RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Des problèmes

79-1 *de Walter Mesnier (Biard)* :
Un bon athlète sait qu'il doit adapter sa vitesse à la distance parcourue. Pour une distance double, il doit réduire sa vitesse de 5%. Sachant qu'il court 10 km au rythme de 20 km/h, à quelle allure doit-il courir l'épreuve reine du 1500 m ? Quel sera alors son chrono ?
Question bis : Prouver que sur son 10 km, il y a obligatoirement une portion d'un km qu'il a parcouru en exactement 3 minutes.

79-2 *de Walter Mesnier (Biard)* :
Héron d'Alexandrie est célèbre pour sa formule donnant l'aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés. Dans sa démonstration (purement géométrique), il donne deux applications numériques : (7 ; 8 ; 9) et (13 ; 14 ; 15). L'une des deux est « amusante » car elle évite l'extraction douloureuse de racine carrée.
Question 1 : Rappeler la formule d'Héron. Quelle est l'application numérique « amusante » ?
Question 2 : Existe-t-il d'autres dimensions (entières et consécutives) pour que le calcul de l'aire du triangle par la formule de Héron soit « amusant » ? (C'est-à-dire que l'aire soit aussi un nombre entier).
Commentaire de l'auteur : Comme il y a une conférence sur Héron le jeudi 17 décembre à l'Espace Mendès France, c'est de l'actualité scientifique !

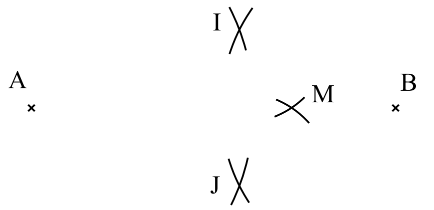
79-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Par combien de zéros se termine 2009! ?

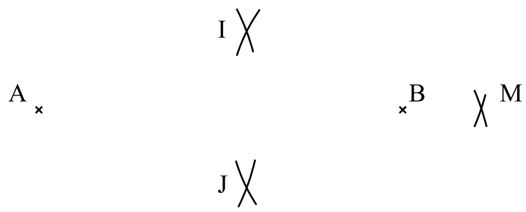
Des solutions

75-2 *de Louis Rivoallan* :
Deux points A et B sont distants d'un peu moins de 20 cm. On veut tracer la droite (AB) mais la règle dont on dispose mesure à peine 6 cm. On dispose d'un compas. Comment faire pour tracer cette droite ?

N.d.l.r. Serge Parpay revient sur cet énoncé pour apporter une solution beaucoup plus simple que celle présentée dans la précédente rubrique.

Solution de Serge Parpay :
Deux points A et B étant donnés, on peut tracer, à condition d'avoir un compas d'ouverture assez grande, un point M aligné avec A et B. On trace deux arcs de cercles de centres A et B, de rayons R et R' (éventuellement égaux), se coupant en deux points I et J. La droite (AB) est la médiatrice du segment [IJ]. Pour obtenir un point de (AB), on trace deux arcs de cercles de centres I et J et de même rayon r. Ces deux arcs se coupent en un point M situé sur (AB) (figures ci- dessous).





On peut avoir ainsi autant d'autres points de (AB) que l'on veut ; d'où le tracé possible de cette droite avec une règle de longueur inférieure à AB, ce que demande l'exercice 75-2.

75-4 *de Frédéric de Ligt* :
De combien de façons un billet de 100 € peut-il être changé en pièces et/ou billets de 1 €, 2 €, 5 €, 10 €, 20 € et 50 € ?

Solution de l'auteur :
Soit N un entier, on cherche d'abord à exprimer en fonction de N le nombre de solutions de l'équation en nombres entiers :
$N = k + 2j + 5i$. (1)
On a $N = 5q + r$ avec $r = 0, 1, 2, 3$ ou 4. Pour i compris entre 0 et q, qui sont les valeurs possibles de i, l'équation d'inconnues j et k : $N - 5i = k + 2j$ admet $\left[\dfrac{N-5i}{2}\right]+1$ couples solutions, $[x]$ désignant le plus grand entier inférieur ou égal au réel x.

Le nombre total de solutions de l'équation (1) sera donc de $\displaystyle\sum_{i=0}^{q}\left(\left[\frac{N-5i}{2}\right]+1\right)$.

On va maintenant travailler cette expression pour la rendre plus utilisable. Tout d'abord il faut remarquer que pour tout entier n on a : $\left[\dfrac{n}{2}\right]=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{(-1)^n}{4}$.

Le total précédent peut alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{3}{4}(q+1)+\sum_{i=0}^{q}\frac{\mathrm{N}-5i}{2}+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}=\frac{3}{4}(q+1)+\frac{q+1}{2}\left(\frac{\mathrm{N}+r}{2}\right)+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}=\frac{q+1}{4}(3+\mathrm{N}+r)+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}$$

$$=\frac{5q+5}{20}(3+\mathrm{N}+r)+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}=\frac{(\mathrm{N}-r+5)(\mathrm{N}+r+3)}{20}+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}=\frac{(\mathrm{N}+4)^2}{20}-\frac{(r-1)^2}{20}+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}\quad.$$

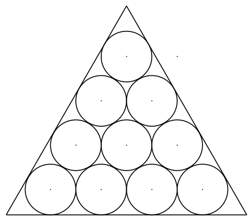
Si $r = 0$, 1, 2 ou 3 alors on a l'inégalité : $\left|\dfrac{-(r-1)^2}{20}+\displaystyle\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}\right|\le\dfrac{4}{20}+\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{2}$,

tandis que si $r = 4$ on a l'inégalité $\left|\dfrac{-(r-1)^2}{20}+\displaystyle\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}\right|\le\left|\dfrac{-9}{20}+\dfrac{1}{4}\right|<\dfrac{1}{2}$.

Puisque le nombre total de solutions est un entier alors, d'après les deux inégalités précédentes, c'est l'entier le plus proche de $(\mathrm{N}+4)^2/20$ ce que l'on peut noter $\left\|(\mathrm{N}+4)^2/20\right\|$. Ceci établi, on peut désormais aborder le problème initial. Comme on ne peut former que des montants multiples de 10 € avec les billets de 10 €, 20 € et 50 €, alors avec 1 €, 2 € et 5 € on ne peut aussi former que des montants multiples de 10 € pour atteindre 100 €. Soit n un entier compris entre 0 et 10, supposons que $10n$ € ne soient constitués qu'avec des 1 €, 2 € et 5 € et que les $(100 - 10n)$ € restants qu'avec des 10 €, 20 € et 50 €. Avec l'expression trouvée auparavant on sait qu'il y a $\left\|(10n+4)^2/20\right\|$ façons de réaliser $10n$ € avec seulement des pièces et billets de 1 €, 2 € et 5 €. D'un autre côté, puisque $100 - 10n = 10(10 - n)$, il y a autant de façons de réaliser $(100 - 10n)$ € avec des billets de 10 €, 20 € et 50 € que $(10 - n)$ € avec des pièces et billets de 1 €, 2 € et 5 €, soit $\left\|(14-n)^2/20\right\|$. Les possibilités se multipliant, pour un entier n donné entre 0 et 10, il y a donc $\left\|(10n+4)^2/20\right\|\left\|(14-n)^2/20\right\|$ façons de réaliser 100 € avec $10n$ € en 1 €, 2 € et 5 € et le reste en billets de 10 €, 20 € et 50 €. Le total recherché peut donc s'exprimer sous une forme pas trop pénible à calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{10}\left\|(10n+4)^2/20\right\|\left\|(14-n)^2/20\right\|$. Cela donne 4 562 façons de changer ce billet de 100 €.

À moins de faire un décompte manuel bien hasardeux, il n'y a guère moyen à ma connaissance d'éviter tous ces calculs et les méthodes générales sont encore plus pénibles (voir à ce sujet le livre de Louis Comtet *Analyse combinatoire,* p 119 à p 125, PUF 1970). Mais peut-être qu'un lecteur astucieux connaît un chemin moins pénible ?

76-2 *de Jacques Chayé* :
On considère des cercles de même diamètre entassés en n rangées à l'intérieur d'un triangle équilatéral (dans la figure ci-contre, $n = 4$). Soit A l'aire du triangle et A_n l'aire totale des cercles. Quelle est la limite de A_n/A quand n tend vers l'infini ?



Solution de l'auteur :
Prenons le côté du triangle comme unité de longueur. Considérons la dernière rangée constituée de n cercles de rayon r :

On a $1=2r\sqrt{3}+(n-1)2r$ donc $r=\dfrac{1}{2(\sqrt{3}+n-1)}$. Or au rang n, le nombre de cercles dans le triangle est $n\,(n + 1) / 2$.

On a : $\mathrm{A}_n=\dfrac{n(n+1)}{2}\times\pi r^2=\dfrac{\pi}{8}\dfrac{n(n+1)}{(\sqrt{3}+n-1)^2}$

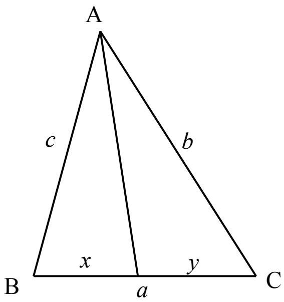
et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}}=\frac{\lim_{n\to+\infty}\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}}=\frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

77-4 *de Frédéric de Ligt* :
On dit qu'un entier non nul n est harmonieux s'il peut s'écrire comme la moyenne de n puissances de 2, non nécessairement distinctes. Quels sont les entiers harmonieux ?

Solution de Frédéric de Ligt :
On peut énoncer le problème d'une autre façon : il s'agit de montrer que tout nombre carré positif X peut s'écrire comme somme de $\sqrt{X}$ puissances de 2.
Tout nombre carré positif X est encadré par deux puissances successives de 2. On en tire que l'écriture en base 2 de X comportera un nombre de chiffres non nuls inférieur ou égal à la partie entière du logarithme en base 2 de 2X. En effet de : $2^N \le X < 2^{N+1}$ on déduit d'une part que X s'écrit en base 2 avec au maximum N + 1 chiffres et d'autre part que $N \le \log_2 X < N+1$ et donc, en ajoutant 1 aux deux premiers membres de l'inégalité, que $N+1 \le \log_2 2X$. Par ailleurs X peut s'écrire comme somme d'au maximum X puissances de 2 (alors toutes d'exposant nul). A partir de X = 36, la partie entière de $\log_2 2X$ est inférieure ou égale à $\sqrt{X}$, elle-même inférieure à X. Pour des nombres carrés X supérieurs ou égaux à 36, dans l'écriture de X en base 2, on choisit une puissance de 2 dont l'exposant n'est pas nul et on la remplace par la somme de deux puissances de 2 de rang immédiatement inférieur. Le nombre X s'écrit maintenant comme une somme de puissances de 2 mais avec un terme de plus qu'auparavant. On peut continuer ainsi, en augmentant la somme d'un terme à chaque fois, jusqu'à ce qu'elle comporte un maximum de X termes. D'après l'inégalité évoquée on passe donc obligatoirement par une somme comportant $\sqrt{X}$ termes (cela ressemble au théorème des valeurs intermédiaires en version discrète). Il ne reste plus qu'à vérifier que les 5 premiers carrés s'écrivent bien de la façon demandée, ce qui est immédiat. Finalement tous les entiers positifs sont harmonieux, mais je ne vous apprends rien.

78-3 *de Jacques Chayé* :
Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la bissectrice de l'angle compris entre ces côtés, augmenté du produit des deux segments que cette bissectrice détermine sur le troisième côté.

Solution de Serge Parpay :
Soit ABC un triangle, (AI) la bissectrice de l'angle Â, a, b et c les longueurs des côtés, AI = l, BI = x, IC = y. On a la relation $x/c = y/b$, que l'on peut écrire $x\,b = y\,c$. (1).



Dans le triangle ABI : $\boldsymbol{l}^2 = \boldsymbol{c}^2 + \boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{cx}\cos\widehat{B}$,

dans le triangle ABC : $\boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2 + \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ca}\cos\widehat{B}$,

d'où : $al^2 - xb^2 = c^2\,(a - x) - ax\,(a - x)$,

soit : $al^2 = x\,b^2 + c^2y - axy$, (2)

Compte tenu de (1) : $xb^2 + yc^2 = ycb + xbc = (x + y)\,bc = abc$. (3)

D'après (2) et (3), après simplification par a, on obtient :

$$\boldsymbol{l^2 = bc - xy}.$$

Complément :
En revenant sur la relation $x / c = y / b$, on peut écrire : $x / c = y / b = (x + y) / (c + b)$, soit avec $x + y = a$, $x = a\,c / (b + c)$ et $y = a\,b / (b + c)$, relations donnant x et y en fonction des côtés du triangle. Reportant ces valeurs dans l'égalité précédente, on en déduit : $l^2 = bc(1 - (a /(b + c))^2)$, relation donnant la longueur de la bissectrice en fonction des côtés du triangle.
p étant le demi-périmètre du triangle, $l = 2\sqrt{bcp(p-a)}\,/\,(b+c)$. Cette relation — et beaucoup d'autres concernant le triangle — se trouve dans le remarquable livre de Trajan Lalesco, « La géométrie du triangle » (Vuibert 1952, réédition : Gabay 1987).

N.d.l.r. Voici une autre solution, proche de celle proposée par l'auteur. Les notations sont celles de la solution précédente.
Solution de Bruno Alaplantive :

L'application du théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABI donne : $x^2 = c^2 + l^2 - 2cl\cos\frac{\hat{A}}{2}$ ou encore $\cos\frac{\hat{A}}{2} = \frac{c^2 + l^2 - x^2}{2cl}$.

En faisant de même dans AIC, il vient : $\cos\frac{\hat{A}}{2} = \frac{b^2 + l^2 - y^2}{2bl}$. On en tire $\frac{c^2 + l^2 - x^2}{c} = \frac{b^2 + l^2 - y^2}{b}$,

$bc^2 + bl^2 - bx^2 = cb^2 + cl^2 - cy^2$; $bc^2 - cb^2 = cl^2 - bl^2 + bx^2 - cy^2$; $bc\,(c - b) = l^2\,(c - b) + bx^2 - cy^2$ (1).
De $c / x = b / y$ on tire $cy = bx$, d'où $bx^2 - cy^2 = bx\,(x - y)$.
Si $b = c$, l'égalité proposée revient à la simple écriture du théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en I. On peut donc maintenant supposer que $x \ne y$. De $b / y = (c - b) / (x - y)$ on tire $b\,(x - y) = y(c - b)$, d'où $bx\,(x - y) = xy\,(c - b)$.
Alors (1) s'écrit $bc\,(c - b) = l^2\,(c - b) + xy\,(c - b)$ et on a bien finalement $bc = l^2 + xy$.

Errata. *Dans la rubricollage du Corol'aire 78, dans l'énoncé du problème* **78-4**, *il faut remplacer le mot « parallélogramme » par le mot « rectangle » et corriger la figure en conséquence. Par ailleurs, dans l'article de Serge Parpay* **Curiosités mathématiques** *de cette même rubrique, concernant le nombre 163, le nombre* π *a malencontreusement disparu ; il faut lire en fait* $e^{\pi\sqrt{163}}$.