Edito

Que fait votre Régionale ?

À l'heure où commence la campagne d'adhésion à l'APMEP, il n'est peut-être pas inutile de rappeler notre action.
Adhérer à l'APMEP, c'est partager, en grande partie ou complètement, les orientations inscrites dans la plaquette *Visages*. Ces orientations sont fixées démocratiquement à l'issue de votes du Comité National dont les représentants sont élus par les adhérents. Elles sont ensuite défendues auprès des responsables du Ministère de l'Éducation dont la qualité d'écoute est d'autant meilleure que l'association est représentative de la profession.
C'est aussi se tenir informé sur son métier en recevant régulièrement le Bulletin Vert et le BGV (Bulletin Grande Vitesse).
Voilà déjà deux bonnes raisons pour remplir son bulletin d'adhésion. Je voudrais en ajouter une troisième qui me paraît aussi très importante. Chaque académie possède sa Régionale, association liée aux instances nationales mais qui a cependant son autonomie propre. Son rôle ne se réduit pas à relayer les prises de positions nationales et à diffuser les brochures éditées par l'Association. Son activité de terrain, qu'il faut faire connaître et soutenir (par une adhésion par exemple), est concrète et, il me semble, utile à tous.
- Le Rallye Mathématique Poitou-Charentes qui concerne près de 5 000 élèves, soutenu par l'IREM de Poitiers et l'Inspection Pédagogique Régionale, est le fruit du travail bénévole d'une de ses équipes.
- La mise à disposition pour tous les établissements du matériel pédagogique d'Expocube (sur le thème du cube comme son nom l'indique !).
- La conception d'expositions en partenariat avec l'Espace Mendès France et l'IREM de Poitiers (la prochaine, intitulée « Comment tu comptes ? », sera bientôt visible, voir page 3 de ce numéro).
- L'organisation de plusieurs conférences dans l'année, dans différents établissements de la région, avec des intervenants issus très souvent du monde universitaire, mais pas toujours, qui viennent nous apporter leurs connaissances et leurs réflexions.
- Pour enrichir encore l'offre à disposition des enseignants, nous réfléchissons à l'organisation d'une Journée de la Régionale avec conférence, ateliers, débat et bien sûr repas convivial. Une occasion de se rencontrer et d'échanger, et ces occasions ne sont pas si nombreuses.

Vous aurez compris mon message : adhérer, c'est soutenir l'APMEP mais c'est aussi soutenir votre Régionale.

Bonne année scolaire à tous et bon courage (il va en falloir avec tous ces changements).

Frédéric de Ligt

SOMMAIRE

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

79 86 17 16

Régionale de Poitou-Charentes

n°78

Octobre 2009

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

APMEP : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél : apmep.poitiers@free.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros) + Suppléments : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Frédéric de LIGT
Comité de rédaction …	F. de LIGT, N. MINET, J. FROMENTIN
Imprimerie …………..	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Éditeur ……………….	APMEP Régionale de Poitiers
Siège social ………….	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Dépôt légal	Octobre 2009

Vie de l'association

Comité de la Régionale du mercredi 23 septembre 2009

L'exposition « Comment tu comptes ? » à l'Espace Mendès France (EMF)
L'inauguration de l'exposition aura lieu en même temps que la fête de la science. Dominique Souder ouvrira l'exposition par une conférence intitulée : « *Calculs magiques pour jeune matheux en puissance*… ». Notre travail préparatoire est presque achevé. L'EMF va maintenant mettre en panneau tous les documents que l'IREM et la Régionale lui ont fournis. Il va nous rester un document pédagogique à réaliser qui accompagnera l'enseignant en visite avec sa classe. Une réunion le 21 octobre prochain à 18 h 30 est prévue à l'EMF pour faire le point. Nous allons proposer, pour nourrir l'exposition, l'intervention au mois de mars d'un conférencier. Les documents élaborés à l'occasion de la préparation de l'exposition seront disponibles en ligne sur le site de la Régionale.

Collèges, lycées : les nouveautés de la rentrée
La mise en place du socle au collège est laborieuse, les documents fournis par le ministère manquent de précision et chacun bricole dans son coin. De plus sa validation, dès cette année, au niveau de la classe de troisième est précipitée et n'est pas en cohérence avec la grille fournie par le ministère qui suppose une validation sur l'ensemble des capacités exigibles du collège. Quant au nouveau programme de seconde, les documents d'accompagnement sont pauvres, les enjeux n'y sont pas bien visibles, et les manuels des élèves ne sont pas vraiment exploitables.

Déménagement de l'IREM
L'IREM pourrait encore avoir à déménager, cette fois sur le site du Futuroscope, dans le bâtiment de mathématiques, probablement au mois de janvier. La Régionale est directement concernée, puisque c'est l'IREM de Poitiers qui est notre siège social et qui héberge nos stocks de brochures.

Brochures
Le manque de disponibilité des volontaires n'a pas permis de tenir la réunion prévue le mercredi 23 au matin afin d'améliorer la gestion des brochures. Ce n'est que partie remise. Il faut rappeler que les brochures de l'APMEP peuvent être commandées à la Régionale au même tarif qu'au National. Les retirer directement à l'IREM dispense des frais de port.

Bilan financier des Journées de La Rochelle
Ce bilan est maintenant clair puisque toutes les factures sont réglées. Il reste un bénéfice d'environ 6500 €.

Adhésion et informations aux PLC2
Nicolas Minet, Nathalie Chevalarias et Jacques Germain se proposent de présenter aux PLC2 notre Association.

Journée de la Régionale
Un appel est lancé pour constituer un groupe afin de réflechir à l'organisation et au contenu d'une Journée de la Régionale (rencontres via conférence, ateliers, repas convivial,..)
La première de ces Journées se déroulerait fin 2010 et pourrait être couplée avec des actions fêtant le centenaire de notre Association.
L'Assemblée Générale de la Régionale serait placée en fin de journée, permettant aux participants qui le souhaitent de prolonger les échanges.
Le Comité demandera à l'Inspection Régionale s'il est possible d'inscrire cette Journée au PAF de façon que les personnes intéressées puissent bénéficier d'un ordre de mission sans frais.
Pour participer au groupe de réflexion, n'hésitez pas !
Contactez nicolas.minet@ac-poitiers.fr

Rallye
L'épreuve finale du rallye se déroulera cette année le 25 février et le thème retenu pour la recherche documentaire (Internet et CDI) est celui du calcul, en liaison avec l'exposition de l'EMF.

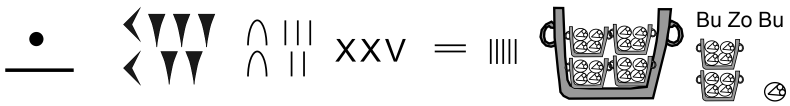
Corol'aire
De nouveaux adhérents ne savent pas qu'ils peuvent recevoir le Corol'aire et n'ont pas communiqué leur adresse électronique au Comité. Frédéric de Ligt va s'occuper de retrouver ces coordonnées dans les fichiers nationaux si elles ont été données dans le bulletin d'adhésion.

Calendrier
Assemblée générale prévue le 2 décembre à l'EMF afin de présenter l'exposition, dont notre association est partenaire, aux collègues présents. Lors des Journées de Rouen, la plage prévue pour les Régionales est le dimanche après-midi de 16 h à 17 h 30.
Des conférenciers sont à trouver pour animer en mars l'exposition à l'EMF. Plusieurs membres du comité se proposent de prendre des contact.

Rallye Mathématique Poitou-Charentes — 25 février 2010

RM P-C

Le Rallye Mathématique de Poitou-Charentes aura lieu le jeudi 25 février 2010. Après le nombre π et le nombre d'or, la recherche documentaire portera sur les numérations et le calcul dans différentes civilisations. Ce thème a été retenu en liaison avec l'exposition « **Comment tu comptes ?** » réalisée par l'Espace Mendès France de Poitiers, la Régionale APMEP et l'IREM de Poitiers (voir les articles concernant cette exposition dans ce même numéro). La visite de cette exposition par les classes serait un complément éminemment instructif pour les élèves.
Tous les collèges et lycées recevront début décembre l'épreuve d'entraînement qui indiquera, pour chaque niveau, les numérations à étudier, les consignes et les travaux préparatoires.
La date limite d'inscription est fixée au 18 décembre 2009. Un bulletin d'inscription sera disponible sur le site de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes.



Ce rallye donne une occasion supplémentaire d'aborder les mathématiques sous des angles historique et ludique. Ne ratez pas cette opportunité !

L'équipe organisatrice

Bientôt à l'Espace Mendès France

Comment tu comptes ?

Sur des tablettes d'argile ? Avec un boulier, un abaque ? Avec des chiffres, des hiéroglyphes, des lettres ? Des baguettes chinoises, une plume, des tables (multiplication, trigonométrie, logarithmes) ? En base deux ou en base dix ? Avec les doigts, avec la tête, avec une rapidité prodigieuse ou magique, avec des machines (mécaniques, électroniques, cybernétiques) ou encore avec des graphiques… ?
Voici quelques-unes des réponses que tentera d'apporter l'exposition « *Comment tu comptes ?* » du 16 novembre 2009 au 4 avril 2010 à l'Espace Mendès France de Poitiers. Elle sera inaugurée le lundi 16/11 à 20h30 par une conférence spectacle du malicieux Dominique Souder (du Lycée Valin de La Rochelle) intitulée « *Calculs magiques pour jeune matheux en puissance…* ». Réalisée en partenariat avec la Régionale APMEP de Poitou-Charentes et l'IREM de Poitiers, cette exposition propose un dense parcours en huit pôles (revisitant le calcul et son histoire), illustrée par des panneaux explicatifs, des objets originaux, des jeux ou des activités interactives, et détaillée activement par les animateurs enthousiastes de l'Espace Mendès France.
Depuis le printemps dernier, une équipe, constituée principalement de divers membres actifs de l'APMEP et de l'IREM, s'est amusée à collecter de véritables pièces de musée (gravures, livres anciens, calculatrices « antiques », balances, vidéos cultes…) en vue de cette exposition. Toutes ne seront hélas pas visibles car il y en a un nombre incalculable (un comble !).
Un livret pédagogique est aussi en cours de réalisation pour permettre aux professeurs qui viendront avec leurs élèves (du cycle 3 jusqu'à la Terminale) de leur donner toutes les précisions nécessaires.

Horaires
Individuels : visite accompagnée tous les jours d'ouverture de 14h à 18h (sauf les lundis en période scolaire).
Groupes : du mardi au vendredi de 9h à 17h30, les samedis et dimanches de 14h à 17h30.
Hors période scolaire, les visites sont aussi possibles les lundis après midi.
Un service éducatif est à la disposition des enseignants.
Tarifs
5 € (adhérents 2,5 €). Tarifs spéciaux pour les groupes. Conférences gratuites.
Information et réservation
Tél : 05 49 50 33 08

Walter Mesnier

Conférences de l'Espace Mendès France

16 novembre (20 h 30 à l'EMF)

« Calculs magiques pour jeunes matheux en puissance »

par **Dominque Souder** professeur de mathématiques au lycée Valin à la Rochelle, secrétaire de la Fédération Française des Jeux Mathématiques.

18 novembre (18 h 30 au Campus, Bâtiment Delta)

« Les mathématiques pour quoi faire ? »

par **Élise Janvresse**, maître de conférences à l'université de Rouen.

3 décembre (18 h 30 à l'EMF)

« Le traité de perspective de Pierro Della Francesca »

par **Jean-Pierre Le Goff**, professeur de mathématiques à l'IUFM et à l'IREM de Basse-Normandie (UCBN).

17 décembre (18 h 30 à l'EMF)

« Héron d'Alexandrie : un ingénieur mathématicien de l'Antiquité et ses automates »

par **Jean-Yves Guillaumin**, professeur de langue et littérature latines à l'université de Franche-Comté (Besançon).

Vie de l'IREM

Le séminaire de rentrée

La rentrée de l'IREM s'est faite par un séminaire de deux jours, les 18 et 19 septembre.

La première journée s'est déroulée au bâtiment de mathématiques du Futuroscope, ce qui a permis de présenter l'IREM aux collègues du laboratoire de mathématiques de Poitiers en retraçant son histoire, ses missions, ses travaux actuels, son mode de fonctionnement, sa spécificité...
Nous avons rencontré les IPR (Mme Duranthon et Mr Nizard) et Mme Bigot, de l'IUFM, qui prend la suite de Claude Robin, pour l'organisation des stages de formation continue.
Lors de cette première journée, Jean-Claude Thiénard a fait un exposé sur Hilbert, le formalisme, la décidabilité ; cet exposé a bien mis en évidence les raisons qui ont amené les mathématiciens du $20^{\text{ème}}$ siècle à construire des systèmes formels, leurs intérêts et leurs limites. Le lieu choisi a permis à certains collègues du laboratoire de mathématiques de participer à cet exposé.
Jean-Claude Thiénard nous a fait parcourir toute l'histoire passionnante de la question : géométries non euclidiennes, paradoxes de la théorie des ensembles de Cantor, débats sur le principe du tiers exclus (Zermelo et les intuitionnistes), travaux de Hilbert sur l'axiomatisation de la géométrie (le principe de non contradiction, l'indépendance des axiomes...) et sur la consistance de l'arithmétique, la fin des illusions avec le théorème de Gödel sur l'existence d'énoncés indécidables, pour terminer avec la machine de Turing qui fonctionne à l'intérieur de la théories des modèles, mais qui a débouché sur la conception et la fabrication de nos ordinateurs.

La journée du samedi s'est déroulée dans les locaux de l'IREM avec un travail des groupes sur leurs recherches en cours et un atelier en salle informatique animé par Marc Grillet sur l'utilisation des dernières potentialités de Geogebra, avec des TP sur les algorithmes.

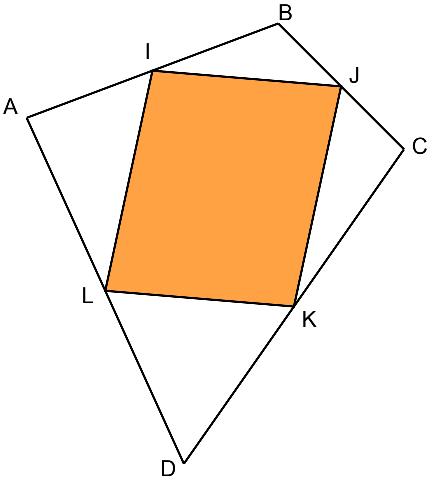
La poursuite de nos recherches
Comme signalé dans le Corol'aire de juillet, les équipes collège et lycée ont mis la priorité sur la publication de leurs travaux sur les programmes de $6^{\text{ème}}$ et de 2^{nde}. Après les articles déjà parus dans « Repères IREM » 76 de juillet dernier* et dans « Petit x » n° 79, ils s'engagent dans un travail de rédaction d'articles et de brochures contenant analyses et documents pour la classe en vue de recentrer l'enseignement sur des questions fondamentales autour desquelles se sont construites et vivent les mathématiques.

* L'article de Jean-Paul Guichard sur les volumes en classe de $6^{\text{ème}}$ est consultable en ligne sur :
http://www.univ-irem.fr/spip.php?article=71&id_numero=76

Jean Souville

Défi collège

ABCD est un quadrilatère convexe ; I, J, K et L sont les milieux des côtés de ABCD.
Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?
Que représente l'aire de IJKL par rapport à celle de ABCD ?



Perles dans nos copies

Voici une perle que je viens de relever à l'occasion d'un devoir où je demandais comment trouver la médiane d'une série statistique discrète selon le cas où l'effectif est pair ou impair .
Je ne mets que pour le cas impair, le cas pair ayant été traité de manière moins « appétissante »...

« La médiane pour un nombre impair de valeurs :
- Ajoutez 1 à ce nombre impair
- Divisez le par 2
- Ce nouveau nombre est la position dans la série cumulée croissante
- Trouvez sa valeur
- Vous avez votre médiane ! »
Il ne reste plus qu'à ajouter: C'est prêt, servez et savourez !!!

Samuel Dussubieux

RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Curiosités mathématiques, l'Oulipo et exercices de Serge Parpay.

Curiosités mathématiques. Les nombres remarquables écrit par François Le Lionnais (Hermann, Éditeur - 1983).

« En parlant de ma collecte [de nombres], il m'arrivait de dire : 'Tous les nombres sont remarquables, mais peu ont été remarqués'. En fait, j'en ai retenu 446 qui se disputent 700 propriétés. »

Pour l'anecdote, en reprenant sous une forme particulière un paradoxe classique, on peut se poser la question : quel est le plus petit entier non remarquable du livre ? F. Le Lionnais donne une propriété pour le nombre 38 et une propriété pour le nombre 40. Alors, 39 serait le premier nombre sans propriété ? C'est remarquable, et ce nombre non remarquable serait remarquable ! Bien … ? 39 est dans le livre, et nous lisons : « *39 : le plus petit entier pour lequel nous ne connaissons aucune propriété. Le fait d'être le plus petit ne sera pas considéré comme une propriété remarquable afin d'éviter une récurrence redoutable dans la suite de la collection* ».

On peut trouver dans ce livre beaucoup d'idées d'exercices, particulièrement en arithmétique, mais aussi un tas de propriétés dont certaines dépassent l'entendement d'un humble professeur de mon acabit, mais enfin ! Citons quelques exemples :

4 - 4 est l'un des deux carrés de la forme $n^3 - 4$. L'autre est 121. Ils ont été déterminés par Fermat…

- Théorème de Villarceau : par tout point d'un tore, il passe quatre cercles : un méridien, un parallèle et l'intersection du tore avec le plan bitangent passant par ce point…

Ceux d'entre vous qui étaient aux Journées de La Rochelle ont eu dans leur valisette le spectaculaire DVD d'Etienne Ghys, Jos Leys et Aurélien Alvarez ; on peut y retrouver les cercles de Villarceau dans le chapitre 7-8 (Fibration). Voir aussi PLOT n°25, article de Louis-Marie Bonneval : 'Coup de cœur pour un DVD. Dimensions'.

11 : Le plus petit *rep-unit*. Les *rep-units* sont des nombres premiers composés de n chiffres « 1 » écrits consécutivement. 11 correspond au cas n = 2. On en connaît quatre autres correspondant respectivement à n = 19, 23, 137, 1031. On ignore s'il en existe une infinité.

13 bis : « 13 bis est-ce un nombre pair ou impair ? ». Raymond Queneau (1968).

François Le Lionnais glisse ce nombre facétieux parmi les autres. Rien d'étonnant : il était, comme Raymond Queneau, membre fondateur de l'Oulipo (voir ci-après).

65 : - La plus petite valeur de l'hypoténuse d'un triangle pythagoricien admettant deux solutions : $65^2 = 63^2 + 16^2 = 56^2 + 33^2$.

- Le seul nombre de deux chiffres, en numération décimale, tel que la différence entre son carré et celui de son symétrique est égale à un carré : $65^2 - 56^2 = 33^2$. Il n'existe pas de situation analogue pour les nombres de trois chiffres.

145 : Le plus petit des deux entiers (différents de 1) qui sont somme des factorielles de leurs chiffres (en système décimal). L'autres est 40585.

163 : - $e^{\sqrt{163}}$ est un entier à 10^{-12} près.

- $(\ln(640320^3 + 744)/\pi)^2 \approx 163 + 2{,}32 \cdot 10^{-33}$. C'est certainement l'approximation la plus étonnante d'un entier dans l'univers. (J.J.Gould, π, μ, ε, 1972).

729 : - 9^3.

- Tous les nombres de la suite $a_0 = 729$, $a_1 = 71289$, $a_2 = 7112889$, …, $a_k = 7\underbrace{1...1}_{k}2\underbrace{8...8}_{k}9$ sont des carrés parfaits.

(V. Thébault, *Les récréations mathématiques* ; Gembloux, Declot, 1943)

1031 : Le nombre formé de mille trente et un chiffres « 1 » est premier. C'est le plus grand *rep-unit* connu. Voir **11**.

L'oulipo

François Le Lionnais était, avec Raymond Queneau, l'un des membres fondateurs de l'**Ou**vroir de **Li**ttérature **Po**tentielle. Vient de paraître aux éditions Gallimard une « Anthologie de l'Oulipo », un livre évidemment destiné aux amateurs du genre. Deux extraits de ce livre :

- La Joconde

Le point de vue du mathématicien booléen : Soit grand B l'ensemble formé des femmes brunes portant un filet de soie noire sur la tête, soit grand I l'ensemble des personnes douées d'un sourire indéfinissable, soit grand P l'ensemble des tableaux d'un peintre donné p. Montrer que si l'intersection de grand I, grand B et grand P est la Joconde… alors p est Léonard de Vinci.

Le point de vue du trader : La Joconde, après avoir connu un excellent début à Sotheby's, a soudain plongé à l'annonce des résultats de Christie's, et a fini à moins 15 €. Bonne tenue en revanche de la *Cène* et de la *Vierge aux rochers*. Enfin, le *Baptême du Christ* s'est un peu effrité en fin de séance et les opérateurs ont dû se reporter sur le *Saint Jean-Baptiste*, qui a fini sur une hausse de 3 €. (Hervé Le Tellier).

- Petit poème :

Il donne le tournis, ce diable de π,
Demi-rapport du tour au rayon, sans répit,
Oh, qu'a π ?
(Jacques Roubaud, Olivier Salon).

Exercices

D'après le livre « Les nombres remarquables », François Le Lionnais (Hermann, Editeur - 1983).

- Trouver tous les nombres entiers n tel que $n^3 - 4$ soit un carré parfait.
- Démontrer l'existence des cercles de Villarceau.
- Trouver un nombre de deux chiffres, en numération décimale, tel que la différence entre son carré et celui de son symétrique soit égale à un carré.
- Décomposer le nombre 45 en une somme de factorielles de nombres tous différents. Même chose pour 40585.
- Calculer une valeur numérique approchée de $e^{\sqrt{163}}$.
- Calculer une valeur numérique approchée de $(\ln(640320^3 + 744) / \pi)^2$.
- Déterminer a et b tels que a ! b ! = 10 !.
- Déterminer a, b et c tels que a ! b ! c ! = 10 !.
- Déterminer a, b et c tels que a ! b ! c ! = 16 !.
- Montrer que l'on peut décomposer 9 ! en un produit de quatre factorielles (non toutes différentes).

2) Des nombres 'rétifs'. Dans le dernier Corol'aire, Frédéric de Ligt parle des entiers harmonieux (entiers non nuls *n* pouvant s'écrire comme moyenne de *n* puissances de 2, non nécessairement distinctes). Mais il y a beaucoup d'entiers 'rétifs' ne pouvant s'écrire comme moyenne de puissances de 2 **distinctes**, par exemple 13. Expliquez pourquoi.

Des problèmes

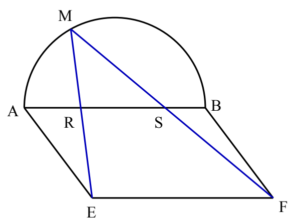
78-1 *transmis par Louis Rivoallan (Rochefort) d'après un problème paru dans « Le monde »* :
Un hexagone ABCDEF convexe est tel que les triangles ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB ont tous la même aire. Quelle particularité géométrique a cet hexagone ?

78-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Résoudre dans **R** l'équation : $\sqrt{4+\sqrt{4-\sqrt{4+\sqrt{4-x}}}} = x$

78-3 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :
Exercice n°32 extrait des « Premiers éléments de géométrie » par Ch.Vacquant et A. Macé de Lépinay (Masson, 1914)
Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la bissectrice de l'angle compris entre ces côtés, augmenté du produit des deux segments que cette bissectrice détermine sur le troisième côté.

78-4 *de Pierre Fermat (Beaumont-de-Lomagne)* :
Sur le diamètre [AB] d'un demi-cercle on construit un parallélogramme ABFE dont le côté [AE] ou [BF] a une longueur égale à celle de la corde du quart du même cercle ou encore au côté du carré inscrit. À partir d'un point M du demi-cercle, on trace les segments [ME] et [MF]. Ces segments coupent le diamètre [AB] respectivement aux points R et S.
Montrer qu'on a alors la relation : $AS^2 + BR^2 = AB^2$.



Des solutions

74-3 *de Louis Rivoallan* :
Les points A, B, C et D sont placés dans cet ordre sur un même cercle de centre O. Sachant que O est l'isobarycentre de ces quatre points, que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?
N.d.l.r. Après la solution proposée dans le numéro précédent en voici une utilisant le calcul vectoriel.

Solution de Serge Parpay :

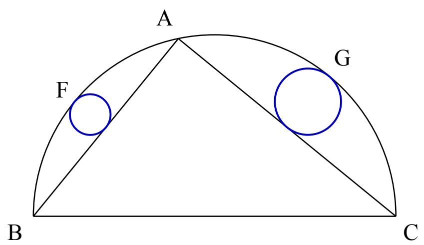
On a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ (1) puisque O est l'isobarycentre de A, B, C et D. Soit I le milieu de [AC] et J celui de [BD]. D'après (1), $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$, donc O est le milieu de [IJ] ; O, I et J sont alignés. D'autre part, (OI) est perpendiculaire à (AC) ; donc $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ (2). De même (OJ) est perpendiculaire à (BD), donc $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ (3). $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ n'étant pas colinéaires (diagonales du quadrilatère), (2) et (3) impliquent $\overrightarrow{IJ}=\vec{0}$. Par suite, O, I et J sont confondus. Les diagonales se coupent en O, ABCD est un rectangle.

74-4 *de Jacques Chayé* :

Dans l'énoncé ci-dessous, le vocabulaire, les notations et les formulations de l'époque ont été conservées.

Exercice n°338 extrait des « Problèmes de mathématiques » par Ernest Lebon (Armand colin, 1898)

A étant un point quelconque d'une demi-circonférence BAC, par les points milieux des côtés BA et AC du triangle BAC, on construit deux cercles tangents aux droites BA et AC et aux arcs BFA et AGC. Soient β et γ les rayons de ces cercles et r le rayon du cercle inscrit au triangle BAC. Démontrer que l'on a la relation : $8\beta\gamma = r^2$.



Solution de l'auteur :

Posons CA = b, AB = c, BC = 2R. On a $(b + c)^2 = 4R^2 + 2bc$, d'où : $2bc = (b + c)^2 - 4R^2 = (b + c + 2R)(b + c - 2R)$. Mais le double de l'aire du triangle ABC est égale à bc et aussi à $r(b + c + 2R)$, donc : $2bc = (b + c - 2R)bc/r$, alors $2r = b + c - 2R$.

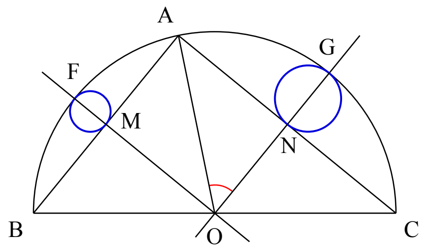
D'autre part : $2\beta + \dfrac{b}{2} = R$ et $2\gamma + \dfrac{c}{2} = R$, d'où $16\beta\gamma = (2R - b)(2R - c) = 4R^2 - 2R(b + c) + bc$.

Ou encore : $32\beta\gamma = 8R^2 - 4R(b + c) + (b + c)^2 - 4R^2 = 4R^2 - 4R(b + c) + (b + c)^2 = [2R - (b + c)]^2 = 4r^2$.

Finalement $8\beta\gamma = r^2$.

Solution de Louis Rivoallan :

Les notations sont celles de l'énoncé. On notera O le milieu de [BC], M celui de [AB], N celui de [AC]. Le diamètre [FM] du cercle tangent à [AB] en M est donc perpendiculaire à [AB] en M. Par suite (FM) est la médiatrice de [AB] et elle passe par O. De même la droite (GN) s'avère être la médiatrice de [AC] et elle passe par O. De plus des considérations élémentaires sur le parallélisme et l'orthogonalité permettent de voir que ces deux droites sont perpendiculaires. Il est légitime de prendre un repère orthonormé (O, G, F) pour lequel le cercle circonscrit à ABC est donc le cercle trigonométrique. Si on note x une mesure de l'angle $\widehat{GOA}$, alors $AB = 2\cos x$, $AC = 2\sin x$, $BC = 2$, $2\beta = 1 - \sin x$ et $2\gamma = 1 - \cos x$. Soit r le rayon du cercle inscrit dans ABC. En exprimant de deux façons l'aire de ABC, on obtient : $\dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{rBC}{2} + \dfrac{rAC}{2} + \dfrac{rAB}{2}$



d'où $r = \dfrac{(2\cos x)(2\sin x)}{2 + 2\sin x + 2\cos x} = \dfrac{2\sin x\cos x}{1 + \sin x + \cos x}$.

L'énoncé demande d'établir la relation $8\beta\gamma = r^2$, c'est-à-dire $2(1 - \cos x)(1 - \sin x) = \left(\dfrac{2\sin x\cos x}{1 + \sin x + \cos x}\right)^2$ ou encore la relation qui lui est équivalente : $(1 - \cos x)(1 - \sin x)(1 + \cos x + \sin x)^2 = 2\sin^2 x\cos^2 x$. Il n'y a qu'à …

$$(1 - \cos x)(1 - \sin x)(1 + \cos x + \sin x)^2 = (1 - \sin x - \cos x + \sin x\cos x)2(1 + \cos x + \sin x + \sin x\cos x)$$

$$(1 - \cos x)(1 - \sin x)(1 + \cos x + \sin x)^2 = 2((1 + \sin x\cos x) - (\cos x + \sin x))((1 + \sin x\cos x) + (\sin x + \cos x))$$

$$(1 - \cos x)(1 - \sin x)(1 + \cos x + \sin x)^2 = 2((1 + \sin x\cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2)$$

$$(1 - \cos x)(1 - \sin x)(1 + \cos x + \sin x)^2 = 2(1 + 2\sin x\cos x + \sin^2 x\cos^2 x - 1 - 2\sin x\cos x)$$

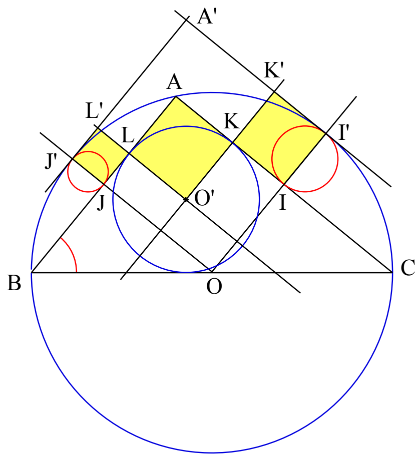
$$(1 - \cos x)(1 - \sin x)(1 + \cos x + \sin x)^2 = 2\sin^2 x\cos^2 x\ .$$

Ouf !

Une nouvelle question de Jean Cordier accompagnée de sa solution :

La figure a été complétée de la manière suivante : On a tracé en I' et en J' les tangentes au grand cercle, elles se coupent en A'. Le point O' a été projeté orthogonalement en K, K', L, L' sur les droites (AC) etc. On a dans cette figure deux carrés évidents ALO'K et A'J'OI'. Les droites (LK) et (I'J') sont-elles confondues ?

Une solution : On note r et R les rayons respectifs du cercle inscrit et du cercle circonscrit. Si on démontre que II'K'K et LL'J'J sont des carrés le résultat est évident.



Expression de r en fonction de R et de l'angle $t = \widehat{ABC}$.

Aire (ABC) = Aire (AO'B) + Aire (BO'C) + Aire(CO'A). On en déduit que :

AB x AC = r(AB + AC + BC) . Ce qui donne (en utilisant AB = 2Rcos(t) etc.) :

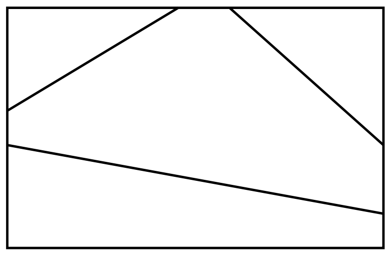
$2R^2\sin(t)\cos(t) = r(R\cos(t) + R\sin(t) + R)$. On obtient : $r = \dfrac{2R\sin(t)\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t) + 1}$.

On va démontrer que KI = II'. KI = AI – AK donc KI = Rsin(t) – r et II' = OI' – OI donc II' = R – Rcos(t). Une méthode pour démontrer que KI = II' est de résoudre l'équation Rsin(t) – r = R – R cos(t) et de constater que c'est une identité. Voici une méthode. En simplifiant par R l'équation devient : $\sin(t) - \dfrac{2\sin(t)\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)+1} = 1 - \cos(t)$.

Cela devient $\cos(t)+\sin(t)-1 = \dfrac{2\sin(t)\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)+1}$ ou encore $(\cos(t) + \sin(t) - 1)(\cos(t) + \sin(t) + 1) = 2\sin(t)\cos(t)$.

Cette relation est toujours vraie.

75-1 *de Louis Rivoallan* :

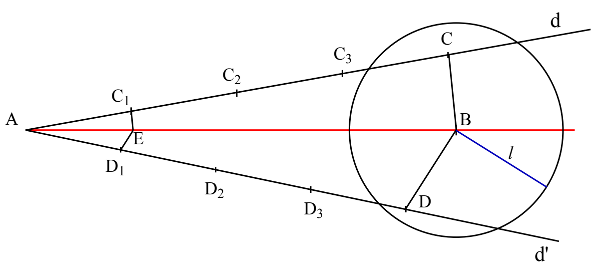


Un exercice bien connu est de devoir tracer le centre de gravité du triangle ci-contre, sans réaliser de tracés à l'extérieur de la feuille.
Une construction consiste à tracer des droites parallèles aux segments, à une distance constante, de telle sorte que le triangle obtenu ait ses trois sommets sur la feuille. Beaucoup pensent que le centre de gravité du petit triangle coïncide avec celui du grand ! Mais pourquoi ?
Pourtant ce petit triangle est bien semblable au premier puisque leurs côtés sont parallèles. Mais alors où est le centre de l'homothétie qui transforme le grand triangle dans le petit ?

Solution de l'auteur :
Notons ABC le grand triangle, celui dont on ne connaît pas les sommets, et A'B'C' le triangle obtenu en traçant des parallèles à une distance d des côtés, de telle sorte que celui-ci soit entièrement sur la feuille. Notons G et G' les centres de gravité de ces triangles. Soit H_A, H_B, H_C les projetés orthogonaux de G sur (BC), (AC), (BA) et $H_{A'}$, $H_{B'}$, $H_{C'}$ les projetés orthogonaux de G' sur (B'C'), (A'C'), (B'A'). Soit h l'homothétie qui transforme ABC en A'B'C', Ω son centre et k son rapport, avec $0 < k < 1$. Supposons, comme beaucoup le croient, que le centre de gravité G' de A'B'C' soit aussi le centre de gravité de ABC. Cela signifie alors que G' est invariant par h, et par suite que G' = Ω. Par suite $H_{A'}$, $H_{B'}$, $H_{C'}$ sont les images respectives de H_A, H_B, H_C par h. Les distances $H_AH_{A'}$, $H_BH_{B'}$ et $H_CH_{C'}$ étant égales par hypothèse, on en déduit que les distances GH_A, GH_B et GH_C sont égales tout comme le sont les distances $GH_{A'}$, $GH_{B'}$ et $GH_{C'}$. G étant le centre de gravité du triangle ABC, les aires des triangles GAB, GBC et GCA sont égales à 1/3 de l'aire de ABC. Puisque les hauteurs de ces trois triangles sont égales alors leurs bases le sont également, ce qui implique que ABC doit être équilatéral, tout comme A'B'C'. Puisque ce n'est pas le cas, l'hypothèse que les centres de gravité sont confondus est erronée. Où est donc le point Ω ?
Il suffit de construire classiquement le point G à l'aide d'une homothétie auxiliaire qui réduit la taille du triangle, de construire le centre de gravité du triangle image, et enfin de construire G à l'aide de l'homothétie réciproque. De plus les points G, G' et Ω sont alignés. Il suffit de faire le même type de construction avec un autre point remarquable du triangle ABC, par exemple le centre du cercle inscrit ou le centre du cercle circonscrit. Si on appelle M ce point et M' son image, les points M, M' et Ω sont alignés. Par suite, Ω est l'intersection des droites (GG') et (MM').

75-2 *de Louis Rivoallan* :
À l'occasion d'une leçon (niveau CE2) à l'IUFM où il était question de prolonger le tracé d'une droite, m'est venue l'idée du petit exercice suivant :
deux points A et B sont distants d'un peu moins de 20 cm. On veut tracer la droite (AB) mais la règle dont on dispose mesure à peine 6 cm. On dispose d'un compas. Comment faire pour tracer cette droite ?

Solution de Frédéric de Ligt :
Notons A et B les deux points, *l* la longueur de la règle. On trace le cercle de centre B et de rayon à peine *l*/2. On trace ensuite deux demi-droites d et d' d'origine A en faisant glisser la règle. On s'arrange pour que chacune des deux demi-droites coupe le cercle en deux points. On choisit une ouverture de compas telle qu'en reportant quatre fois cette longueur sur d à partir de A, on aboutisse à un point C intérieur au cercle. On note C_1, C_2 et C_3 les points intermédiaires. On procède de même sur d' pour obtenir un point D intérieur au cercle. On note D_1, D_2 et D_3 les points intermédiaires.



Les segments [BC] et [BD] peuvent être tracés avec la petite règle. A l'aide du compas et de cette règle, il est possible de construire la parallèle à [BC] passant par C_1 (on peut construire, par exemple, la demi-droite d'origine B parallèle à d mais de sens opposé en s'aidant des points C et C_3, puis, à partir de B, reporter trois fois sur celle-ci la longueur CC_3 ; on relie enfin le troisième point obtenu à C_1). On construit de même la parallèle à [BD] passant par D_1. Ces deux dernières droites se coupent en un point E. Le point E appartient au segment [AB] et AE = AB/4. Le segment [AE] a une longueur légèrement inférieure à 5 cm et peut donc être tracé ; puis, en faisant glisser la règle, on prolonge ce segment jusqu'en B.