Edito

Bravo aux lauréats

Les bonnes nouvelles ne sont pas si nombreuses ces derniers temps. Aussi, quand elles arrivent, ne faut-il pas bouder son plaisir. Deux élèves de notre Académie ont particulièrement brillé lors des dernières Olympiades Académiques de mathématiques de Première. **Aurélien Emmanuel** *, élève au lycée Josué Valin de La Rochelle a obtenu le deuxième prix national dans la catégorie S et **Mathieu Choquet**, élève au lycée Camille Guérin de Poitiers, a, quant à lui, décroché le premier prix national dans la catégorie L. La cérémonie officielle s'est déroulée le 10 juin dernier au ministère de l'Education Nationale, elle était présidée par Eric Roser, IGEN, ancien IPR de notre Académie.

Un petit rappel. La première épreuve des Olympiades Académiques date de 2001 et depuis, chaque année, des élèves des classes de Première, repérés par leur professeur, composent pendant quatre heures sur quatre exercices (deux sujets nationaux et deux sujets académiques). Pour citer Dominique Roux, IGEN et initiateur de cette épreuve : « *On perçoit un esprit olympiade qui gouverne les choix vers des énoncés à la fois originaux, parfois ludiques ou visant des situations de modélisation, dans lesquelles il est possible d'expérimenter, ou orientés vers un type de problèmes ouverts non scolaires qui incitent à la recherche et qui développent le goût pour les mathématiques*.»

L'APMEP soutient très fortement cette action car elle ne vise pas seulement à dégager de jeunes élèves talentueux capables de représenter la France au niveau des Olympiades Internationales de Mathématiques, elles sont aussi « *un levain dans la pâte pour contribuer à faire évoluer l'enseignement des mathématiques à l'opposé de ce qu'induisent les pratiques actuelles de nos examens* » pour reprendre les mots de notre regretté Henri Bareil.

Cette année notre cellule académique n'a eu à corriger que 33 copies alors que le nombre total de participants en France a été de 6243, soit une représentation de 0,5 % pour notre Académie. C'est un vrai miracle que les résultats aient été aussi remarquables. Si nous voulons reproduire ces belles performances dans le futur, notre base devra s'élargir et compter au moins 150 candidats afin d'être plus en rapport avec notre poids démographique. Aussi, l'an prochain, n'hésitez pas à inscrire vos élèves de Première les plus motivés, **toutes sections confondues**. Comme le dit la publicité : 100% des gagnants ont tenté leur chance !

Frédéric de Ligt.

* Voir page 5

SOMMAIRE

Édito	p. 1
Vie associative : Comité de la Régionale	p. 2
Livres scientifiques anciens	p. 3
La saga du théorème de Fermat-Wiles	p. 3
Vie de l'IREM	p. 4
Olympiades académiques 2009	p. 5
Envoi de Corol'aire	p. 5
Rubricol'age	p. 6 à 8
Rallye Mathématique Poitou-Charentes	p. 8

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

APMEP

79 86 17 16

Régionale de Poitou-Charentes

n°77

Juillet 2009

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

APMEP : http://apmep.poitiers.fr/
Mél : apmep.poitiers@free.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros) + Suppléments : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Frédéric de LIGT
Comité de rédaction …	F. de LIGT, N. MINET, J. FROMENTIN,
Imprimerie ……..	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Editeur ……..	APMEP Régionale de Poitiers
Siège social ……..	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Dépôt légal	Juillet 2009

Vie de l'association

Comité de la Régionale du mercredi 24 juin 2009

La séance est ouverte à 14 h 45.

1) L'exposition sur le calcul à Mendes France

Une réunion a eu lieu le mercredi 17 juin à l'Espace Mendès-France (EMF) pour faire le point avec Edith Cirot, responsable des expositions, sur l'état d'avancement du projet. Jean-Paul Guichard nous en a fait un compte rendu.

Les différents pôles ont présenté leur travail ; une sélection des documents et du matériel fournis va maintenant être effectuée par le comité scientifique de l'EMF. Le titre a été trouvé : « **Comment tu comptes** ». Dominique Souder a accepté de présenter une conférence sur le thème des nombres et de la magie lors de la cérémonie d'inauguration qui se déroulera le 16 novembre à l'EMF, coïncidant avec le coup d'envoi de la Fête de la Science. D'autres conférenciers vont être contactés pour animer cette exposition qui prendra son plein essor à partir de janvier 2010. Un rendez-vous est prévu avec les responsables de l'EMF en septembre pour un nouveau point.

Jean Fromentin a présenté au Comité 4 machines à calculer anciennes qu'il va prêter pendant le temps de l'exposition. La Régionale de Lille demande si les panneaux de l'exposition ne pourraient pas être directement fabriqués en double de façon à pouvoir en acquérir un lot, les frais supplémentaires restant à sa charge. Une demande en ce sens va être soumise à l'EMF.

2) Expocube

Expocube continue à tourner dans les écoles et les collèges. Elle est actuellement entre les mains de Sébastien Peyrot au collège Jules Verne d'Angoulême. La Régionale de Lille est en train de la dupliquer pour la faire circuler dans son académie.

3) Olympiades académiques

Le comité s'est félicité des brillants résultats obtenus à cette épreuve, au niveau national, par deux élèves de notre académie.

4) Brochures

Un groupe de volontaires va se réunir à la rentrée afin de faire l'inventaire de nos stocks. Des représentants de la Régionale présenteront notre action, nos positions et nos brochures aux PLC2 à la rentrée. Il va falloir demander à l'EMF s'il ne serait pas possible de vendre nos brochures pendant l'exposition sur le calcul.

5) Partenariat avec le collège Henri IV

Louis-Marie Bonneval et Jean-Paul Guichard s'activent avec d'autres volontaires passionnés pour inventorier le fond scientifique de la bibliothèque du collège. Ils ont ainsi mis à jour une édition complète dont le premier tome date de 1751, de l'Encyclopédie de d'Alembert et Diderot. Les ouvrages restaurés pourront être consultés sur place par les adhérents de l'APMEP le mardi après-midi et le vendredi après-midi. Sur le site de la Régionale sont recensés les livres disponibles.

6) Rallye

Le thème du prochain Rallye est tout trouvé. Il s'inscrira dans la continuité de l'exposition réalisée à l'EMF sur le calcul. Les lots pourront être acheminés l'an prochain par les services du Rectorat. Il pourrait être demandé aux enseignants qui ont fait participer leurs classes de communiquer aux organisateurs les articles qu'ils auraient fait paraître dans la presse régionale à ce sujet.

7) Site de la Régionale

Jacques Germain et Louis-Marie Bonneval ont présenté les dernières améliorations qu'ils ont apportées au site de la Régionale. Pour la maintenance, les rôles ont été distribués : Frédéric de Ligt aura en charge la rubrique « Régionale », Jean Fromentin les rubriques « Rallye » et « Corol'aire », Jacques Germain et Jacques Chayé la rubrique « Brochures ». Jean-Marie Parnaudeau se propose de scanner les premiers numéros de Corol'aire afin qu'ils soient consultables sur le site. La rubrique « expositions » n'a pas été abordée. Peut-être Louis-Marie Bonneval s'en chargera-t-il ?

8) Préparation du comité national du 27 et 28 juin

Le texte du groupe national « lycée » de l'APMEP : « *L'organisation du lycée que nous souhaitons* » a été brièvement discuté ainsi que les différents points non négociables sur la masterisation qui sont ressortis de l'entrevue au ministère de notre Présidente, Pascale Pombourcq, avec Mark Sherringham, conseiller de Xavier Darcos le jeudi 28 mai.

9) Suivi des Journées Nationales de La Rochelle

Le compte des Journées peut maintenant être clôturé, de même que le compte et les deux livrets au Crédit Agricole qui n'ont plus d'utilité. Tout sera regroupé sur le compte de la Banque Populaire. Un placement sûr et rémunérateur est à trouver pour ne pas laisser trop d'argent sur le compte courant. Nathalie Chevalarias annonce son intention de ne pas tenir la trésorerie de l'Association l'an prochain. Les volontaires à la reprise de ce poste peuvent d'ores et déjà se manifester.

10) Corol'aire

Des lecteurs nous félicitent de l'allégement sensible du poids du Corol'aire dans sa version électronique, félicitations transmises à Jean Fromentin.

11) Prochain comité

Il aura lieu le mercredi 23 septembre à 14 h 45 à l'IREM de Poitiers. Pour le groupe « Brochures », le rendez-vous est fixé à 10 h, même lieu, même jour. L'assemblée générale de décembre pourrait se dérouler à l'EMF afin de présenter l'exposition aux adhérents présents. Il a aussi été discuté de la possibilité de mettre en place une Journée de la Régionale, inscrite au PAF, comme cela se pratique dans certaines académies, pour l'assemblée générale de décembre 2010.

L'ordre du jour étant épuisé la séance est levée à 17 h 20.

Une partie du Comité de la Régionale au travail

Livres scientifiques anciens du collège Henri IV de Poitiers

Le collège Henri IV a fêté ses 400 ans en 2008. À cette occasion, un partenariat a été établi avec la Régionale APMEP pour répertorier et mettre en valeur le riche fonds d'ouvrages scientifiques anciens que possède le collège (livres et revues des XVIIe , XVIIIe, XIXe, XXe siècle). Le collège a aménagé une salle spéciale pour les accueillir.
Un groupe a travaillé pendant les années scolaires 2007-2008 et 2008-2009 : Jacques Chayé, Louis-Marie Bonneval, Jean-Paul et Jacqueline Guichard, Guy Sallat, Dominique Gaud.
En contrepartie, ces ouvrages peuvent être consultés par les adhérents de l'APMEP. Il suffit de se présenter au CDI du collège (1 rue Louis Renard, POITIERS) un mardi ou un vendredi entre 13 h et 17 h, et de demander au documentaliste la clé de la salle, en échange d'une pièce d'identité.
Le fichier des ouvrages peut être téléchargé sur le site de la Régionale http://apmep.poitiers.free.fr/ (rubrique « Livres et brochures »).

La saga du théorème de Fermat-Wiles

Lors de la conférence qu'il a donnée à l'université de La Rochelle le 10 juin dernier, Frédéric Testard (photo ci-contre), maître de conférence, a convié l'assemblée, composée d'une trentaine d'enseignants curieux, à un voyage dans le temps. Il nous a fait remonter 350 ans en arrière avec une introduction énigmatique :
« *Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere. Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet.* »
Vous l'aurez peut-être reconnue, il s'agit de l'annotation rédigée par Pierre de Fermat dans la marge de son *Arithmétiques* de Diophante. La question soulevée allait bien vite prendre le nom de *grand théorème de Fermat* dans la mesure où l'auteur de ces lignes affirmait détenir une preuve de son affirmation. Dès lors, ses successeurs s'employèrent à « retrouver » une démonstration. L'affaire s'avéra très compliquée. On a retrouvé une preuve de Fermat lui-même dans le cas $n = 4$ mais curieusement pas pour le cas $n = 3$. Euler en 1770 combla cette lacune en utilisant les nombres complexes (même si ceux-ci ne sont pas indispensables). Dirichlet et Legendre en 1825 démontrèrent le cas $n = 5$ sans faire appel aux nombres complexes. Lamé et Lebesgue résolurent le cas $n = 7$, mais au prix de longs et pénibles raisonnements. Sophie Germain fut la première à établir un résultat général de non existence. En 1847 Kummer fut le premier à démontrer la validité du « théorème » pour toute une classe de nombres premiers : les nombres premiers réguliers. Beaucoup plus tard, Faltings établit que, pour chaque exposant, il n'y a qu'un nombre fini de solutions. Enfin, le 19 septembre 1994, Andrew Wiles stupéfia le monde en présentant une preuve complète du théorème auquel son nom est désormais attaché. Il a fallu 8 ans de travail acharné, exclusif et solitaire à ce mathématicien de talent pour parvenir à son but.

Frédéric Testard a fait intervenir successivement 3 chercheurs (François Geoffriau, Laurent le Floch et Fabienne Marotte) pour nous exposer les cas $n = 4$, $n = 3$ puis le théorème de Sophie Germain.
Un film très accessible de Simon Singh est venu clore la conférence. La fine fleur des mathématiques de Princeton y raconte comment elle a vécu l'évènement et Wiles, submergé par l'émotion, conclut : « *Tout ce que je ferai maintenant sera forcément inférieur !* ».
Merci à Frédéric Testard et à ses collègues pour avoir su nous retracer cette longue histoire en entrant dans les détails quand c'était possible et en donnant les lignes directrices quand la technicité ou l'abstraction était trop grande.

Frédéric de Ligt

François Geoffriau

Laurent Le Floch

Fabienne Marotte dans le rôle de Sophie Germain

Après l'effort, le réconfort avec un pot de l'amitié.

Une assistance attentive et captivée

Vie de l'IREM

Nous publions

La recherche «Redynamiser l'Enseignement des mathématiques» dans le cadre du groupe CDAMPERES de l'INRP, commence à donner des fruits tangibles : bien que nos travaux soient loin d'être terminés, nous avons déjà pu les présenter au niveau de stages mais aussi de colloques (en mai dernier à Lyon et à Rennes, et bien entendu en octobre aux Journées APMEP de la Rochelle), et publié quelques articles dont voici une première liste :

— *Petit x n° 79* (Mai 2009) : parcours d'étude et de recherche en géométrie pour la classe de seconde

— *Le numéro 76 de Repères IREM* (Juillet 2009) comprendra deux articles : « Les volumes en classe de sixième » et « Le volume de la boule en classe de troisième

— Autre article à paraître dans Repères IREM « Enseigner les mathématiques en sixième à l'aide des grandeurs ».

— « Les angles au collège : arpentage et navigation » premier chapitre d'un livre en préparation chez *Vuibert* : Enseignement des mathématiques : une perspective historique

— *Sur le site EducMath (INRP) :*

- Un article sur l'organisation de l'enseignement des fonctions en Seconde autour de questions : http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/cdamperes/perfonctions-seconde.pdf
- Un diaporama sur les raisons d'enseigner la géométrie, et un article sur cet enseignement à l'aide de questions au niveau seconde : http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/cdamperes/geometrie-en-seconde

— *Sur le site de l'IREM* http://irem.univ-poitiers.fr/irem, rubrique Ressources / Productions en ligne, vous trouverez d'autres documents, notamment les présentations d'interventions aux journées APMEP de La Rochelle.

Quand le temps nous manque

L'équipe IREM est constituée d'une vingtaine d'enseignants, moitié de collège, moitié de lycée, dont beaucoup sont formateurs à l'IUFM au titre de la formation initiale ou de la formation continue (stages du PAF).

Pour cela ils bénéficient de décharges de service d'enseignement, lesquelles équivalaient jusqu'à il y a trois ans au temps de formation à l'IUFM, mais qui ont fondu au fil des années... En cette année 2008-2009, l'équipe a ainsi effectué près de 1600 heures de formation, dont 500 environ ont été effectuées en heures complémentaires, lesquelles seront certes rétribuées mais ont engendré une surcharge au niveau de chacun.

C'est toute l'activité de l'IREM, c'est-à-dire à la fois les formations et la recherche qui en a pâti.

C'est d'autant plus flagrant que notre recherche INRP arrive au moment où nous essayons de publier et de diffuser au maximum nos idées, mais pour rédiger, il faut du temps, et nous en manquons cruellement.

Pour l'année prochaine la situation sera encore plus tendue, puisque suite aux consignes venues du ministère le rectorat a fortement diminué le volume de décharges dont dispose l'IUFM. Pour l'équipe IREM cela se traduit par une baisse de près d'un quart.

Nous avons donc, la mort dans l'âme, décidé de prendre des mesures pour nous permettre de préserver notre capacité de recherche, sans laquelle nos formations elles-mêmes perdraient vite leur qualité : nous n'encadrerons sur la prochaine année scolaire qu'une partie seulement des stages «public désigné» et des «stages d'établissement». Nous essayons également de limiter nos interventions en formation initiale. Cette décision, annoncée dès le 13 avril par une lettre à Mme la Rectrice d'Académie, nous permettra de tenir quelque temps, mais ne résout pas le problème de fond…

Sur le nouveau programme de seconde

La consultation faite au printemps sur l'aménagement du programme de seconde ne pouvait laisser l'IREM indifférent, surtout que dans le cadre de notre recherche INRP, nous réorganisons toute l'année de seconde autour de grandes questions... Nous avons donc envoyé le 5 mai dernier une contribution que vous pouvez télécharger sur le site de l'IREM http://irem.univ-poitiers.fr/irem . Nous y déplorons que malgré l'introduction du projet de programme «l'objectif de formation est ambitieux et centré sur la résolution de problèmes», les contenus ne rendent pas visibles des problèmes mathématiques significatifs...

Cette contribution a reçu de nombreux échos favorables, mais nous nous doutions bien qu'elle ne serait que très faiblement prise en compte dans le texte définitif (enfin officiel en ce début juillet), malgré des contenus plus riches…

Quand la retraite sonne

Au cours de cette année scolaire, Jacqueline puis Jean-Paul Guichard ont pris leur retraite. Peu après la prochaine rentrée, ce sera le tour de Claude Robin. Nous avons pu les fêter le 26 juin dernier et les remercier pour leur fidélité depuis plus de 25 ans à l'IREM, pour tout ce qu'ils nous ont apporté et nous apporteront encore puisque Jacqueline continuera d'éclairer l'Atelier de Culture Scientifique et le groupe Histoire de son regard de philosophe, tandis que Jean-Paul continuera de faire profiter l'ensemble des groupes IREM de sa grande culture.

Olympiades académiques 2009 : un grand cru !

Cette année, huit lauréats aux olympiades académiques de mathématiques ont été primés le mercredi 3 juin à 17 h au rectorat en présence de la rectrice Béatrice Cormier. Elle a rappelé que ces olympiades sont destinées à développer la culture scientifique et à donner le goût de la recherche aux élèves. Tous les élèves volontaires de Première des lycées d'enseignement général et technologique sont conviés à y participer.
Sur les 33 lycéens qui ont composé pendant 4 h, le mercredi 11 mars, 29 élèves étaient issus de la série S, 2 de la série L et 2 de la série STG. Le sujet était composé de deux exercices nationaux, communs à tous les candidats, et de deux exercices académiques dont l'un était spécifique à chaque série.
L'équipe régionale (Frédéric de Ligt, Alida Dinet, Marc Le Métayer, Nathalie Mallet, Jean-Michel Sarlat, Dominique Souder, Jean Souville) avait préparé les exercices régionaux et a évalué les travaux des participants.
Les sujets sont déjà disponibles sur le site académique www.ac-poitiers.fr.
Pour vous donner envie d'inscrire vos élèves de Première les plus motivés, voici le troisième exercice proposé à tous les participants à cette épreuve.

Explicitez les calculs et raisonnements qui justifient le dialogue suivant où tous les nombres envisagés sont des entiers naturels.
– Quel est le reste de la division par 7 d'un carré ?
– Hum, on doit pouvoir s'en sortir en étudiant un nombre limité de cas...
– Si la somme de deux carrés est divisible par 7 alors les deux carrés sont, eux-mêmes, divisibles par 7 !
– Entendu, ils sont d'ailleurs tous divisibles par 49 !
– Au fait, 2009 est la somme de deux carrés !
– C'est vrai !
– On peut voir les choses autrement en considérant quatre nombres a, b, c et d. Si on développe l'expression $(ab - cd)^2 + (ac + bd)^2$ on constate que c'est le produit de deux facteurs...
– Oui, c'est épatant ! Cela porte un nom ?
– On dit que c'est la formule de LAGRANGE, elle est très utile. Prends 1105, c'est le produit de 3 nombres qui sont eux mêmes sommes de deux carrés !
– En effet, et grâce à la formule précédente, le produit de deux de ces facteurs est aussi la somme de deux carrés... Cela fait beaucoup de possibilités pour écrire 1105 comme somme de deux carrés !
– Tu en trouveras 4 !
– C'est fait. Et 2009, a-t-il aussi plusieurs décompositions en somme de deux carrés ?
– Tu peux utiliser la formule de LAGRANGE, mais cela ne donne qu'une seule décomposition.
– C'est normal, il n'y en a pas d'autres !

Aurélien EMMANUEL,
second prix national pour la série S
(source Caroline Lucas/MEN)

Enfin les lauréats ont reçu leur prix :
Série S : Aurélien EMMANUEL- Lycée Valin (La Rochelle), Gabriel PICHOT- Lycée Camille-Guérin (Poitiers), Maxime BETTINELLI- Lycée Jean-Monet (Cognac), Marie FORLACROIX- Lycée Du Bois d'Amour (Poitiers), Marine ROURE- Lycée Berthelot (Châtellerault).
Autres séries : Mathieu CHOQUET- Lycée Camille-Guérin (Poitiers), Anne-Lise ASSADA- Lycée Camille-Guérin (Poitiers).
Prix spécial du jury : Romain BODIN- Lycée du Bois d'Amour (Poitiers).
Toutes nos félicitations à eux et à leurs professeurs.
Mais l'aventure a continué pour deux d'entre eux (voir l'édito)...

Frédéric de Ligt

Envoi de Corol'aire

Il y a un an, — finances de la Régionale obligent — nous arrêtions, avec le n° 73, l'envoi systématique du Corol'aire en version papier à ceux qui ne s'étaient pas manifestés pour le recevoir en version électronique.
Si autour de vous des adhérents de l'APMEP s'étonnent de ne plus le recevoir, dites-leur de nous transmettre leur nom, adresse postale et adresse électronique pour que nous puissions leur envoyer.
Si vous souhaitez recevoir une version papier, remplissez et envoyez-nous le coupon ci-dessous accompagné d'un chèque d'un montant de 8 € (pour couvrir les frais de reprographie et d'envoi de 4 numéros et de 2 à 3 suppléments) à l'ordre de APMEP Régionale de Poitou-Charentes.

Réception de COROL'AIRE par courrier

Nom : ..... Prénom : .....
Adresse postale : .....
.....
désire recevoir Corol'aire en version papier à l'adresse ci-dessus.
Je joins un chèque de 8 € à l'ordre de APMEP, Régionale de Poitou-Charentes.

À envoyer à :
APMEP, Corol'aire
IREM - Faculté des Sciences,
40 Avenue de Recteur Pineau,
86022 Poitiers Cedex

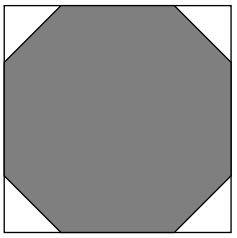
RU-BRI-COL'AGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

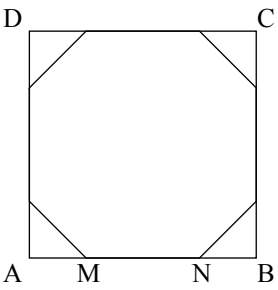
Pour la rubrique de cette fin d'année scolaire **Jacques Chayé** nous propose une variation autour du thème :

UN OCTOGONE DANS UN CARRÉ (1)



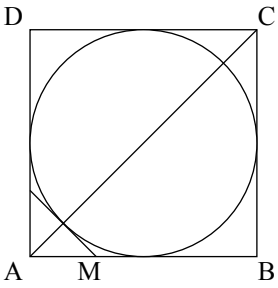
En écornant un carré ABCD par quatre triangles rectangles de même taille, on obtient un octogone. Soit *c* la longueur des côtés du carré et *c'* la longueur des côtés de l'angle droit des triangles. Calculer *c'* en fonction de *c* pour que l'octogone soit « régulier » (c'est-à-dire un octogone inscriptible dans un cercle et dont tous les côtés sont de la même longueur).

SOLUTION



Quel que soit *c'* (nécessairement inférieur à *c*/2), le centre du carré est équidistant des extrémités des hypoténuses des quatre triangles rectangles ; donc, l'octogone sera régulier si et seulement si tous ses côtés sont de la même longueur.
Considérons M et N les sommets sur le segment [AB] des triangles, rectangle respectivement en A et en B. Les hypoténuses ont pour longueur $c'\sqrt{2}$.

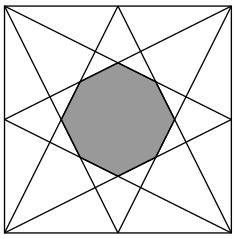
La condition à remplir est équivalente à $MN = c'\sqrt{2}$, c'est-à-dire à : $c - 2c' = c'\sqrt{2}$ ce qui s'écrit : $c' = \dfrac{c}{2+\sqrt{2}}$ soit encore : $\boldsymbol{c' = c\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$.



L'octogone est régulier si et seulement si : $\boldsymbol{c' = c\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$.

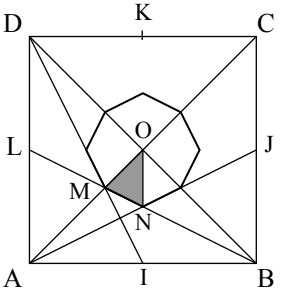
Remarque : La construction du point M, ou des autres points d'un tel octogone, ne présente aucune difficulté.
Considérons le cercle inscrit dans le carré ; il est aussi inscrit dans l'octogone régulier.
Le point de contact de ce cercle avec l'hypoténuse du triangle rectangle en A est situé sur la diagonale [AC]. La tangente au cercle en ce point est perpendiculaire à la droite (AC).
On obtient ainsi le point M.

UN OCTOGONE DANS UN CARRÉ (2)



Dans un carré ABCD on relie chaque sommet au milieu de chacun des deux côtés auxquels ce sommet n'appartient pas. On détermine ainsi un octogone (voir la figure ci-contre).
• Exprimer l'aire ***a*** de cet octogone en fonction de l'aire ***A*** du carré.
• Cet octogone est-il régulier ?

SOLUTION



• Soit O le centre du carré. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Soit M l'intersection de [BL] et [DI], N l'intersection de [AJ] et [BL].
Par raison de symétrie :
1°) [BL] et [DI] se coupent sur [AC], donc M est sur [AC].
2°) [AJ] et [BL] se coupent sur [IK], donc N est sur [IK] et (ON) // (CJ).
3°) L'aire ***a*** de l'octogone est égale à 8 fois l'aire du triangle MNO : ***a*** = 8 x aire(MNO). D'autre part, M est le centre de gravité du triangle ABD, donc, aire(ANO) = 3 x aire(MNO) et d'après le 2°) ci-dessus, aire(AJC) = 4 x aire(ANO). Enfin, ***A*** = 2 x aire(ABC) = 4 x aire(AJC).
En résumé, ***A*** = 4 x 4 x 3 x aire(MNO), par conséquent : ***a*** = ***A*** / 6.
• Par raison de symétrie, les huit triangles constituant l'octogone, tels que le triangle OMN, sont isométriques. Donc les huit côtés de l'octogone sont de la même longueur.
Cet octogone est-il régulier ?
S'il existe un cercle passant par les huit sommets, son centre est nécessairement en O puisque toutes les grandes diagonales ont O pour milieu. Or, en désignant par *c* le côté du carré : $OM = \dfrac{OA}{3} = \dfrac{AC}{6} = c\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ et $ON = \dfrac{JC}{2} = \dfrac{c}{4}$. Par conséquent OM ≠ ON et donc **l'octogone n'est pas régulier.**

UN OCTOGONE DANS UN CARRÉ (3)

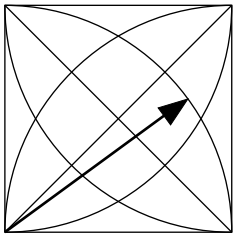


Fig. 1

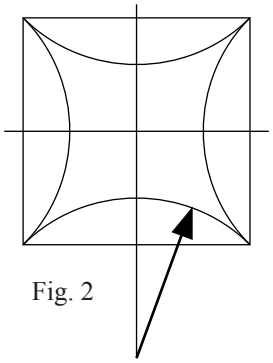


Fig. 2

On trace, intérieurement à un carré ABCD dont la longueur des côtés est égale à *c*, les quatre quarts de cercle ayant chacun pour centre un des sommets du carré (chacun d'eux a donc pour rayon *c* et pour corde une diagonale du carré - voir fig.1).
On trace, intérieurement à ce même carré, les quatre quarts de cercle ayant chacun pour corde un des côtés du carré (chacun d'eux a donc pour rayon $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ et son centre est situé sur une médiatrice d'un des côtés du carré à la distance *c* du centre de ce carré - voir fig. 2). Les milieux des arcs des deux familles sont les sommets d'un octogone (voir fig.3).

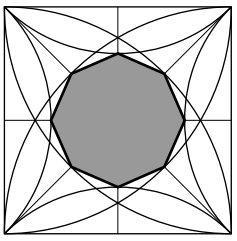


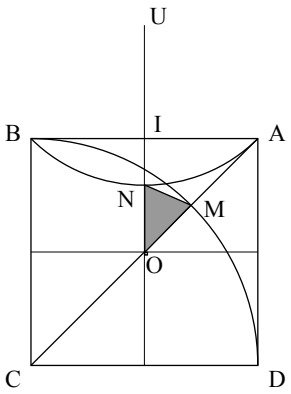
Fig. 3

• Cet octogone est-il régulier ?

• Exprimer l'aire $\boldsymbol{a}$ de cet octogone en fonction de l'aire $\boldsymbol{A}$ du carré.

SOLUTION

• Par raison de symétrie, on peut affirmer que tous les côtés de l'octogone sont de la même longueur.
Pour prouver que cet octogone est régulier il ne reste plus qu'à établir l'appartenance des sommets à un même cercle.
Soit O le centre du carré, M le milieu du quart de cercle de centre C, N le milieu du quart de cercle de centre U et de corde [AB] ; soit enfin I le milieu de [AB].



$$OM = CM - CO = CB - CO = c - c\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad ON = OI - IN = OI - (UN - UI) = 2OI - UN = c - c\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc OM = ON. De même, tous les autres sommets de l'octogone sont à la même distance de O.
Par conséquent, **l'octogone est régulier.**

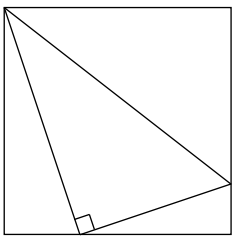
• L'aire du triangle OMN est égale à : $\frac{1}{2}OM \times ON \times \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left[c\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = c^2\frac{3\sqrt{2}-4}{8}$

donc, $\boldsymbol{a} = c^2\left(3\sqrt{2}-4\right)$ c'est-à-dire : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}\left(3\sqrt{2}-4\right)$.

Des problèmes

Une grossière erreur due à la précipitation non pas de l'auteur ni du responsable de la rubrique mais uniquement du «metteur en page» s'est glissée dans l'exercice 76-2 de la Ru-bri-col'age, page 5 du dernier Corol'aire.
La vraie question posée est : « **Quelle est la limite de An/A quand n tend vers l'infini ?** », et non pas An/n comme cela a été écrit. D'ailleurs une telle question serait vraiment trop simple ! et vous l'avez certainement corrigée, vu le texte de l'exercice.
Toutes mes excuses. Jean Fromentin

77-1 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Dans son livre, *Tommorow's math* (Oxford University Press, 1972, p.120), Stanley Ogilvy présente un problème ouvert, posé par Solomon Golomb (l'inventeur des polyominos) en 1971 : Peut-on inscrire un triangle rectangle dans un carré, de la façon présentée ci-contre, avec des longueurs entières pour tous les segments qui apparaissent sur la figure ?
Ce problème n'a pas dû rester bien longtemps sans réponse après la parution du livre.
Qu'en pensez-vous ?



77-2 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :
« Les circonférences ayant pour diamètres les diagonales d'un trapèze ABCD se coupent sur la perpendiculaire aux bases menée du point d'intersection S des côtés obliques AD et BC. »
Extrait de *Problèmes mathématiques* par Ernest Lebon- Armand Colin (1898).

77-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Chacun sait que ce n'est pas parce que le périmètre d'un polygone augmente que l'aire de celui-ci augmente. Mais qu'en est-il si le polygone est inscrit dans un cercle ?

77-4 *de Frédéric de Ligt (Montguyon) d'après un exercice d'olympiades académiques transmis par Jacques Chayé* :
On dit qu'un entier non nul *n* est harmonieux s'il peut s'écrire comme la moyenne de *n* puissances de 2, non nécessairement distinctes. Quels sont les entiers harmonieux ?

Des solutions

74-2 *de Frédéric de Ligt* :
Trouver tous les triangles à côtés entiers qui possèdent deux angles dont l'un est le double de l'autre.

Dans le dernier numéro du Corol'aire, Louis Rivoallan avait donné un complément à sa solution parue dans le numéro 75. ***Claude Morin****, un lecteur attentif de la rubrique, la complète à son tour.*

Le complément de Louis Rivoallan ne répond pas complètement à la question posée car les entiers a, b, c doivent être les côtés d'un triangle. La condition $b < a + c$ est vérifiée car $a + c - b = kn(n-m) > 0$ quand $m < n$.
Mais $a + b - c = k(2m^2 + mn - n^2) = k(2m - n)(m + n) > 0$ impose $n < 2m$. En conclusion, les triangles à côtés entiers qui possèdent deux angles dont l'un est le double de l'autre sont les triangles de côtés $(km^2, kmn, kn^2 - km^2)$ avec m et n entiers premiers entre eux tels que $m < n < 2m$. Le plus petit est obtenu pour $m = 2$, $n = 3$ et $k = 1$: (4, 6, 5).
Remarque. L'exercice a été posé à la compétition USAMO 1991 où l'on demandait le plus petit périmètre avec la condition supplémentaire que l'angle C soit obtus ; on trouve $m = 4$, $n = 7$ ($k = 1$), périmètre $= 77$. Plus généralement si $m < n < \sqrt{2}m$, l'angle B est obtus. Si $\sqrt{2}m < n < \sqrt{3}m$, le triangle a ses trois angles aigus. Si $\sqrt{3}m < n < 2m$, l'angle C est obtus.

74-3 *de Louis Rivoallan* :
Les points A, B, C et D sont placés dans cet ordre sur un même cercle de centre O. Sachant que O est l'isobarycentre de ces quatre points, que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?

Solution de Frédéric de Ligt
Soit I le milieu de [BD] et J le milieu de [AC], on construit le point A' tel que AJA'I soit un parallélogramme. Supposons sans perdre de généralité que $AI \leq AJ$. Avec l'inégalité triangulaire on a $AA' \leq AJ + JA'$. Le centre O étant l'isobarycentre des points A, B, C, et D, il est le milieu du segment [IJ] et donc celui du segment [AA'], donc $AA' = 2\,AO$. Par ailleurs $JA' = AI$ d'où l'inégalité $2AO \leq AJ + AI$, puis $2AO \leq 2AJ = AC$. Comme 2AO vaut la longueur d'un diamètre et que A et C sont des points du cercle, on en déduit que [AC] est aussi un diamètre de ce cercle, et par conséquent J est confondu avec le centre O. Ce point O est le milieu du segment [IJ], le point I est donc aussi confondu avec le point O. Les diagonales du quadrilatère ABCD sont des diamètres du cercle, ABCD ne peut être qu'un rectangle.
Il pourrait être aussi intéressant d'examiner si la conclusion est conservée dans les cas d'une plaque homogène ou de quatre tiges pesantes.

76-3 *de Louis Rivoallan* :
Soit un point A extérieur à une droite d. On dispose d'une règle, non graduée, et d'un compas. Avec ces instruments, on veut tracer la perpendiculaire à la droite d passant par A.
En utilisant le compas trois fois.
En utilisant le compas deux fois.
En utilisant le compas une seule fois.

Solution de Jean-Paul Guichard
Tracer un cercle de centre A qui coupe d en C et D. Tracer deux cercles de même rayon de centres respectifs C et D qui se coupent en B. Tracer la droite (AB) qui est la perpendiculaire souhaitée.
Tracer un cercle de centre A qui coupe d en C et D. Tracer un autre cercle de centre A, de rayon plus petit, qui coupe les segments [CA] et [DA] respectivement en E et F. Les segments [DE] et [CF] se coupent en B. Tracer la droite (AB) qui est la perpendiculaire souhaitée. On peut bien sûr utiliser les deux autres points d'intersection du petit cercle avec les droites (CA) et (DA). On peut aussi utiliser ces points d'intersection avec un cercle de rayon plus grand.

On peut aussi se donner deux points quelconques B et C sur la droite d, tracer le cercle de centre B et de rayon BA ainsi que le cercle de centre C et de rayon CA. En notant D le second point d'intersection des deux cercles, (AD) est la perpendiculaire cherchée.
Pour la troisième question, restée sans réponse, je propose la construction suivante. Tracer un cercle centré sur un point quelconque de la droite. Il coupe la droite d en deux points B et C. Son rayon doit être assez grand pour que le point A soit intérieur au disque de diamètre [BC]. Tracer les droites (BA) et (CA). Elles recoupent le cercle en D et E respectivement. Les droites (BE) et (CD) se coupent en un point F. La droite (AF) est la perpendiculaire cherchée (le point A est alors l'orthocentre du triangle BCF). Frédéric de Ligt.

Rallye Mathématique Poitou-Charentes

La date de la prochaine édition du Rallye Mathématique de Poitou - Charentes n'est pas encore arrêtée.
En revanche, le thème de recherche que nous proposons maintenant chaque année portera sur le calcul en liaison avec l'exposition « **Comment tu comptes** » élaborée avec l'Espace Mendès-France de Poitiers. Matériels de calculs suivant les âges, numérations et algorithmes opératoires suivant les civilisations, le thème est riche et accessible à tous les niveaux. Si vous avez des idées à nous soumettre, des problèmes à nous proposer pour cette future édition, n'hésitez pas à nous écrire (adresses en page 1 de ce Corol'aire).