Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.

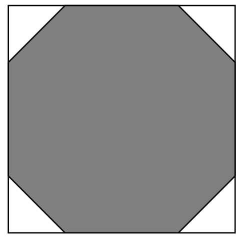
Frédéric de Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Pour la rubrique de cette fin d'année scolaire **Jacques Chayé** nous propose une variation autour du thème :

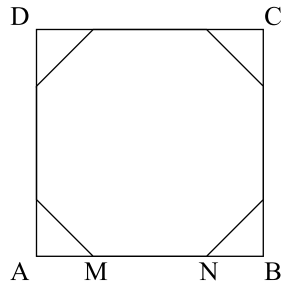
UN OCTOGONE DANS UN CARRÉ (1)

En écornant un carré ABCD par quatre triangles rectangles de même taille, on obtient un octogone. Soit c la longueur des côtés du carré et c' la longueur des côtés de l'angle droit des triangles. Calculer c' en fonction de c pour que l'octogone soit « régulier » (c'est-à-dire un octogone inscriptible dans un cercle et dont tous les côtés sont de la même longueur).



SOLUTION

Quel que soit c' (nécessairement inférieur à $c/2$), le centre du carré est équidistant des extrémités des hypoténuses des quatre triangles rectangles ; donc, l'octogone sera régulier si et seulement si tous ses côtés sont de la même longueur.

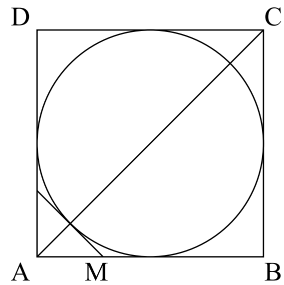


Considérons M et N les sommets sur le segment [AB] des triangles, rectangle respectivement en A et en B. Les hypoténuses ont pour longueur $c'\sqrt{2}$.

La condition à remplir est équivalente à MN = $c'\sqrt{2}$ **,** c'est-à-dire à : $c - 2c' = c'\sqrt{2}$ ce qui s'écrit :

$c' = \dfrac{c}{2+\sqrt{2}}$ soit encore : $\boldsymbol{c' = c\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$.

L'octogone est régulier si et seulement si : $\boldsymbol{c' = c\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$ **.**

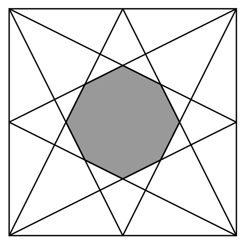


Remarque : La construction du point M, ou des autres points d'un tel octogone, ne présente aucune difficulté.
Considérons le cercle inscrit dans le carré ; il est aussi inscrit dans l'octogone régulier.
Le point de contact de ce cercle avec l'hypoténuse du triangle rectangle en A est situé sur la diagonale [AC]. La tangente au cercle en ce point est perpendiculaire à la droite (AC).
On obtient ainsi le point M.

UN OCTOGONE DANS UN CARRÉ (2)

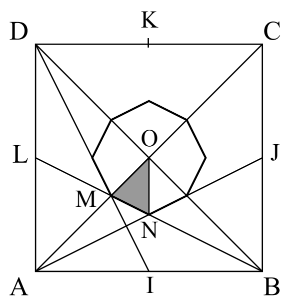
Dans un carré ABCD on relie chaque sommet au milieu de chacun des deux côtés auxquels ce sommet n'appartient pas. On détermine ainsi un octogone (voir la figure ci-contre).

- Exprimer l'aire $\boldsymbol{a}$ de cet octogone en fonction de l'aire $\boldsymbol{A}$ du carré.
- Cet octogone est-il régulier ?



SOLUTION

• Soit O le centre du carré. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Soit M l'intersection de [BL] et [DI], N l'intersection de [AJ] et [BL].
Par raison de symétrie :
1°) [BL] et [DI] se coupent sur [AC], donc M est sur [AC].
2°) [AJ] et [BL] se coupent sur [IK], donc N est sur [IK] et (ON) // (CJ).
3°) L'aire $\boldsymbol{a}$ de l'octogone est égale à 8 fois l'aire du triangle MNO : $\boldsymbol{a}$ = 8 x aire(MNO). D'autre part, M est le centre de gravité du triangle ABD, donc, aire(ANO) = 3 x aire(MNO) et d'après le 2°) ci-dessus, aire(AJC) = 4 x aire(ANO). Enfin, $\boldsymbol{A}$ = 2 x aire(ABC) = 4 x aire(AJC).
En résumé, $\boldsymbol{A}$ = 4 x 4 x 3 x aire(MNO), par conséquent : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} / 6$.



• Par raison de symétrie, les huit triangles constituant l'octogone, tels que le triangle OMN, sont isométriques. Donc les huit côtés de l'octogone sont de la même longueur.
Cet octogone est-il régulier ?
S'il existe un cercle passant par les huit sommets, son centre est nécessairement en O puisque toutes les grandes diagonales ont O pour milieu. Or, en désignant par c le côté du carré :

$\mathrm{OM} = \dfrac{\mathrm{OA}}{3} = \dfrac{\mathrm{AC}}{6} = c\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ et $\mathrm{ON} = \dfrac{\mathrm{JC}}{2} = \dfrac{c}{4}$. Par conséquent OM ≠ ON et donc **l'octogone n'est pas régulier.**

UN OCTOGONE DANS UN CARRÉ (3)

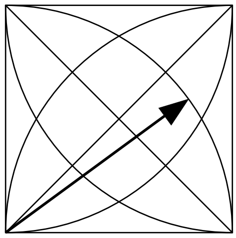


Fig. 1

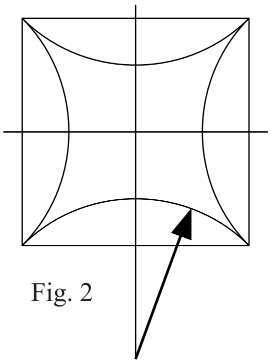


Fig. 2

On trace, intérieurement à un carré ABCD dont la longueur des côtés est égale à c, les quatre quarts de cercle ayant chacun pour centre un des sommets du carré (chacun d'eux a donc pour rayon c et pour corde une diagonale du carré - voir fig.1).
On trace, intérieurement à ce même carré, les quatre quarts de cercle ayant chacun pour corde un des côtés du carré (chacun d'eux a donc pour rayon $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ et son centre est situé sur une médiatrice d'un des côtés du carré à la distance c du centre de ce carré - voir fig. 2). Les milieux des arcs des deux familles sont les sommets d'un octogone (voir fig.3).

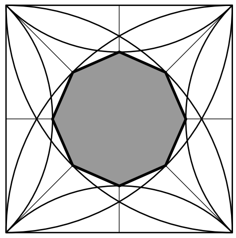


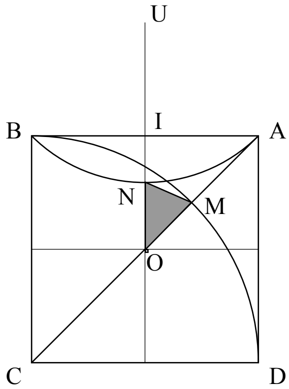
Fig. 3

- Cet octogone est-il régulier ?
- Exprimer l'aire $\boldsymbol{a}$ de cet octogone en fonction de l'aire $\boldsymbol{A}$ du carré.

SOLUTION

- Par raison de symétrie, on peut affirmer que tous les côtés de l'octogone sont de la même longueur.

Pour prouver que cet octogone est régulier il ne reste plus qu'à établir l'appartenance des sommets à un même cercle.
Soit O le centre du carré, M le milieu du quart de cercle de centre C, N le milieu du quart de cercle de centre U et de corde [AB] ; soit enfin I le milieu de [AB].



$$\mathrm{OM} = \mathrm{CM} - \mathrm{CO} = \mathrm{CB} - \mathrm{CO} = c - c\frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ \mathrm{ON} = \mathrm{OI} - \mathrm{IN} = \mathrm{OI} - (\mathrm{UN} - \mathrm{UI}) = 2\mathrm{OI} - \mathrm{UN} = c - c\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc OM = ON. De même, tous les autres sommets de l'octogone sont à la même distance de O.
Par conséquent, **l'octogone est régulier.**

- L'aire du triangle OMN est égale à : $\frac{1}{2}\mathrm{OM} \times \mathrm{ON} \times \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left[c\,\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = c^2\,\frac{3\sqrt{2}-4}{8}$

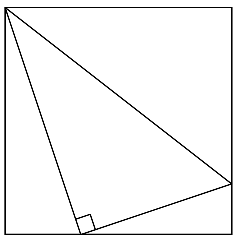
donc, $\boldsymbol{a} = c^2\left(3\sqrt{2}-4\right)$ c'est-à-dire : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}\left(3\sqrt{2}-4\right)$.

Des problèmes

Une grossière erreur due à la précipitation non pas de l'auteur ni du responsable de la rubrique mais uniquement du «metteur en page» s'est glissée dans l'exercice 76-2 de la Ru-bri-col'age, page 5 du dernier Corol'aire.
La vraie question posée est : « **Quelle est la limite de An/A quand n tend vers l'infini ?** », et non pas An/n comme cela a été écrit. D'ailleurs une telle question serait vraiment trop simple ! et vous l'avez certainement corrigée, vu le texte de l'exercice.
Toutes mes excuses.

Jean Fromentin

77-1 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :



Dans son livre, *Tommorow's math* (Oxford University Press, 1972, p.120), Stanley Ogilvy présente un problème ouvert, posé par Solomon Golomb (l'inventeur des polyominos) en 1971 : Peut-on inscrire un triangle rectangle dans un carré, de la façon présentée ci-contre, avec des longueurs entières pour tous les segments qui apparaissent sur la figure ?
Ce problème n'a pas dû rester bien longtemps sans réponse après la parution du livre.
Qu'en pensez-vous ?

77-2 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :
« Les circonférences ayant pour diamètres les diagonales d'un trapèze ABCD se coupent sur la perpendiculaire aux bases menée du point d'intersection S des côtés obliques AD et BC. »
Extrait de *Problèmes mathématiques* par Ernest Lebon- Armand Colin (1898).

77-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Chacun sait que ce n'est pas parce que le périmètre d'un polygone augmente que l'aire de celui-ci augmente. Mais qu'en est-il si le polygone est inscrit dans un cercle ?

77-4 *de Frédéric de Ligt (Montguyon) d'après un exercice d'olympiades académiques transmis par Jacques Chayé* :
On dit qu'un entier non nul n est harmonieux s'il peut s'écrire comme la moyenne de n puissances de 2, non nécessairement distinctes. Quels sont les entiers harmonieux ?

Des solutions

74-2 *de Frédéric de Ligt* :
Trouver tous les triangles à côtés entiers qui possèdent deux angles dont l'un est le double de l'autre.

Dans le dernier numéro du Corol'aire, Louis Rivoallan avait donné un complément à sa solution parue dans le numéro 75. ***Claude Morin****, un lecteur attentif de la rubrique, la complète à son tour.*

Le complément de Louis Rivoallan ne répond pas complètement à la question posée car les entiers a, b, c doivent être les côtés d'un triangle. La condition $b < a + c$ est vérifiée car $a + c - b = kn(n\text{-}m) > 0$ quand $m < n$.
Mais $a + b - c = k(2m^2 + mn - n^2) = k(2m - n)(m + n) > 0$ impose $n < 2m$. En conclusion, les triangles à côtés entiers qui possèdent deux angles dont l'un est le double de l'autre sont les triangles de côtés (km^2, kmn, $kn^2 - km^2$) avec m et n entiers premiers entre eux tels que $m < n < 2m$. Le plus petit est obtenu pour $m = 2$, $n = 3$ et $k = 1$: (4, 6, 5).
Remarque. L'exercice a été posé à la compétition USAMO 1991 où l'on demandait le plus petit périmètre avec la condition supplémentaire que l'angle C soit obtus ; on trouve $m = 4$, $n = 7$ ($k = 1$), périmètre = 77. Plus généralement si $m < n < \sqrt{2}m$, l'angle B est obtus. Si $\sqrt{2}m < n < \sqrt{3}m$, le triangle a ses trois angles aigus. Si $\sqrt{3}m < n < 2m$, l'angle C est obtus.

74-3 *de Louis Rivoallan* :
Les points A, B, C et D sont placés dans cet ordre sur un même cercle de centre O. Sachant que O est l'isobarycentre de ces quatre points, que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?

Solution de Frédéric de Ligt
Soit I le milieu de [BD] et J le milieu de [AC], on construit le point A' tel que AJA'I soit un parallélogramme. Supposons sans perdre de généralité que AI ≤ AJ. Avec l'inégalité triangulaire on a AA' ≤ AJ + JA'. Le centre O étant l'isobarycentre des points A, B, C, et D, il est le milieu du segment [IJ] et donc celui du segment [AA'], donc AA' = 2 AO. Par ailleurs JA' = AI d'où l'inégalité 2AO ≤ AJ + AI, puis 2AO ≤ 2AJ = AC. Comme 2AO vaut la longueur d'un diamètre et que A et C sont des points du cercle, on en déduit que [AC] est aussi un diamètre de ce cercle, et par conséquent J est confondu avec le centre O. Ce point O est le milieu du segment [IJ], le point I est donc aussi confondu avec le point O. Les diagonales du quadrilatère ABCD sont des diamètres du cercle, ABCD ne peut être qu'un rectangle.
Il pourrait être aussi intéressant d'examiner si la conclusion est conservée dans les cas d'une plaque homogène ou de quatre tiges pesantes.

76-3 *de Louis Rivoallan* :
Soit un point A extérieur à une droite d. On dispose d'une règle, non graduée, et d'un compas. Avec ces instruments, on veut tracer la perpendiculaire à la droite d passant par A.
En utilisant le compas trois fois.
En utilisant le compas deux fois.
En utilisant le compas une seule fois.

Solution de Jean-Paul Guichard
Tracer un cercle de centre A qui coupe d en C et D. Tracer deux cercles de même rayon de centres respectifs C et D qui se coupent en B. Tracer la droite (AB) qui est la perpendiculaire souhaitée.
Tracer un cercle de centre A qui coupe d en C et D. Tracer un autre cercle de centre A, de rayon plus petit, qui coupe les segments [CA] et [DA] respectivement en E et F. Les segments [DE] et [CF] se coupent en B. Tracer la droite (AB) qui est la perpendiculaire souhaitée. On peut bien sûr utiliser les deux autres points d'intersection du petit cercle avec les droites (CA) et (DA). On peut aussi utiliser ces points d'intersection avec un cercle de rayon plus grand.

On peut aussi se donner deux points quelconques B et C sur la droite d, tracer le cercle de centre B et de rayon BA ainsi que le cercle de centre C et de rayon CA. En notant D le second point d'intersection des deux cercles, (AD) est la perpendiculaire cherchée.
Pour la troisième question, restée sans réponse, je propose la construction suivante. Tracer un cercle centré sur un point quelconque de la droite. Il coupe la droite d en deux points B et C. Son rayon doit être assez grand pour que le point A soit intérieur au disque de diamètre [BC]. Tracer les droites (BA) et (CA). Elles recoupent le cercle en D et E respectivement. Les droites (BE) et (CD) se coupent en un point F. La droite (AF) est la perpendiculaire cherchée (le point A est alors l'orthocentre du triangle BCF). Frédéric de Ligt.

Rallye Mathématique Poitou-Charentes

La date de la prochaine édition du Rallye Mathématique de Poitou - Charentes n'est pas encore arrêtée.
En revanche, le thème de recherche que nous proposons maintenant chaque année portera sur le calcul en liaison avec l'exposition « **Comment tu comptes** » élaborée avec l'Espace Mendès-France de Poitiers. Matériels de calculs suivant les âges, numérations et algorithmes opératoires suivant les civilisations, le thème est riche et accessible à tous les niveaux. Si vous avez des idées à nous soumettre, des problèmes à nous proposer pour cette future édition, n'hésitez pas à nous écrire (adresses en page 1 de ce Corol'aire).