Edito

Lettre au Père Noël

Cher, très cher Père Noël,

Cette année j'ai été à peu près sage et j'ai bien travaillé à l'école, donc, vu ma gentillesse, je me permets de passer une commande assez particulière.

Je voudrais tout d'abord que tu t'arranges pour que les jeunes s'intéressent davantage aux sciences (n'oublie pas les mathématiques). Parce que, nous, les profs, on rame à contre-courant et je me demande parfois si on ne recule pas. Je ne te mets pas la pression. Juste davantage. Tu pourrais leur amener par exemple une boîte de chimiste amateur, ou un microscope, ou bien des livres de découverte du monde, ou encore des jeux de réflexion ou pourquoi pas le dernier livre de notre collègue Dominique Souder (80 petites expériences de maths magiques, Dunod), ... Il va sans doute te falloir chercher un peu car ces articles sont à peu près absents des rayonnages des hypermarchés.

Si jamais il restait encore un peu de place dans ta hotte, j'aimerais bien aussi que de nombreux enseignants adhèrent cette année à l'APMEP afin qu'elle soit plus forte et mieux écoutée (surtout n'oublie pas la Régionale APMEP de Poitou-Charentes).

J'ai enfin un service à te demander. Pourrais-tu glisser dans les souliers de notre ministre les propositions de notre Association (ci-joint un exemplaire de la plaquette « Visages » 2009-2010 de l'APMEP) ?

Merci de faire de ton mieux. Je sais que tu peux y arriver.

Salutations affectueuses.

Un militant APMEP

Bonnes fêtes à tous.

Frédéric de Ligt

SOMMAIRE

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

Régionale de Poitou-Charentes

n°79

Décembre 2009

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

APMEP : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél : apmep.poitiers@free.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros) + Suppléments : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Frédéric de LIGT
Comité de rédaction …	F. de LIGT, L-M BONNEVAL N. MINET, J. FROMENTIN,
Imprimerie …………..	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Éditeur ……………….	APMEP Régionale de Poitiers
Siège social ………….	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Dépôt légal	Décembre 2009

Vie de l'association

Assemblée Générale de la Régionale - 2 décembre 2009

Une partie de l'assemblée

Le Comité de la Régionale avait décidé de tenir son Assemblée Générale à l'Espace Mendès France de Poitiers pour permettre aux participants de visiter gratuitement l'exposition « Comment tu comptes ? » en lieu et place de la conférence habituelle. Seuls les adhérents avaient été avertis ; nous avions en effet oublié de faire passer l'information par courrier électronique sur les adresses professionnelles de l'ensemble des professeurs de mathématiques de l'académie, ce qui explique certainement une assistance réduite à une vingtaine de personnes, pour la plupart membres du Comité de la Régionale. Le débat s'est très vite orienté sur la baisse du nombre d'adhérents, qui n'est cependant pas spécifique à notre académie et qui concerne aussi bien le domaine associatif que syndical. Louis-Marie Bonneval faisait remarquer qu'avec la présentation de notre Association auprès des PLC2, les conférences organisées en divers lieux de l'académie, avec le journal Corol'aire et le Rallye, il ne voyait pas ce qu'on pourrait faire de plus.

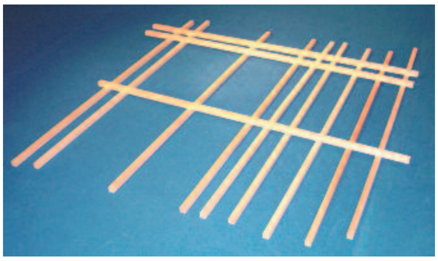
Adhérer à l'APMEP, c'est accéder à des informations professionnelles, culturelles, c'est partager ses soucis, ses satisfactions, ses expériences avec des collègues à l'occasion des réunions organisées au niveau régional, c'est aussi partager l'idéal de faire accéder le plus grand nombre aux mathématiques et de faire aimer ces mathématiques.

Vous qui lisez ces lignes, vous n'avez peut-être pas encore renouvelé votre adhésion à l'APMEP. Si c'est le cas, ne tardez pas et incitez vos collègues à nous rejoindre. Un bulletin de première adhésion est téléchargeable sur le site national de l'APMEP.

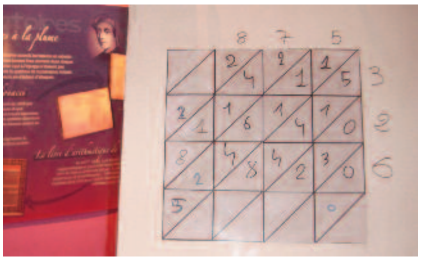
Réglettes de Genaille - Lucas

Après la présentation du rapport d'activité par notre Président Frédéric De Ligt et du rapport financier par notre trésorière Nathalie Chevalarias, les participants sont allés découvrir les 8 pôles de l'exposition, guidés par nos collègues de l'IREM et de l'APMEP qui s'étaient investis dans leur élaboration. Les bâtons de Neper, les réglettes de Genaille-Lucas, les vérifications des codes bancaires… ont livré leurs secrets. Les règles à calcul, les tables de logarithmes et de trigonométrie ont rappelé chez certains, avec parfois un peu de nostalgie, l'époque où ils étaient lycéens, étudiants ou jeunes professeurs. Cette visite leur aura donné l'occasion de faire de bonnes révisions des connaissances !

Jean Fromentin



216 x 21 ?
Facile avec des baguettes !



Et 875 x 326 ?
Allons-y « per gelosia » !

Japonais et chinois !

Anciennes numérations : *babylonienne et égyptienne*

Où est le problème ?

Ça devient sérieux !

Ça laisse rêveur !

Assemblée Générale de la Régionale - 2 décembre 2009

Rapport d'activité 2009

Adhérents

La Régionale compte 143 adhérents (en baisse de 20 par rapport à 2008).

Une information pour présenter notre association a été diffusée auprès des PLC2.

Conférences

« Géométrie ou probabilités : une même démarche de modélisation » par Louis-Marie Bonneval le 15 avril 2009 au lycée Jean Macé de Niort.

« De Fermat à Wiles : 350 ans de mathématiques » par Frédéric Testard le 10 juin 2009 au pôle sciences de l'université de la Rochelle.

Rallye mathématique Poitou-Charentes

L'épreuve du Rallye s'est déroulée le jeudi 19 février 2009. La recherche documentaire a porté sur le nombre d'or. Il y a eu environ 4500 participants. Les grèves ont perturbé les inscriptions des classes de seconde, ce qui explique qu'il n'y a eu que 11 classes inscrites. Heureusement il y a eu une forte progression des inscriptions des classes de sixièmes (71).

Corol'aire

Il a continué à paraître régulièrement : 4 numéros et 2 suppléments. Il est envoyé en version électronique aux adhérents et quelques exemplaires sont expédiés en version papier. Les économies réalisées par cette dématérialisation ont été importantes pour notre trésorerie.

Site de la Régionale

La Régionale dispose depuis le début de l'année 2009 d'un nouveau site internet grâce au travail de Louis-Marie Bonneval et de Jacques Germain. Son adresse est la suivante : http://apmep.poitiers.free.fr

Lien avec le National

Frédéric de Ligt et Sébastien Peyrot représentent la Régionale au Comité National.

De plus, plusieurs membres du comité régional participent à des commissions nationales : Premier Degré, Jeux, Histoire, BGV, Bulletin, rubrique «De ci de là» du BV, Collège.

Expocube

L'exposition a été empruntée par le collège Jules Verne d'Angoulême au mois de juin et par des écoles primaires du secteur de Montguyon au mois de février. La Régionale de Lille a dupliqué une partie de l'exposition pour la faire circuler dans son académie.

Partenariats

Avec l'IREM la collaboration est toujours étroite.

Avec les IPR les relations sont cordiales : ainsi, nos annonces sont diffusées sur le site académique et sur la liste de diffusion des professeurs de mathématiques.

Au lycée Henri IV de Poitiers, un groupe de travail s'attelle toujours au recensement, au classement et à la restauration des ouvrages scientifiques anciens possédés par cet établissement qui a fêté ses 400 ans d'existence. Leur travail est déjà bien avancé.

En collaboration avec l'Espace Mendes France et l'IREM de Poitiers, une exposition a été réalisée : « Comment tu comptes ? ». Elle est visible du 16 novembre 2009 au 4 avril 2010 à l'Espace Mendes France de Poitiers. Elle vise le public des écoles primaires et des collèges en priorité.

Bilan des Journées Nationales 2008 de La Rochelle

Le BV n° 483 (juillet - août 2009) spécial Journées de la Rochelle, supervisé par Louis-Marie Bonneval et par Jean-Paul Guichard est paru.

Le compte financier des Journées est maintenant clair. Le bénéfice s'élève à 6500 €.

Perspectives pour 2010

Adhésions

Faire remonter ou au moins stabiliser le nombre des adhérents, en baisse constante depuis plusieurs années.

Journée de la Régionale 2010

La première journée de la Régionale couplée avec l'Assemblée Générale devrait voir le jour en décembre 2010. Cette journée proposerait ateliers et conférences et serait inscrite au PAF. Ce serait aussi l'occasion de fêter le centenaire de l'APMEP en proposant des animations sur ce thème.

Conférences

Une conférence de Jean-Michel Müller sur l'algorithmique est prévue le 17 mars 2010 à l'Espace Mendes France de Poitiers.

Rallye

Il aura lieu le jeudi 25 février 2010. Le thème documentaire retenu est celui de la numération et du calcul en lien avec l'exposition « Comment tu comptes ? ».

Expocube

Elle va continuer à tourner dans les établissements.

Comités

Un comité le mercredi 27 janvier, un autre en mars et enfin un dernier en juin pour finir l'année scolaire 2009 - 2010.

Abonnement à COROL'AIRE

Ce journal de la Régionale est envoyé gratuitement par courrier électronique aux adhérents de la Régionale, aux présidents des Régionales de l'APMEP et à ceux qui souhaitent le recevoir.

Une version papier, en noir et blanc, est envoyée à ceux qui en font expressément la demande. Nous leur demandons une participation aux frais de fabrication et de port de 8 € pour quatre numéros et deux suppléments par an. Renvoyez la demande ci-dessous à l'adresse indiquée accompagnée de votre règlement par chèque à l'ordre de APMEP Régionale de Poitou-Charentes.

Réception de COROL'AIRE par courrier

Nom : .... Prénom : ....

Adresse postale : ....

....

désire recevoir Corol'aire en version papier à l'adresse ci-dessus.

Je joins un chèque de 8 € à l'ordre de APMEP, Régionale de Poitou-Charentes.

À envoyer à :

APMEP, Corol'aire
IREM - Faculté des Sciences,
40 Avenue de Recteur Pineau,
86022 Poitiers Cedex

Espace Mendès France

Inauguration de l'exposition
« Comment tu comptes ? »

Les officiels pendant les discours

Le 16 novembre dernier, de nombreuses personnalités politiques, associatives et culturelles, et d'aussi nombreux professeurs de mathématiques se sont retrouvés à l'Espace Mendès France de Poitiers pour l'inauguration de cette exposition sur le calcul. Après avoir fait le tour des huit pôles, les invités se sont dirigés vers un buffet bien garni pour écouter auparavant les différentes interventions des officiels. Notre vice-président, Nicolas Minet, en l'absence de Frédéric De Ligt, a clos les discours avec le texte de la page suivante.

Après ce moment de convivialité culinaire, c'est à une convivialité culturelle, et plus particulièrement mathématique, que nous invitait Dominique Souder, professeur de mathématiques au lycée Valin de La Rochelle, avec sa conférence : « Calculs magiques pour jeunes matheux en puissance ». Les invités à l'inauguration ont alors rejoint une assistance déjà importante dans la salle de conférence. Malgré l'heure tardive de cette conférence, on notait la présence de jeunes, écoliers et collégiens, qui ont été mis à contribution par le conférencier pour les manipulations de magie.

Une partie de la délégation APMEP - IREM

Dominique SOUDER

Le ruban de 1,50 m de la couturière (le sesquimètre) a tout de suite mis l'assemblée en appétit. Ont suivi les tours avec des calendriers, des billets de banque, des pesées, tous faisant appel aux calculs et aux propriétés numériques. Le document qu'il a écrit pour sa conférence est sur le site de la Régionale*.

Après ce que nous avons vu, qui oserait dire que Dominique Souder n'est pas un vrai magicien ? Et pourtant il nous donne les trucs de ses tours et souhaite même que le spectateur s'en empare pour étonner à son tour ses collègues, ses camarades. Ce n'est pas de la magie, c'est de la connaissance, de la réflexion. Mais le doute n'est pas permis : c'est bien de la magie de faire faire des mathématiques tout en se distrayant, d'aiguiser ainsi la curiosité sur ces propriétés mathématiques et de permettre à chacun de devenir lui-même magicien des mathématiques.

J.F.

*http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article10

Petite révision des tables de logarithmes en direction des animateurs de l'exposition.

Une brochure APMEP à l'honneur : La division à l'école élémentaire.

Des invités découvrent la technique de multiplication dite « per gelosia ».

ACTUALITÉ CULTURELLE DES MATHÉMATIQUES

« Comment tu comptes ? » à Poitiers

Saluons cette manifestation qui présente depuis le 16 novembre une image vivante et ludique des mathématiques aux jeunes comme au grand public : conférences, animations, manipulations et panneaux informatifs évoquent le calcul à travers les âges, les abaques et les bouliers, les techniques de calcul, du calcul digital à l'ère numérique.

• Espace Mendès France à Poitiers, jusqu'au 4 avril 2010. Accès payant. Ouverture au public de 14 h à 18 h. Groupes de 9 h à 17 h. Fermeture les lundis (hors vacances scolaires). Renseignements : 05-49-50-33-08 ou www.maison-des-sciences.org

On parle de l'exposition dans Le Monde Magazine

Sous l'œil du magicien, une collégienne planche sur une pyramide des nombres.

Inauguration de l'exposition *: « Comment tu comptes ? »*
Discours de Nicolas Minet au nom de l'APMEP et de l'IREM

D'accord pour faire des calculs de tête, mais pas des discours… Voici un petit papier pour évoquer devant les personnes présentes à l'inauguration de l'exposition le rôle de l'APMEP (et de l'IREM).
Je remercie l'Espace Mendès France pour la poursuite de ce partenariat permettant, tous les 3 ans depuis l'exposition « Maths 2000 », à l'APMEP et à l'IREM — les adhérents à l'un étant parfois des membres de l'autre — de préparer une exposition en rapport avec les mathématiques ; cette fois-ci, c'est un parcours qui est proposé, sur les moyens imaginés par les Hommes pour calculer, avec des contenus abordables, pour certains, dès l'école primaire.
En parcourant cette expo « Comment tu comptes ? », on pourra réaliser ce que l'enseignement cache bien souvent hélas : les mathématiques sont vivantes, ancrées dans les sociétés, car l'histoire des mathématiques fait partie intégrante de l'histoire des Hommes ; en témoignent ces quelques exemples illustrant l'intérêt de développer des moyens de calcul :
- besoins pour les États d'avoir des informations chiffrées sur leurs territoires,
- besoins commerciaux nécessitant des calculs pour convertir les monnaies, calculer les montants de taxes…
- besoins scientifiques divers pour les géomètres, pour les astronomes ; ainsi les nombres logarithmes ont été créés au début des années 1600 pour traiter efficacement les mesures faites par les instruments de navigation alors indispensables pour se repérer.

Cette exposition apporte donc, à travers 8 pôles, des réponses à la question « Comment calculer (efficacement) ? » ; on y rencontrera successivement :
-des techniques de calcul avec l'écriture des nombres qui nécessite de choisir des symboles : les chiffres, servant à coder la valeur du nombre représenté,
- des techniques de calcul avec la main (abaques, bouliers),
- des techniques de calcul avec des tables de nombres,
- puis, bien sûr, des techniques de calcul avec des machines : mécaniques, électroniques…

Et aujourd'hui ? Les enjeux du calcul se sont déplacés à l'ère du numérique avec des problématiques telles la transmission secrète de données, la compression de données ; ces techniques sont omniprésentes dans notre quotidien avec les images numériques, les baladeurs mp3… ; savoir cela n'est pas indispensable pour utiliser les objets en question mais permet de mieux comprendre le monde qui nous entoure.
Je remercie d'ailleurs le monde qui nous a entouré, à savoir responsables, techniciens, animateurs de l'EMF pour leur travail : ils ont en effet dû assimiler des documents que nous leur avons présentés, ce qui n'est pas toujours simple car les professeurs de mathématiques s'amusent d'un rien… par exemple en empilant des Shadoks pour compter en base 4 (vidéo étonnante, voir le lien *)… ou encore en présentant des algorithmes pour calculer des racines carrées.
L'exposition présentera également des techniques imaginées pour calculer sans machines mais avec les mains ou l'esprit, montrant que le calcul n'est pas nécessairement une activité mécanique et rébarbative mais qu'il peut être conduit avec intelligence, sans qu'on ait besoin d'être un calculateur prodige.
Je conclus en évoquant notre jeune calculateur prodige de l'APMEP, Dominique Souder, un adhérent magique qui proposera ce soir dans sa représentation une des entrées possibles dans le monde des maths, je veux parler de l'entrée par les jeux et la magie des nombres.

Merci de votre attention et bonne visite !

* http://pagesperso-orange.fr/jean-luc.bregeon/Page%200-20.htm

---

Rallye Mathématique Poitou-Charentes

25 février 2010

Cette année, nous avons innové en donnant la possibilité de télécharger le bulletin d'inscription et de le renvoyer par courrier électronique. Nos collègues ne s'en sont pas privés, à notre grande satisfaction, car cette procédure facilite grandement notre travail au niveau de la constitution des fichiers pour le traitement informatique.
Pour l'instant, ce sont 24 classes de seconde dans 10 lycées, 19 troisièmes, 32 quatrièmes, 40 cinquièmes et 61 sixièmes dans 26 collèges qui se sont inscrites.
Si la date limite d'inscription a été fixée au 18 décembre, il sera encore possible, durant la semaine de rentrée des vacances de Noël, de remplir et d'envoyer par courrier électronique le bulletin d'inscription oublié dans votre casier ou de compléter la liste des classes déjà inscrites, le traitement étant devenu plus rapide.
Nous nous sommes rendu compte que le courrier contenant l'épreuve d'entraînement et le bulletin d'inscription a mis parfois plus de deux semaines à vous parvenir. Nous tiendrons compte de ce délai pour envoyer les épreuves qui devraient parvenir avant les vacances de février. Un courrier électronique avertira les coordonnateurs du rallye de leur date d'envoi.
Bonne préparation de ce rallye avec la recherche documentaire sur les numérations et machines à calculer.

Pour l'équipe organisatrice : Jean Fromentin

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

RU-BRI-COLLAGES

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Des problèmes

79-1 *de Walter Mesnier (Biard)* :
Un bon athlète sait qu'il doit adapter sa vitesse à la distance parcourue. Pour une distance double, il doit réduire sa vitesse de 5%. Sachant qu'il court 10 km au rythme de 20 km/h, à quelle allure doit-il courir l'épreuve reine du 1500 m ? Quel sera alors son chrono ?
Question bis : Prouver que sur son 10 km, il y a obligatoirement une portion d'un km qu'il a parcouru en exactement 3 minutes.

79-2 *de Walter Mesnier (Biard)* :
Héron d'Alexandrie est célèbre pour sa formule donnant l'aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés. Dans sa démonstration (purement géométrique), il donne deux applications numériques : (7 ; 8 ; 9) et (13 ; 14 ; 15). L'une des deux est « amusante » car elle évite l'extraction douloureuse de racine carrée.
Question 1 : Rappeler la formule d'Héron. Quelle est l'application numérique « amusante » ?
Question 2 : Existe-t-il d'autres dimensions (entières et consécutives) pour que le calcul de l'aire du triangle par la formule de Héron soit « amusant » ? (C'est-à-dire que l'aire soit aussi un nombre entier).
Commentaire de l'auteur : Comme il y a une conférence sur Héron le jeudi 17 décembre à l'Espace Mendès France, c'est de l'actualité scientifique !

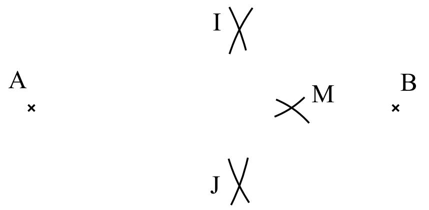
79-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Par combien de zéros se termine 2009! ?

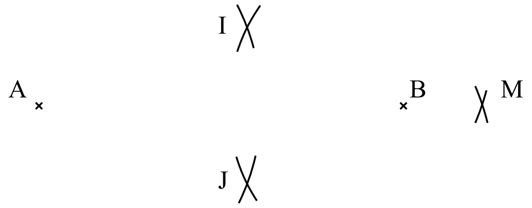
Des solutions

75-2 *de Louis Rivoallan* :
Deux points A et B sont distants d'un peu moins de 20 cm. On veut tracer la droite (AB) mais la règle dont on dispose mesure à peine 6 cm. On dispose d'un compas. Comment faire pour tracer cette droite ?

N.d.l.r. Serge Parpay revient sur cet énoncé pour apporter une solution beaucoup plus simple que celle présentée dans la précédente rubrique.

Solution de Serge Parpay :
Deux points A et B étant donnés, on peut tracer, à condition d'avoir un compas d'ouverture assez grande, un point M aligné avec A et B. On trace deux arcs de cercles de centres A et B, de rayons R et R' (éventuellement égaux), se coupant en deux points I et J. La droite (AB) est la médiatrice du segment [IJ]. Pour obtenir un point de (AB), on trace deux arcs de cercles de centres I et J et de même rayon r. Ces deux arcs se coupent en un point M situé sur (AB) (figures ci- dessous).





On peut avoir ainsi autant d'autres points de (AB) que l'on veut ; d'où le tracé possible de cette droite avec une règle de longueur inférieure à AB, ce que demande l'exercice 75-2.

75-4 *de Frédéric de Ligt* :
De combien de façons un billet de 100 € peut-il être changé en pièces et/ou billets de 1 €, 2 €, 5 €, 10 €, 20 € et 50 € ?

Solution de l'auteur :
Soit N un entier, on cherche d'abord à exprimer en fonction de N le nombre de solutions de l'équation en nombres entiers :
$N = k + 2j + 5i$. (1)
On a $N = 5q + r$ avec $r = 0, 1, 2, 3$ ou 4. Pour i compris entre 0 et q, qui sont les valeurs possibles de i, l'équation d'inconnues j et k : $N - 5i = k + 2j$ admet $\left[\dfrac{N-5i}{2}\right]+1$ couples solutions, $[x]$ désignant le plus grand entier inférieur ou égal au réel x.

Le nombre total de solutions de l'équation (1) sera donc de $\displaystyle\sum_{i=0}^{q}\left(\left[\frac{N-5i}{2}\right]+1\right)$.

On va maintenant travailler cette expression pour la rendre plus utilisable. Tout d'abord il faut remarquer que pour tout entier n on a : $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^n}{4}$.

Le total précédent peut alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{3}{4}(q+1)+\sum_{i=0}^{q}\frac{\mathrm{N}-5i}{2}+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}=\frac{3}{4}(q+1)+\frac{q+1}{2}\left(\frac{\mathrm{N}+r}{2}\right)+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}=\frac{q+1}{4}(3+\mathrm{N}+r)+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}$$

$$=\frac{5q+5}{20}(3+\mathrm{N}+r)+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}=\frac{(\mathrm{N}-r+5)(\mathrm{N}+r+3)}{20}+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}=\frac{(\mathrm{N}+4)^2}{20}-\frac{(r-1)^2}{20}+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}\ .$$

Si $r = 0$, 1, 2 ou 3 alors on a l'inégalité : $\left|\frac{-(r-1)^2}{20}+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}\right|\leq\frac{4}{20}+\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$,

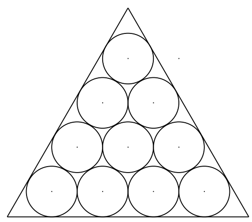
tandis que si $r = 4$ on a l'inégalité $\left|\frac{-(r-1)^2}{20}+\sum_{i=0}^{q}\frac{(-1)^{\mathrm{N}-5i}}{4}\right|\leq\left|\frac{-9}{20}+\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{2}$.

Puisque le nombre total de solutions est un entier alors, d'après les deux inégalités précédentes, c'est l'entier le plus proche de $(\mathrm{N}+4)^2/20$ ce que l'on peut noter $\left\|(\mathrm{N}+4)^2/20\right\|$. Ceci établi, on peut désormais aborder le problème initial. Comme on ne peut former que des montants multiples de 10 € avec les billets de 10 €, 20 € et 50 €, alors avec 1 €, 2 € et 5 € on ne peut aussi former que des montants multiples de 10 € pour atteindre 100 €. Soit n un entier compris entre 0 et 10, supposons que $10n$ € ne soient constitués qu'avec des 1 €, 2 € et 5 € et que les $(100 - 10n)$ € restants qu'avec des 10 €, 20 € et 50 €. Avec l'expression trouvée auparavant on sait qu'il y a $\left\|(10n+4)^2/20\right\|$ façons de réaliser $10n$ € avec seulement des pièces et billets de 1 €, 2 € et 5 €. D'un autre côté, puisque $100 - 10n = 10(10 - n)$, il y a autant de façons de réaliser $(100 - 10n)$ € avec des billets de 10 €, 20 € et 50 € que $(10 - n)$ € avec des pièces et billets de 1 €, 2 € et 5 €, soit $\left\|(14-n)^2/20\right\|$. Les possibilités se multipliant, pour un entier n donné entre 0 et 10, il y a donc $\left\|(10n+4)^2/20\right\|\left\|(14-n)^2/20\right\|$ façons de réaliser 100 € avec $10n$ € en 1 €, 2 € et 5 € et le reste en billets de 10 €, 20 € et 50 €. Le total recherché peut donc s'exprimer sous une forme pas trop pénible à calculer : $\sum_{n=0}^{10}\left\|(10n+4)^2/20\right\|\left\|(14-n)^2/20\right\|$. Cela donne 4 562 façons de changer ce billet de 100 €.

À moins de faire un décompte manuel bien hasardeux, il n'y a guère moyen à ma connaissance d'éviter tous ces calculs et les méthodes générales sont encore plus pénibles (voir à ce sujet le livre de Louis Comtet *Analyse combinatoire,* p 119 à p 125, PUF 1970). Mais peut-être qu'un lecteur astucieux connaît un chemin moins pénible ?

76-2 *de Jacques Chayé* :

On considère des cercles de même diamètre entassés en n rangées à l'intérieur d'un triangle équilatéral (dans la figure ci-contre, $n = 4$). Soit A l'aire du triangle et A_n l'aire totale des cercles. Quelle est la limite de A_n/A quand n tend vers l'infini ?



Solution de l'auteur :

Prenons le côté du triangle comme unité de longueur. Considérons la dernière rangée constituée de n cercles de rayon r :

On a $1=2r\sqrt{3}+(n-1)2r$ donc $r=\frac{1}{2(\sqrt{3}+n-1)}$. Or au rang n, le nombre de cercles dans le triangle est $n\,(n + 1) / 2$.

On a : $\mathrm{A}_n=\frac{n(n+1)}{2}\times\pi r^2=\frac{\pi}{8}\frac{n(n+1)}{(\sqrt{3}+n-1)^2}$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}}=\frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

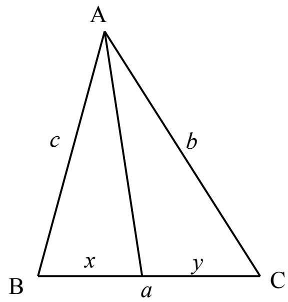
77-4 *de Frédéric de Ligt* :

On dit qu'un entier non nul n est harmonieux s'il peut s'écrire comme la moyenne de n puissances de 2, non nécessairement distinctes. Quels sont les entiers harmonieux ?

Solution de Frédéric de Ligt :
On peut énoncer le problème d'une autre façon : il s'agit de montrer que tout nombre carré positif X peut s'écrire comme somme de $\sqrt{X}$ puissances de 2.
Tout nombre carré positif X est encadré par deux puissances successives de 2. On en tire que l'écriture en base 2 de X comportera un nombre de chiffres non nuls inférieur ou égal à la partie entière du logarithme en base 2 de 2X. En effet de : $2^N \leq X < 2^{N+1}$ on déduit d'une part que X s'écrit en base 2 avec au maximum N + 1 chiffres et d'autre part que $N \leq \log_2 X < N+1$ et donc, en ajoutant 1 aux deux premiers membres de l'inégalité, que $N+1 \leq \log_2 2X$. Par ailleurs X peut s'écrire comme somme d'au maximum X puissances de 2 (alors toutes d'exposant nul). A partir de X = 36, la partie entière de $\log_2 2X$ est inférieure ou égale à $\sqrt{X}$, elle-même inférieure à X. Pour des nombres carrés X supérieurs ou égaux à 36, dans l'écriture de X en base 2, on choisit une puissance de 2 dont l'exposant n'est pas nul et on la remplace par la somme de deux puissances de 2 de rang immédiatement inférieur. Le nombre X s'écrit maintenant comme une somme de puissances de 2 mais avec un terme de plus qu'auparavant. On peut continuer ainsi, en augmentant la somme d'un terme à chaque fois, jusqu'à ce qu'elle comporte un maximum de X termes. D'après l'inégalité évoquée on passe donc obligatoirement par une somme comportant $\sqrt{X}$ termes (cela ressemble au théorème des valeurs intermédiaires en version discrète). Il ne reste plus qu'à vérifier que les 5 premiers carrés s'écrivent bien de la façon demandée, ce qui est immédiat. Finalement tous les entiers positifs sont harmonieux, mais je ne vous apprends rien.

78-3 *de Jacques Chayé* :
Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la bissectrice de l'angle compris entre ces côtés, augmenté du produit des deux segments que cette bissectrice détermine sur le troisième côté.

Solution de Serge Parpay :
Soit ABC un triangle, (AI) la bissectrice de l'angle Â, a, b et c les longueurs des côtés, AI = l, BI = x, IC = y. On a la relation $x/c = y/b$, que l'on peut écrire $x\,b = y\,c$. (1).



Dans le triangle ABI : $\boldsymbol{l^2 = c^2 + x^2 - 2cx}\cos\widehat{\mathrm{B}}$,

dans le triangle ABC : $\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca}\cos\widehat{\mathrm{B}}$,

d'où : $al^2 - xb^2 = c^2\,(a - x) - ax\,(a - x)$,

soit : $al^2 = x\,b^2 + c^2y - axy$, (2)

Compte tenu de (1) : $xb^2 + yc^2 = ycb + xbc = (x + y)\,bc = abc$. (3)

D'après (2) et (3), après simplification par a, on obtient :

$$\boldsymbol{l^2 = bc - xy.}$$

Complément :
En revenant sur la relation $x / c = y / b$, on peut écrire : $x / c = y / b = (x + y) / (c + b)$, soit avec $x + y = a$, $x = a\,c / (b + c)$ et $y = a\,b / (b + c)$, relations donnant x et y en fonction des côtés du triangle. Reportant ces valeurs dans l'égalité précédente, on en déduit : $l^2 = bc(1 - (a /(b + c))^2)$, relation donnant la longueur de la bissectrice en fonction des côtés du triangle.
p étant le demi-périmètre du triangle, $l = 2\sqrt{bcp(p-a)}\,/\,(b+c)$. Cette relation — et beaucoup d'autres concernant le triangle — se trouve dans le remarquable livre de Trajan Lalesco, « La géométrie du triangle » (Vuibert 1952, réédition : Gabay 1987).

N.d.l.r. Voici une autre solution, proche de celle proposée par l'auteur. Les notations sont celles de la solution précédente.
Solution de Bruno Alaplantive :

L'application du théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABI donne : $x^2 = c^2 + l^2 - 2cl\cos\frac{\hat{A}}{2}$ ou encore $\cos\frac{\hat{A}}{2} = \frac{c^2 + l^2 - x^2}{2cl}$.

En faisant de même dans AIC, il vient : $\cos\frac{\hat{A}}{2} = \frac{b^2 + l^2 - y^2}{2bl}$. On en tire $\frac{c^2 + l^2 - x^2}{c} = \frac{b^2 + l^2 - y^2}{b}$,

$bc^2 + bl^2 - bx^2 = cb^2 + cl^2 - cy^2$; $bc^2 - cb^2 = cl^2 - bl^2 + bx^2 - cy^2$; $bc\,(c - b) = l^2\,(c - b) + bx^2 - cy^2$ (1).
De $c / x = b / y$ on tire $cy = bx$, d'où $bx^2 - cy^2 = bx\,(x - y)$.
Si $b = c$, l'égalité proposée revient à la simple écriture du théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en I. On peut donc maintenant supposer que $x \neq y$. De $b / y = (c - b) / (x - y)$ on tire $b\,(x - y) = y(c - b)$, d'où $bx\,(x - y) = xy\,(c - b)$.
Alors (1) s'écrit $bc\,(c - b) = l^2\,(c - b) + xy\,(c - b)$ et on a bien finalement $bc = l^2 + xy$.

Errata. *Dans la rubricollage du Corol'aire 78, dans l'énoncé du problème* **78-4**, *il faut remplacer le mot « parallélogramme » par le mot « rectangle » et corriger la figure en conséquence. Par ailleurs, dans l'article de Serge Parpay* **Curiosités mathématiques** *de cette même rubrique, concernant le nombre 163, le nombre* π *a malencontreusement disparu ; il faut lire en fait* $e^{\pi\sqrt{163}}$.