …),

- d'autre part, de compléments disciplinaires (notamment en géométrie élémentaire et en probas-stats), compléments qui nous paraissent aujourd'hui très utiles aux PLC2, mais que nous ne pouvons pas proposer en obligatoire si leur service est par ailleurs lourd.

L'équipe IREM est prête à participer aux formations décrites ci-dessus, sous deux réserves :

∗ une organisation de la formation par alternance qui respecte les points 1) à 3) décrits ci-dessus.

∗ l'obtention de décharges de service hebdomadaire pour les formateurs, car la formation et l'aide à apporter aux jeunes enseignants demande une réelle disponibilité.

Nouvelle brochure : Enseigner les Mathématiques en 6$^{\text{ème}}$ à l'aide des grandeurs, les durées. Mars 2010. Prix : 8 € à l'IREM, 10,50 € port compris.

Nouveaux articles :

- Les volumes en classe de sixième, J-Paul Guichard, Repères-IREM 76, juillet 2009, en ligne sur le site des IREM : http://www.univ-irem.fr
- Le volume de la boule en troisième, Sébastien Peyrot, Repères-IREM 77, octobre 2009
- Le chapitre Probabilités en troisième, par Thierry Chevalarias, Repères-IREM 78, janvier 2010
- Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs, Fabrice Tarra, Repères-IREM 78, janvier 2010

Comparaison n'est pas raison

Quelle ne fut pas ma surprise en trouvant posée sur la table de la salle des professeurs cette publicité ! S'agissait-il d'un canular ? Je me renseigne. Pas du tout !

Quelle comparaison établit-elle ? J'ai beau me gratter la tête, rien ne vient. Je ne vois aucune raison de relier ces données. J'y vois surtout, en filigrane, une nième attaque, mais pour le coup moins que fine, de l'enseignement des maths. Affligeant !

Frédéric de Ligt.

Perles dans nos classes

envoyée par Nathalie Chevalarias

Classe de seconde :

La courbe représentative de la fonction « carré » peut être une parabole ou une hyperbole mais le plus souvent, c'est une parabole.

(NDLR) Au moins il n'y a pas d'ellipse dans cette réponse. Tout cela est très conique !

Comment faire compter les ordinateurs ?

Conférence de Jean-Michel Muller le 17 mars à l'Espace Mendès-France de Poitiers

Jean-Michel Muller, chercheur au laboratoire « Informatique du Parallélisme » à l'ENS de Lyon, dit de lui-même qu'il « apprend à compter aux ordinateurs ». Vitesse et précision sont bien sûr attendues, mais aussi fiabilité et économie d'énergie.
Pour ce qui est de la fiabilité des calculs, quelques exemples saisissants en montrent l'enjeu : explosion en vol de la fusée Ariane 5 en 1996 (nombre trop grand pour être traité), bug du microprocesseur Pentium en 1997 (algorithme de division faux), panne d'un navire de guerre américain en 1998 (division par 0), crash sur Mars de la sonde Climate Orbiter en 1999 (confusion entre mètres et yards)…
Le calcul en « virgule flottante » combiné à la base 2 peut si l'on n'y prend garde engendrer des effets pervers : en Maple 7 la division de 5001! par 5000! donnait 1 ; en Excel 2007, 65535 - 2^{-37} donnait 100 000 ; sur différentes machines, le même calcul peut donner des résultats très différents !
Pourtant en 1985 la norme IEEE-754 a spécifié les formats et la gestion des exceptions. En 2008 une nouvelle norme a précisé l'implantation des fonctions élémentaires, ainsi que les arrondis. Cela a amélioré la fiabilité et la portabilité des logiciels. Surtout, cela a donné à l'arithmétique en virgule flottante une structure de théorie mathématique sur laquelle on peut raisonner.

Cette conférence passionnante a montré entre autres que, contrairement à ce que certains ont pu dire[1], le raisonnement mathématique n'a rien perdu de son utilité du fait des ordinateurs : c'est plutôt le contraire !
Pour en savoir plus on peut se reporter aux livres de JM Muller : « Arithmétique des ordinateurs » (Masson, 1989), « Elementary Functions: algorithms and implementation » (Birkhauser Boston, 1997), ou visiter le site :

http://www.ens-lyon.fr/LIP/web/

Le diaporama de sa conférence sera disponible sur le site de l'Espace Mendès-France.

Louis-Marie BONNEVAL

1 « *Les maths sont en train de se dévaluer de manière quasi inéluctable. Désormais, il y a des machines pour faire les calculs* » (1999, Claude Allègre, alors ministre de l'Éducation Nationale)

Expo itinérante : une affaire qui tourne

L'exposition « Comment tu comptes ? », visible jusqu'au 4 avril à l'Espace Mendès-France de Poitiers, présente une série de 22 panneaux, du matériel à manipuler et des animations. Cette exposition, à laquelle la Régionale APMEP et l'IREM de Poitiers ont participé, retrace de façon claire et pédagogique la longue histoire du calcul : systèmes de numération, abaques, machines à calculer…). Afin de faire profiter un maximum d'établissements de cette belle réalisation, la Régionale et l'Espace Mendès-France se sont encore associés pour dupliquer tous les panneaux et ainsi permettre de les faire circuler dans l'académie. Une information a été lancée sur la liste diffusion académique et les réactions ne sont pas fait attendre. Une grosse vingtaine de réponses nous sont parvenues.
Depuis plusieurs semaines déjà l'expo circule d'établissement en établissement et les réservations sont prises jusqu'à la fin de l'année. Si vous voulez la faire venir chez vous, il faudra patienter jusqu'au début de l'année prochaine. Le coût de la location est de 40 € par semaine. Le nombre d'enseignants intéressés et leur dispersion géographique permet d'envisager une rotation entre établissements assez voisins, ce qui réduit de façon importante les frais de transport (l'expo est transportable dans un véhicule personnel).

Pour des informations complémentaires ou une réservation, vous pouvez dès à présent prendre contact par mél :

deligt@wanadoo.fr.

RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

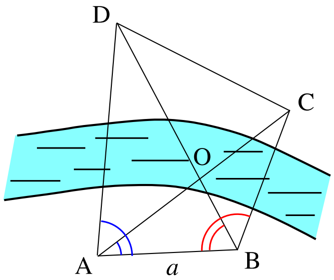
Des problèmes

80-1 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Il est bien connu que dans un trapèze le segment qui joint les milieux des côtés opposés non parallèles est égal à la demi-somme des deux bases. Mais qu'en est-il de la réciproque ?
Si le segment joignant les milieux de deux côtés opposés d'un quadrilatère est égal à la demi-somme des deux autres, ce quadrilatère est-il un trapèze ?

80-2 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Un triangle ABC est inscrit dans un cercle de centre O. Il s'agit de tracer l'orthocentre et le centre de gravité de ce triangle, mais on ne dispose comme outils de construction que d'un appareil permettant de tracer des droites parallèles et d'une règle. Donc, ni compas, ni équerre. Comment faire ?

80-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* : Le nombre a se termine par un 1 (en base dix). Montrer que l'équation $x^4 + a = 3y^8$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

80-4 *de Frédéric de Ligt (Montguyon) d'après un exercice proposé par Jean-Paul Guichard* :
Une parcelle a la forme d'un quadrilatère convexe. Les sommets A, B, C et D représentent les bornes. Une rivière traverse le terrain comme indiqué sur la figure. Un géomètre, qui veut estimer l'aire de la parcelle, se poste à la borne A et relève les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CAB}$. Puis il se rend à la borne B distante de a mètres et relève alors les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ABC}$.
Exprimer l'aire de la parcelle à l'aide des seules mesures prises par le géomètre.



Des solutions

76-1 *de Frédéric de Ligt* :
Dans une urne contenant N boules, n d'entre elles sont blanches. On extrait p boules de cette urne et, sans les regarder, on les dépose dans une seconde urne. On tire maintenant une boule de la seconde urne. Montrer que la probabilité que cette boule soit blanche est à nouveau de n / N.

Solution de l'auteur :

On peut trouver des informations sur l'historique de ce problème dans le livre de F.Jongmans *Eugène Catalan* (édité par la SBPM en 1996, pages 197 à 200), mais pas l'ombre d'une solution. Voici mon bricolage combinatoire.
On suppose bien sûr que $0 \le n, p \le N$. La probabilité P(B) de tirer une boule blanche lors du second tirage est la somme des probabilités de tirage d'une boule blanche lors du second tirage sachant qu'il y avait i boules blanches ($1 \le i \le \inf(n,p)$) dans le prélèvement de p boules. Cela se traduit par l'expression : $P(B) = \sum_{i=1}^{\inf(n,p)} \frac{\binom{n}{i}\binom{N-n}{p-i}}{\binom{N}{p}} \times \frac{i}{p}$. On a la suite d'égalités :

$$\sum_{i=1}^{\inf(n,p)} \frac{\frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{(N-n)!}{(p-i)!(N-n-p+i)!} \times \frac{i}{p}}{\frac{N!}{p!(N-p)!}} = \sum_{i=1}^{\inf(n,p)} \frac{n!(N-n)!(p-1)!(N-p)!}{(i-1)!(n-i)!(p-i)!(N-n-p+i)!N!} = \sum_{i=1}^{\inf(n,p)} \frac{\binom{N-p}{n-i}\binom{p-1}{i-1}}{\binom{N}{n}}.$$

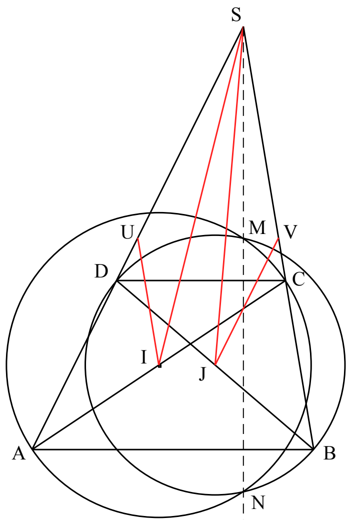
Posons i' = i – 1, n' = n – 1, p' = p – 1 et N' = N – 1. L'expression devient $\sum_{i'=0}^{\inf(n',p')} \frac{\binom{N'-p'}{n'-i'}\binom{p'}{i'}}{\binom{N'}{n'}} \times \frac{n}{N}$.

Il reste maintenant à montrer que $\displaystyle\sum_{i'=0}^{\inf(n',p')} \frac{\binom{N'-p'}{n'-i'}\binom{p'}{i'}}{\binom{N'}{n'}} = 1$ pour aboutir à la conclusion.

On part pour cela de l'égalité : $(1+t)^{N'} = (1+t)^{p'}(1+t)^{N'-p'} = \displaystyle\sum_{j=0}^{p'}\binom{p'}{j}t^j \times \sum_{k=0}^{N'-p'}\binom{N'-p'}{k}t^k$.

Le coefficient de $t^{n'}$ vaut d'une part $\binom{N'}{n'}$ mais aussi $\displaystyle\sum_{s=0}^{\inf(n',p')}\binom{p'}{s}\binom{N'-p'}{n'-s}$ car si s > p' alors $\binom{p'}{s}=0$ et si s > n' alors $\binom{N'-p'}{n'-s}=0$. On a bien $P(B)=\frac{n}{N}$.

77-2 *de Jacques Chayé* :
« Les circonférences ayant pour diamètres les diagonales d'un trapèze ABCD se coupent sur la perpendiculaire aux bases menée du point d'intersection S des côtés obliques AD et BC. »
Extrait de *Problèmes mathématiques* par Ernest Lebon- Armand Colin (1898).



Solution de l'auteur :
Soit I, J, U, V les milieux de [AC], [BD], [AS], [BS] respectivement. S appartient à l'axe radical des deux cercles si et seulement si il a même puissance par rapport à ces deux cercles, c'est-à-dire si et seulement si $IS^2 - IA^2 = JS^2 - JB^2$.

Or : $IS^2 - IA^2 = 2\,\overrightarrow{SA}\bullet\overrightarrow{UI} = \overrightarrow{SA}\bullet\overrightarrow{SC} = SA \times SC \times \cos\widehat{ASB}$

$JS^2 - JB^2 = 2\overrightarrow{SB}\bullet\overrightarrow{VJ} = \overrightarrow{SB}\bullet\overrightarrow{SD} = SB \times SD \times \cos\widehat{ASB}$.

Mais $\frac{SA}{SB} = \frac{SD}{SC}$ donc $SA \times SC = SB \times SD$, ce qui prouve que la condition est remplie.

N.D.L.R. *Pour les collègues les plus jeunes, qui n'ont pas eu l'occasion de rencontrer pendant leurs études les notions de puissance d'un point par rapport à un cercle et d'axe radical de deux cercles, je conseille la lecture très éclairante du petit livre de Coxeter et Greitzer « Redécouvrons la géométrie » réédité aux éditions Jacques Gabay.*

78-1 *transmis par Louis Rivoallan d'après un problème paru dans « Le monde »* :
Un hexagone ABCDEF convexe est tel que les aires des triangles ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB ont tous la même aire. Quelle particularité géométrique a cet hexagone ?

Solution de Frédéric de Ligt :
Les triangles ABC et BCD ont la même aire et une base commune, à savoir [BC], les hauteurs correspondantes sont donc égales. On en déduit que les droites (AD) et (BC) sont parallèles. En considérant maintenant les triangles AFE et FED, on déduit que les droites (FE) et (AD) sont parallèles. Les côtés [BC] et [FE] sont donc parallèles. On raisonne de la même façon pour établir le parallélisme des côtés [AB] et [ED] ainsi que celui des côtés [CD] et [AF].
En définitive les côtés opposés de cet hexagone sont parallèles.

78-2 *de Frédéric de Ligt* :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{4+\sqrt{4-\sqrt{4+\sqrt{4-x}}}} = x$.

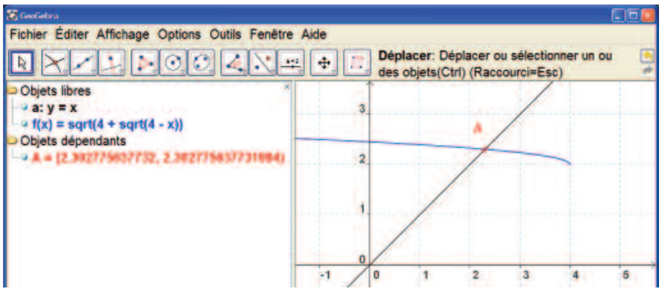
***Solution de Bruno Alaplantive :* Une simili narration**

Miroir mon beau miroir.

On remarque que si $\sqrt{4+\sqrt{4-x}} = x$, alors $\sqrt{4+\sqrt{4-\sqrt{4+\sqrt{4-x}}}} = \sqrt{4+\sqrt{4-x}} = x$. Sinon en posant $\sqrt{4+\sqrt{4-x}} = y$, il vient $\sqrt{4+\sqrt{4-y}} = x$, et par substitution de la deuxième dans la première : $\sqrt{4+\sqrt{4-\sqrt{4+\sqrt{4-y}}}} = y$. Il est clair que x et y jouent des rôles totalement symétriques et qu'au final $x = y$. L'équation (E) est ramenée à $\sqrt{4+\sqrt{4-x}} = x$ (E').

Impuissance de mon algèbre.

L'équation (E') renvoie une équation de degré 4 qui a 4 solutions non triviales dont seule celle qui est supérieure à 2 conviendra (en effet il faut $x > 0$ et $x < 4$ et aussi $x^2 - 4 > 0$; soit finalement $2 < x < 4$). J'ai tout de même un peu progressé : il n'y a qu'une seule solution.



Précision de Géogébra.

Selon ce bel outil, $x \approx 2{,}30277563773$ hum …

En mathématiques, la curiosité n'est pas un défaut !

Ne me contentant pas de vérifier que $\sqrt{4+\sqrt{4-2{,}30277563773}} \approx 2{,}30277563773$, mais regardant les nombres obtenus au fil du calcul, je *tombe* sur : $\sqrt{4-2{,}30277563773} \approx 1{,}30277563773$!!! Ainsi, en posant $\boldsymbol{x} = 2+\alpha$ où $0<\alpha<1$, il faudrait donc avoir $\sqrt{4-(2+\alpha)} = 1+\alpha$ soit encore $\sqrt{2-\alpha} = 1+\alpha$. Ah ! Une équation du second degré que je saurai résoudre.

Mais avant cela remarquons que $\sqrt{4+\sqrt{2-\alpha}} = \sqrt{4+1+\alpha} = \sqrt{5+\alpha}$ et ensuite que :

$(2+\alpha)^2 = (1+(1+\alpha))^2 = 1+2\times(1+\alpha)+(1+\alpha)^2 = 1+2+2\alpha+2-\alpha = 5+\alpha$.

Ainsi $x = 2+\alpha$ sera bien solution de (E') et donc de (E).

La seule solution positive de l'équation $\sqrt{2-\alpha} = 1+\alpha$ et bien comprise entre 0 et 1 est $\alpha = \dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$ et on obtient finalement

$$\boldsymbol{x} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

Insatisfaction.

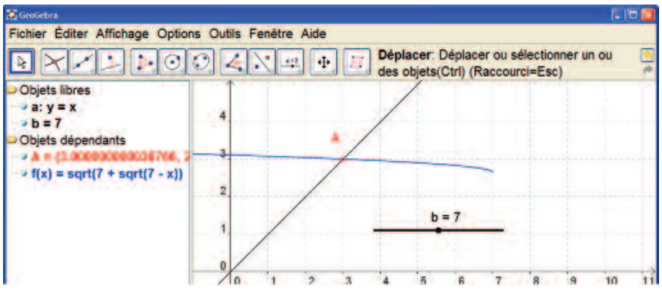
Je n'ai pas vu en quoi la condition $\sqrt{2-\alpha} = 1+\alpha$ était nécessaire. Dans cette narration, ce point est très court, pas dans mon bien-être…

Vers une lueur : décidément, en mathématiques la curiosité n'est pas un défaut !

Et pourquoi pas $\sqrt{5+\sqrt{5-\sqrt{5+\sqrt{5-x}}}} = x$

ou $\sqrt{6+\sqrt{6-\sqrt{6+\sqrt{6-x}}}} = x$ ou…

Force est de constater que la condition « nécessaire » se reproduit alors en $\sqrt{3-\alpha} = 1+\alpha$ ou en $\sqrt{4-\alpha} = 1+\alpha$ ou …, que certaines équations comme $\sqrt{3+\sqrt{3-x}} = x$ ou $\sqrt{7+\sqrt{7-x}} = x$ ou ... ont des solutions entières, (2 et 3 pour ces deux exemples).



À nouveau Géogébra permet à l'aide d'un curseur, calibré en pas entier, de visualiser. Ce curseur m'aura surtout forcé à écrire $f(x) = \sqrt{b+\sqrt{b-x}}$ et à considérer l'équation générale $\sqrt{b+\sqrt{b-x}} = x$.

Un petit grain de folie…

Quel suspense ! Quelle mise en page !

Ben voilà, j'ai tout bêtement regardé $\sqrt{b+\sqrt{b-x}} = x$ comme une équation d'inconnue b…

$\sqrt{b+\sqrt{b-x}} = x$ suppose $b > x > 0$, $\sqrt{b-x} = x^2-b$ suppose $x^2-b>0$, $b-x = (x^2-b)^2$.

Il vient alors $b^2-(2x^2+1)b+x^4+x = 0$, d'où $\Delta = (2x+1)^2 - 4(x^4 + x) = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 - 4x = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$;

et en supposant que $x > 1/2$, on aura $\sqrt{\Delta} = 2x - 1$.

Alors : soit $b = \dfrac{2x^2 + 1 + 2x - 1}{2}$ c'est-à-dire $b = x^2 + x$ ou encore $x^2 + x - b = 0$, mais cette solution est contraire aux hypothèses $b > x > 0$ et $x^2 - b > 0$;

soit $b = \dfrac{2x^2 + 1 - 2x + 1}{2}$, soit encore $x^2 - x + 1 - b = 0$. Cette dernière équation, d'inconnue x, n'a qu'une seule solution positive :

$$x = \frac{1 + \sqrt{4b-3}}{2}$$

Remarque. En fouillant un peu plus, on verrait que :

- b doit être plus grand ou égal à 1 (à défaut, l'équation n'a pas de solution) ;
- rien n'oblige b à être entier ;
- pour $b = n^2 - n + 1$ où n est un entier naturel, x est alors entier ;
- …

Solution de l'auteur :

Soit les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{4-x}$, $g : x \mapsto \sqrt{4+x}$ et $\mathrm{H} = g \circ f \circ g \circ f$.

Le domaine de définition de H est [-140 ; 4] et H([-140 ; 4]) = $\left[2\ ;\ \sqrt{4+\sqrt{2}}\right]$.

On peut donc restreindre sans perte la recherche des solutions de l'équation $\mathrm{H}(x) = x$ à l'intervalle [2 ; 3].

Sur l'intervalle [2 ; 3] H est dérivable et $\mathrm{H}' = (g' \circ f \circ g \circ f) \times (f' \circ g \circ f) \times (g' \circ f) \times f'$. Comme on a $f([2\ ;\ 3]) \subset [2\ ;\ 3]$, $g([2\ ;\ 3]) \subset [2\ ;\ 3]$, $f'([2\ ;\ 3]) \subset]0\ ;\ 1[$ et $g'([2\ ;\ 3]) \subset]0\ ;\ 1[$ on en déduit que $\mathrm{H}'([2\ ;\ 3]) \subset]0\ ;\ 1[$ et en particulier que $\mathrm{H}'(x) < 1$ sur [2 ; 3].

La fonction $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{H}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ est strictement décroissante sur [2 ; 3] car $\mathrm{H}'(x) - 1 < 0$; par ailleurs $\mathrm{H}(2) - 2 > 0$ et $\mathrm{H}(3) - 3 < 0$; il existe donc un unique réel x_0 dans l'intervalle [2 ; 3] tel que $\mathrm{H}(x_0) = x_0$ et ce réel sera l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{H}(x) = x$.

Soit $h = g \circ f$, on a $\mathrm{H} = h \circ h$. Si on trouve, sur l'intervalle [2 ; 3], une solution à l'équation $h(x) = x$, ce sera la solution x_0 de $\mathrm{H}(x) = x$ car $\mathrm{H}(x) = h(h(x)) = h(x) = x$.

Soit donc un réel x dans l'intervalle [2 ; 3] tel que $h(x) = x$, on a d'une part $f(x) = \sqrt{4-x}$ et donc $f^2(x) = 4 - x$ et d'autre part $\sqrt{4 + f(x)} = x$ et donc $x^2 = 4 + f(x)$. En retranchant membre à membre les deux expressions obtenues on a l'égalité $x^2 - f^2(x) = f(x) + x$ ou encore $(x + f(x))(x - f(x)) = x + f(x)$. Comme x et $f(x)$ sont strictement positifs alors $f(x) + x$ est aussi strictement positif. Il faut donc que $f(x) - x = -1$ ou encore que $f(x) = x - 1$. Mais on a aussi $f(x) = x^2 - 4$. La solution de $h(x) = x$ doit vérifier $x - 1 = x^2 - 4$ ou encore $x^2 - x - 3 = 0$. La solution positive est $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. On vérifie alors que cette valeur est bien solution de $h(x) = x$ sur [2 ; 3] et c'est en définitive l'unique solution de $\mathrm{H}(x) = x$.

Rallye Mathématique Poitou-Charentes

25 février 2010

Le rallye s'est déroulé comme prévu, le 25 février dernier.
Le palmarès a été envoyé par courrier électronique aux établissements participants. Le dossier habituel contenant le palmarès, les solutions, les commentaires, ainsi que les lots pour les classes primés sera envoyé par le Rectorat le 5 mai prochain.
Les épreuves et le palmarès sont sur le site de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes (http://apmep.poitiers.free.fr/).

Pour l'équipe organisatrice : Jean Fromentin